Formulaire de 2nd Partie Géométrie   Lycée La Pérouse

Formules usuelles

Le périmètre **P** d'un polygone est la somme des longueurs de tous ses côtés.
Périmètre d'un cercle de rayon **R** : **P** = $2\times\pi\times R$
Aire **A** d'un rectangle de longueur **L** et de largeur **l** : **A** = $L\times l$
Aire **A** d'un triangle de base **B** et de hauteur **h** : **A** = $\frac{B\times h}{2}$
Aire **A** d'un trapèze de bases **B** et **b** et de hauteur **h** : **A** = $\frac{(petite\ base+grande\ base\ )\times hauteur}{2}$
Volume **V** d'un cylindre et de hauteur **h** : **V** = $\pi R^2 \times h$
Volume **V** d'une pyramide ou d'un cône d'aire de base **A** et de hauteur **h** : **V** = $\frac{1}{3}\times Aire\ de\ la\ base\ \times hauteur$
Volume **V** d'une boule de rayon **R** : **V** = $\frac{4}{3}\pi R^3$

Trigonométrie

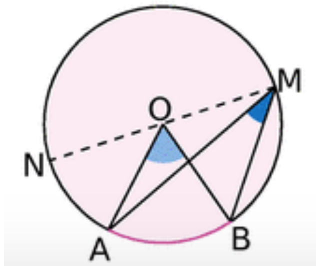
Rapports trigonométriques dans un triangle rectangle : CAHSOHTOA

Cosinus d'un angle aigu = $\frac{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$; **Sinus** d'un angle aigu = $\frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

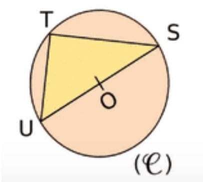
Tangente d'un angle aigu = $\frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}$

Géométrie plane

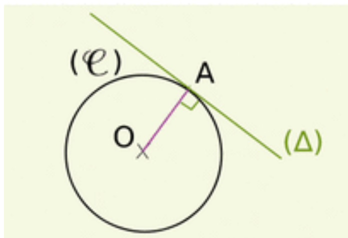
Cercle



- Si deux points sont sur un cercle alors le centre de ce cercle est à égale distance de ces deux points. OA=OB=rayon du cercle. NM=diamètre. BM=corde.
- Si, dans un cercle, un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc alors la mesure de l'angle au centre est égale au double de la mesure de l'angle inscrit.
  $\widehat{AOB} = angle\ au\ centre$; $\widehat{AMB} = angle\ inscrit$
- Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc alors ils sont de même mesure.

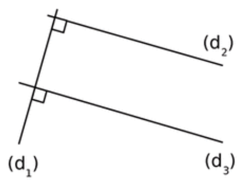


- Si un triangle est inscrit dans un demi-cercle et si l'un des côtés est diamètre du cercle, alors ce triangle est rectangle.
- Si un triangle est rectangle alors le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit au triangle.



- Si *C* est un cercle de centre O et A un point de ce cercle, on appelle tangente au cercle *C* en le point A, la droite qui est perpendiculaire à (OA) et qui passe par A.

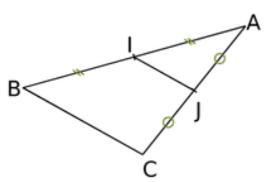
Droites



- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
- Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles.
- Si deux droites sont parallèles alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

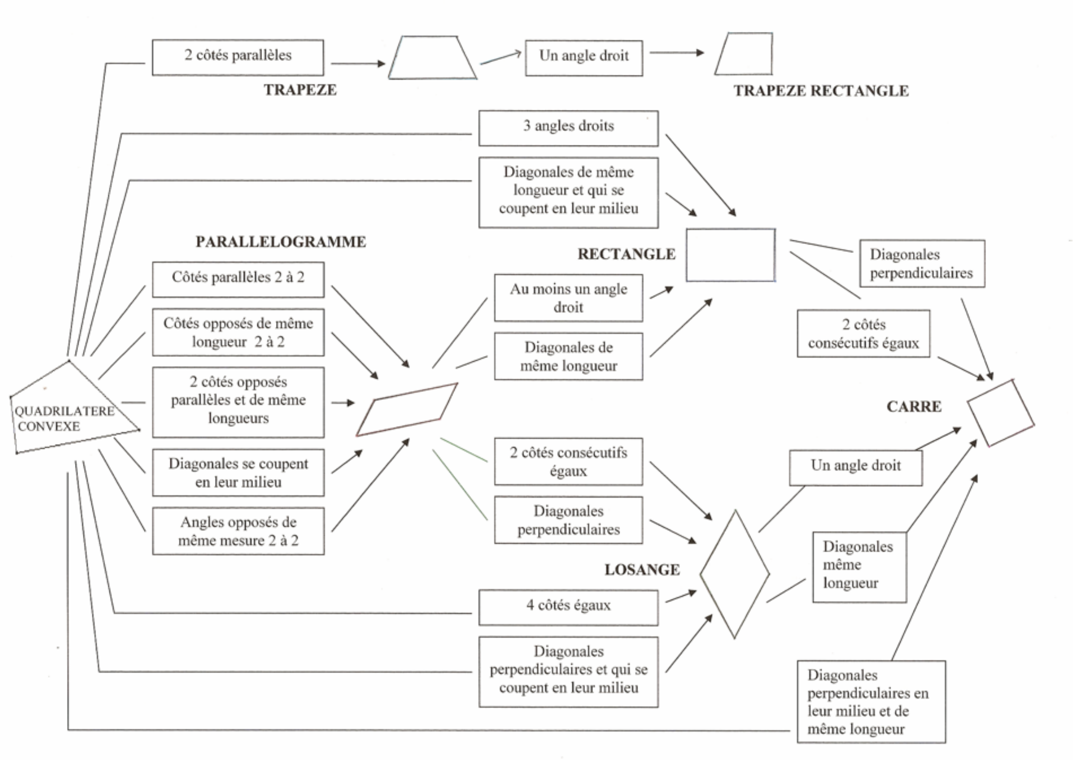
Triangle

- Inégalité triangulaire : Pour trois points A, B et C distincts du plan , on a : AB + BC $\geq$ AC
- Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté de ce triangle.
- Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.
- Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un deuxième côté du triangle alors elle passe par le milieu du troisième côté du triangle.



Trapèze : Un trapèze est quadrilatère ayant deux côtés parallèles.
Parallélogramme : Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
Losange : On appelle losange, un quadrilatère qui a 4 côtés de même longueur.
Rectangle : On appelle rectangle, un quadrilatère dont les 4 angles sont droits.

Carré : On appelle carré, un quadrilatère qui a 4 côtés de même longueur et 4 angles droits. (Il a donc toutes les propriétés du rectangle et du losange).



Transformations du plan

- A' est l'image de A par la **symétrie de centre O** si et seulement si O est le milieu de [AA']
- A' est l'image de A par la **symétrie d'axe (*d*)** si et seulement si (*d*) est la médiatrice de [AA'].

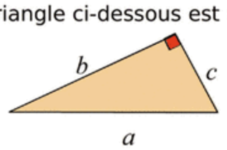
Théorèmes

Théorème de Pythagore : Si un triangle ABC est rectangle en A, alors : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Théorème

Si **un triangle est rectangle**
alors **le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés**.

Exemple 1 : Le triangle ci-dessous est rectangle donc $a^2 = b^2 + c^2$.



Contraposée du th de Pythagore : Si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ alors **ce triangle n'est** pas **rectangle en A**

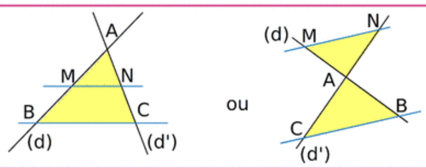
Réciproque du théorème de Pythagore :

Si, dans un triangle ABC, on a la relation : $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors : **ce triangle est rectangle en A.**

Théorème de Thalès :

Théorème

Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A.
B et M sont deux points de (d) distincts de A.
C et N sont deux points de (d') distincts de A.
Si les **droites (BC) et (MN) sont parallèles**
alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



Réciproque du Théorème de Thalès :

Théorème

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A.
B et M sont deux points de (d) distincts de A.
C et N sont deux points de (d') distincts de A.
Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre
et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors **les droites (BC) et (MN) sont parallèles**.

Exercices d'entrainement

Exercice 1 :

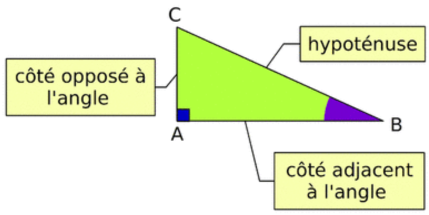
. Recopie et complète la phrase suivante.

Dans le triangle ... rectangle en ...,

$\cos \widehat{ABC} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\text{côté........à....}}{\text{......}}$

$\sin \widehat{ABC} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\text{côté........à....}}{\text{......}}$

$\tan \widehat{ABC} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\text{côté........à....}}{\text{côté........à....}}$.



Si AB = 12 cm, AC = 5 cm.

1) Calculer la valeur exacte de AC

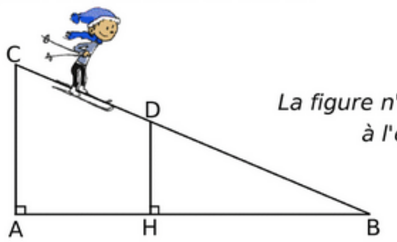
2) Calculer la valeur exacte $cos\widehat{ABC}$

3) En déduire une mesure en degré de l'angle $\widehat{ABC}$, au dixième près.

Exercice 2 :

Un skieur dévale, tout schuss, une piste rectiligne représentée ci-dessous par le segment [BC] de longueur 1 200 m.

À son point de départ C, le dénivelé par rapport au bas de la piste, donné par la longueur AC, est de 200 m. Après une chute, il est arrêté au point D sur la piste. Le dénivelé, donné par la longueur DH, est alors de 150 m.



La figure n'est pas à l'échelle.

Calcule la longueur DB qu'il lui reste à parcourir.

Exercice 3 :

Un silo à grain est formé d'un cylindre de révolution de rayon 4,5 m et de hauteur 10 m, surmonté d'un cône de révolution de 2,5 m de hauteur et de même rayon.
Calcule le volume de ce silo, arrondi au m³.

Exercice 4 :

20 Soit un triangle EDF rectangle en D.

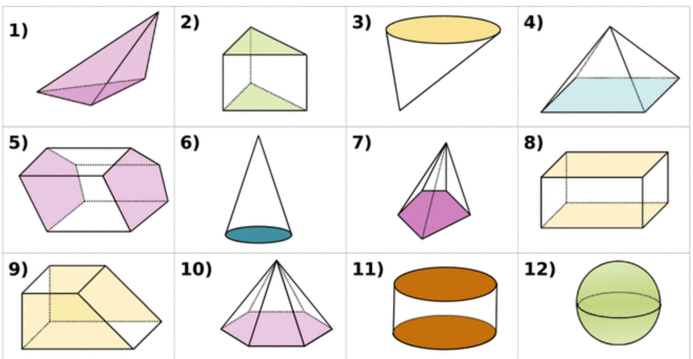
a. Écris l'égalité de Pythagore pour ce triangle.

b. On donne : EF = 450 mm et DF = 360 mm. Calcule ED² puis, en utilisant la touche racine carrée de ta calculatrice, la longueur ED.

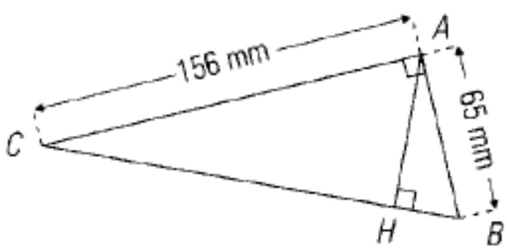
c. Calcule DF avec EF = 4,5 dm et ED = 2,7 dm.

Exercice 5 : Nommer les solides ci-dessous, puis donner les formules de volumes.

On a représenté, ci-dessous, des solides en perspective cavalière.



Exercice 6 :



1) Reproduire la figure en vraie grandeur.

2) Calculer BC.

3) Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de AC et AB, puis la calculer

4) Exprimer la même aire en fonction de BC et AH. En déduire que AH = 60 mm.

5) Calculer alors CH puis HB.

Correction des exercices d'entrainement

Exercice 1 : CAHSOTOA

$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle}}{\text{hypoténuse}}$; $\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{côté opposé à l'angle}}{\text{hypoténuse}}$; $\tan\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle}}{\text{côté opposé à l'angle}}$.

1) Théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$ alors $BC = \sqrt{169} = 13\ cm.$

2) $\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{13}$

3) $\widehat{ABC} = 22{,}6°$

Exercice 2 : Théorème de Thales

Dans le triangle ABC, on a D sur (BC) , H sur (AB) , et les droites (AC) et (DH) sont parallèles car toutes les deux sont perpendiculaires à la droite (AB) donc on a : $\frac{BD}{BC} = \frac{BH}{BA} = \frac{DH}{AC}$ donc : $\frac{BD}{BC} = \frac{DH}{AC}$ et : $\frac{BD}{1200} = \frac{150}{200}$ et enfin $BD = \frac{150}{200}\times 1200$ = 900.

Exercice 3 : Volume du Cylindre = $\pi R^2 h = \pi\times 4{,}5^2\times 10 = 202{,}5\pi\ \ m^3$;
Volume cône = $\frac{1}{3}\ \pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi\times 4{,}5^2\times 2{,}5 = 16{,}875\pi\ m^3$ et alors Volume du silo = $202{,}5\pi\ +\ 16{,}875\pi = 219{,}375\ \pi\ \ m^3$

Exercice 4 : a. Théorème de Pythagore dans le triangle EDF rectangle en D : $EF^2 = ED^2 + DF^2$
b. $EF^2 = ED^2 + DF^2$ donc $450^2 = ED^2 + 360^2$ donc $ED^2 = 450^2 - 360^2 = 72900$ et enfin $EF = \sqrt{72900}$=270 mm
c. $EF^2 = ED^2 + DF^2$ donc $4{,}5^2 = 2{,}7^2 + DF^2$ donc $DF^2 = 4{,}5^2 - 2{,}7^2 = 12{,}96$ et enfin $EF = \sqrt{12{,}96}$=3,6 dm

Exercice 5 :

1) Pyramide. **V** = $\boldsymbol{\frac{1}{3}\times Aire\ de\ la\ base\ \times hauteur}$

2) Prisme droit. Volume = Aire de la base x hauteur

3) Cône . **V** = $\boldsymbol{\frac{1}{3}\times Aire\ de\ la\ base\ \times hauteur = \frac{1}{3}\times\pi R^2\times h}$

4)) Pyramide. **V** = $\boldsymbol{\frac{1}{3}\times Aire\ de\ la\ base\ \times hauteur}$

5) Prisme droit. Volume = Aire de la base x hauteur

6) Cône . **V** = $\boldsymbol{\frac{1}{3}\times Aire\ de\ la\ base\ \times hauteur = \frac{1}{3}\times\pi R^2\times h}$

7) Pyramide. **V** = $\boldsymbol{\frac{1}{3}\times Aire\ de\ la\ base\ \times hauteur}$

8) Parallélépipède rectangle. Volume = $Longeur\times largeur\times hauteur$

9) Prisme droit. Volume = Aire de la base x hauteur= Aire du trapèze × hauteur

10) Pyramide. **V** = $\boldsymbol{\frac{1}{3}\times Aire\ de\ la\ base\ \times hauteur}$

11) Cylindre. **V = πR² ×h**

12) Sphère. **V** = $\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi R^3}$

Exercice 6 :

2) Théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 65^2 + 156^2 = 4225 + 24336 = 28561$ alors $BC = \sqrt{28561} = 169\ mm.$

3) Aire du triangle ABC = $\frac{base\times hauteur}{2} = \frac{AC\times AB}{2} = \frac{156\times 65}{2} = 5070\ mm^2$

4) Aire du triangle ABC = $\frac{base\times hauteur}{2} = \frac{BC\times AH}{2}$ donc $\frac{BC\times AH}{2} = \frac{169\times AH}{2} = 5070$ Donc $AH = \frac{2\times 5070}{169} = 60\ mm.$

5) Théorème de Pythagore dans le triangle AHC rectangle en H : $AC^2 = AH^2 + CH^2$ donc $CH^2 = 156^2 - 60^2 = 20736$ alors $CH = \sqrt{20736} = 144\ mm.$

Et alors $HB = CB - CH = 169 - 144 = 25\ mm$