Correction exercices développement double

Exercice 9 p 75

9 Développer les expressions littérales suivantes.

$G = (x + 4)(x + 1)$ $H = (x + 7)(4x + 2)$ $I = (2x + 1)(2x - 1)$ $J = (2x - 6)(y + 3)$

Rappel :
Comment fonctionne la simple distributivité ?
Prenons l'exemple $\mathrm{M} \times (\mathrm{c} + \mathrm{d})$
On remarque que M est « à l'extérieur » des parenthèses.
C'est M que l'on distribue avec la « «parenthèse ».
Or dans les parenthèses il y a deux termes : c et d
D'où on distribuera M d'une part avec c, et d'autre part avec d.
Ce qui donne alors $\mathrm{M} \times (\mathrm{c} + \mathrm{d}) = \mathrm{M} \times \mathrm{c} + \mathrm{M} \times \mathrm{d}$

Comment fonctionne alors la double distributivité ?
Prenons l'exemple $(a + b) \times (c + d)$
Comment utiliser la simple distributivité dans cet exemple $(a + b) \times (c + d)$?
Si on pose $M = a + b$ autrement dit $(a + b)$ vaut M
Remplaçons $a + b$ par M, on obtient alors :
$(a + b) \times (c + d) = M \times (c + d)$
$= M \times c + M \times d$ **d'après la simple distributivité**
$= (a + b) \times c + (a + b) \times d$ **en remplaçant M par $a + b$**
$= c \times (a + b) + d \times (a + b)$ **en utilisant le fait que dans un produit on changer l'ordre des facteurs comme $r \times s = s \times r$**
$= c \times a + c \times b + d \times a + d \times b$ **en utilisant la simple distributivité deux fois**
$= \boldsymbol{ca + cb + da + db}$ **en simplifiant l'expression littérale.**

On peut retenir finalement que $\boldsymbol{(a + b) \times (c + d) = ca + cb + da + db}$

D'où

Il faut bien identifier les termes dans chaque parenthèse : x et 4 dans la première parenthèse, puis x et 1 dans la seconde parenthèse. $G = (x + 4)(x + 1)$ **entre les parenthèses existe le signe multiplié « ×»** $= (x + 4) \times (x + 1)$ $= x \times x + 4 \times x + x \times 1 + 4 \times 1$ $= x^2 + 4x + x + 4$ $= x^2 + 5x + 4$	Bien identifier les termes : x et 7, puis 4x et 2 $H = (x + 7)(4x + 2)$ $= x \times 4x + 7 \times 4x + x \times 2 + 7 \times 2$ $= 4x^2 + 28x + 2x + 14$ $= 4x^2 + 30x + 14$
Dans l'expression I, il apparait dans la deuxième parenthèse une différence (soustraction). On peut écrire une addition à la place de la soustraction. D'où $2x - 1$ devient $2x + (-1)$. L'avantage de transformer la soustraction en addition permettra d'éviter des erreurs de signes dans la distribution. Ainsi, on obtient $I = (2x + 1)(2x - 1)$ $= (2x + 1)(2x + (-1))$ $= 2x \times 2x + 1 \times 2x + 2x \times (-1) + 1 \times (-1)$ $= 4x^2 + 2x - 2x - 1$ $= 4x^2 - 1$	De même on transforme $2x - 6$ en $2x + (-6)$ On obtient alors : $J = (2x - 6)(y + 3)$ $= (2x + (-6)) \times (y + 3)$ $= 2x \times y + (-6) \times y + 2x \times 3 + (-6) \times 3$ $= 2xy + (-6y) + 6x + (-18)$ **en rappelant que $\boldsymbol{2x \times 3 = 2 \times x \times 3 = 2 \times 3 \times x = 6 \times x}$** $= 2xy - 6y + 6x - 18$

Exercice 33 p 77

En considérant les mêmes remarques que dans les exercices précédents, on obtient :

$$\begin{aligned} A &= (2x-3)\times(7-x) \\ &= (2x+(-3))\times(7+(-x)) \\ &= 2x\times 7+(-3)\times 7+2x\times(-x)+(-3)\times(-x) \\ &= 14x+(-21)+(-2x^2)+3x \\ &= 17x-21-2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (x+y)\times(2x-y) \\ &= (x+y)\times(2x+(-y)) \\ &= x\times 2x+x\times(-y)+y\times 2x+y\times(-y) \\ &= 2x^2-xy+2xy-y^2 \end{aligned}$$

33 Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = (2x-3)(7-x)$ $B = (x+y)(2x-y)$

$C = (x-7)(2+y)$ $D = (x-1)(1-x)$

$E = 3(3a+4)^2$ $F = -5(4-b)^2$

Pour les développements suivants, je me permets de donner directement les développements obtenus après la distribution, car l'écriture de formules reste assez contraignante sur le logiciel.

$C = 2x + xy - 14 - 7y$

$D = x - x^2 - 1 + x = 2x - x^2 - 1$

$$\begin{aligned} E &= 3\times(3a+4)^2 \\ &= 3\times(3a+4)\times(3a+4) \end{aligned}$$

A partir de là, on peut par exemple calculer le produit de 3 par (3a+4) d'abord, OU d'abord calculer le produit de (3a+4) par (3a+4).

$$\begin{aligned} E &= 3\times(3a+4)\times(3a+4) \\ &= (9a+12)\times(3a+4) \\ &= 27a^2+36a+36a+48 \end{aligned}$$

Sur la deuxième ligne on a multiplié 3 par (3a+4)

OU

$$\begin{aligned} E &= 3\times(3a+4)\times(3a+4) \\ &= 3\times(9a^2+12a+12a+16) \\ &= 27a^2+36a+36a+48 \end{aligned}$$

Sur cette dernière ligne, on distribue 3 avec chaque terme de la parenthèse.

De même
$$\begin{aligned} F &= -5\times(4-b)^2 \\ &= -5\times(4-b)\times(4-b) \end{aligned}$$

D'où par un même raisonnement

$$\begin{aligned} F &= -5\times(4-b)^2 \\ &= -5\times(4-b)\times(4-b) \\ &= (-20+5b)\times(4-b) \\ &= -80+20b+20b-5b^2 \end{aligned}$$

Exercice 59 p 83

1) Appliquons ce programme A, en précisant comme nombre de départ 4.
On obtient ainsi

- 4
- $4 + 3 = 7$
- $7^2 = 49$
- $49 - 4^2 = 49 - 16 = 33$

Appliquons le programme en choisissant -5,

- -5
- $-5 + 3 = -2$
- $(-2)^2 = -2 \times (-2) = 4$
- $4 - (-5)^2 = 4 - 25 = -21$

59 Identiques

1. Voici un programme de calcul :

> **Programme A**
> Choisir un nombre.
> Ajouter 3.
> Calculer le carré du résultat obtenu.
> Soustraire le carré du nombre de départ.

a. Eugénie choisit 4 comme nombre de départ. Vérifier qu'elle obtient 33 comme résultat du programme.

b. Elle choisit ensuite −5 comme nombre de départ. Quel résultat obtient-elle ?

2. Voici un deuxième programme de calcul :

> **Programme B**
> Choisir un nombre.
> Multiplier par 6.
> Ajouter 9 au résultat obtenu.

Clément affirme : « Si on choisit n'importe quel nombre et qu'on lui applique les deux programmes, on obtient le même résultat. »
Prouver que Clément a raison.

3. Quel nombre de départ faut-il choisir pour que le résultat des programmes soit 54 ?

D'après DNB Polynésie, 2015.

2) Une première idée serait d'appliquer le programme B, aux nombres 4 et -5 et vérifier que les résultats se correspondent. Sauf que même si les résultats correspondent, ça ne serai tvrai seulement pour les nombres 4 et -5, mais qu'en sera-t-il pour d'autres nombres ? En fait à ce stade, on ne peut que « conjecturer » l'affirmation de Clément,il faudrait en fait la démontrer, c'est-à-dire démontrer que la conjecture est vraie.
Pour réaliser cette démonstration il faut démontrer que les programmes sont « équivalents » quel que soit le nombre choisi au départ. Prenons un nombre quelconque qu'on appellera par exemple « x ».
Ecrivons les deux programmes en choisissant pour chacun d'eux « x » au départ.
On obtient alors pour le programme A :

- x
- $x + 3$
- $(x+3)^2$
- $(x+3)^2 - x^2$

A la troisième étape, c'est « tout » le résultat de l'étape 2 qui est mis au carré.

On obtient pour le programme B :

- x
- $6 \times x = 6x$
- $6x + 9$

A partir de là comment conclure ? Intéressons-nous aux résultats finaux, c'est-à-dire aux dernières expressions littérales de chaque programme.
Sont-elles égales ? Si oui alors, on aura montré que Clément a raison.

$(x+3)^2 - x^2$ et $6x + 9$ sont –elles égales ?
Ici il faut penser à simplifier la première, ce qui donne :

$$\begin{aligned}(x+3)^2 - x^2 &= (x+3) \times (x+3) - x^2 \\ &= (x^2 + 3x + 3x + 9) - x^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 - x^2 \\ &= 6x + 9\end{aligned}$$

D’où les expressions sont égales, et donc les programmes donnent des mêmes résultats pour un même nombre choisi au départ.

3) Pour trouver le nombre de départ à choisir afin d’obtenir 54, on peut remonter un programme. Peu importe le programme que vous choisissez, de toute manière les deux sont « équivalents ».
Choisissons-en un, celui étant le plus simple d’écriture, c’est-à-dire le programme B.
Si on remonte le programme B, on va d’abord soustraire 9 puis finir en divisant par 6, ce qui donnera $(54-9)\div 6 = 7{,}5$.
On peut aussi raisonner différemment en se posant la question « Quel nombre, qui est inconnu permet de trouver 54 ? »
On cherche un nombre inconnu, notons cet inconnu x.
Appliquons le programme B, avec x au départ (certes nous ne connaissons pas x, mais il est possible de le manipuler), on trouvera à l’issue $6x+9$.
Ainsi ce résultat (issu du programme) doit être égal à 54.
Ce qui nous amène à considérer l’équation $6x+9=54$. Reste plus qu’à la résoudre et trouver 7,5.

<u>Exercice 1 supplémentaire</u>

a) En appliquant le programme aux nombres 1, on obtient 9. Pour 4 choisi au départ on obtient 9.

En appliquant pour -5, on obtient

$$\begin{array}{c} -5 \\ -5\times 2=-10 \\ -10+9=-1 \\ -1-2\times(-5)=-1-(-10)=9 \end{array}$$

b) On remarque alors que les résultats sont les mêmes, et donc conjecturer que les programmes **semblent** donner des mêmes résultats pour un même nombre choisi au départ.

c) Comment démontrer notre conjecture ? on nous indique de s’aider d’une expression littérale (expression contenant des lettres). Pensant alors à appliquer le programme pour le nombre de départ x.

Ce qui donne

$$\begin{array}{c} x \\ x\times 2=2x \\ 2x+9 \\ 2x+9-2x=2x-2x+9=9 \end{array}$$

d’où finalement que quel que soit x choisi au départ, on obtient toujours 9 au final !

<u>Exercice 2 supplémentaire</u>

Dans cet exercice on remarque aussi que les résultats sont les mêmes, soit on peut conjecturer que les programmes donnent de mêmes résultats pour un même nombre choisi au départ.
On peut faire comme exercice de démontrer cette conjecture, en considérant x et en appliquant chaque programme au nombre x. Vous obtiendrez des expressions littérales, qu’il vous faudra simplifier pour conclure une égalité.