Formulaire de 2nd	Partie Calculs	Lycée La Pérouse

(source : fiches collèges Hathier)

Inverse et opposé :

L'opposé d'un nombre a est l'unique nombre b tel que $a + b = 0$; il se note $-a$

Exemples : L'opposé de 3 est -3	L'opposé de -5 est 5

L'inverse d'un nombre a non nul est l'unique nombre b tel que $a \times b = 1$; il se note $\frac{1}{a}$

Exemples : L'inverse de 1 est 1/1, soit 1 car 1×1=1	L'inverse de 5 est 1/5, soit 0.2 car 5×0.2=1

Calcul avec des fractions :

a, b, c, d dont des nombres relatifs avec b et d non nuls.

$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ (b $\neq 0$; k $\neq 0$)

Addition	Soustraction	Multiplication	Division ($c \neq 0$)
$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	Soustraire un nombre, c'est additionner son opposé	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$
On réduit les deux écritures au même dénominateur si c'est nécessaire.			Diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse.

Exemples :

$\frac{15}{4}+\frac{11}{6}=\frac{15\times3}{4\times3}+\frac{11\times2}{6\times2}=\frac{45}{12}+\frac{22}{12}=\frac{67}{12}$

$\frac{15}{4}-\frac{11}{6}=\frac{15\times3}{4\times3}-\frac{11\times2}{6\times2}=\frac{45}{12}-\frac{22}{12}=\frac{23}{12}$

$\frac{5}{8}\times\frac{7}{12}=\frac{5\times7}{8\times12}=\frac{35}{96}$

$\frac{5}{8}:\frac{7}{12}=\frac{5}{8}\times\frac{12}{7}=\frac{5\times12}{8\times7}=\frac{5\times3}{2\times7}=\frac{15}{14}$

Calcul avec les puissances :

Définition :

$a^n = \underbrace{a\times a\times \ldots\ldots\times a}_{n\ fois}$ $\quad n \geq 2$

$a^0 = 1$ *et* $a^1 = a$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Exemples :
$(-3)^3$ = (-3) x (-3) x (-3) = - 27

Opérations :

Même nombre a	$a^n\times a^m = a^{n+m}$
	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
Même exposant n	$(a\times b)^n = a^n \times b^n$
	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Puissance de 10 :

Puissance de 10 et écriture décimale

Soit n un entier positif non nul.

$10^n = \underbrace{10\times10\times\ldots\ldots\times10}_{n\ fois} = \underbrace{100\ldots00}_{n\ zéros}$

$10^{-n} = \frac{1}{10\times10\times\ldots\ldots\times10} = \underbrace{0{,}00\ldots01}_{n\ chiffres\ après\ la\ virgule}$

Exemples :

10^4 (10 puissance 4) = 10x10x10x10 = 10 000	$10^{-3} = 1/10^3 = 0{,}001$

Calculs avec des radicaux

La racine carrée d'un nombre réel a positif est le <u>nombre positif</u> dont le carré est égal à a.

$\boxed{a \geq 0 \quad \sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a}$

Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$ on a : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Pour $a \geq 0$ et $b > 0$ on a : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

ATTENTION : pour a> 0 et b> 0 on a : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Exemples :

Développement et identités remarquables.

Distributivité simple :

$$k(a+b) = ka + kb \qquad k(a-b) = ka - kb$$

Distributivité double:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Identités remarquables

Formule	Exemples	
1ère identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$	Développons $(7x+3)^2$ $= (7x)^2 + 2 \times 7x \times 3 + 3^2$ $= 49x^2 + 42x + 9$	
2ème identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$	Développons $(5x-4)^2$ $= (5x)^2 - 2 \times 5x \times 4 + 4^2$ $= 25x^2 - 40x + 16$	
3ème identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	Développons $(6x+2)(6x-2)$ $= (6x)^2 - 2^2$ $= 36x^2 - 4$	Factorisons $16x^2 - 81$ $= (4x)^2 - 9^2$ $= (4x+9)(4x-9)$

Factorisation

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.

Exemples :

$3x + xy = x\,(3+y)$

$(3x+2)(5x-1)+(3x+2)^2 = (3x+2)(5x-1+3x+2) = (3x+2)(7x+1)$

Avec les identités remarquables :

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Exemples :

$9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2$

$81x^2 - 64 = (9x-8)(9x+8)$

Résolution d'équation de degré 1 :

<u>Définition :</u> <u>Résoudre</u> une équation (ou une inéquation) d'inconnue x, c'est déterminer toutes les valeurs que l'on peut donner à x pour que l'égalité (ou l'inégalité) proposée soit vraie.

<u>Exemple 1 :</u> Résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 5x - 3 &= 2x + 9 \\ 5x - 3 \ \mathbf{-2x} &= 2x + 9 \ \mathbf{-2x} \\ 3x - 3 &= 9 \\ 3x - 3 \ \mathbf{+3} &= 9 \ \mathbf{+3} \\ 3x &= 12 \\ \frac{3x}{\mathbf{3}} &= \frac{12}{\mathbf{3}} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

<u>Rappel :</u> une égalité reste vraie si on effectue la même opérations (+ , − , × ou :) sur chacun de ses membres.

L'unique solution de l'équation est 4.

<u>Exemple 2 :</u> Résoudre l'équation produit :

$$(4x-1)(2x+6) = 0$$

Si le produit de deux facteurs est nul, alors l'un des facteurs au moins est nul. Donc :

$$\begin{array}{rclcrcl} 4x - 1 &=& 0 & \text{ou} & 2x + 6 &=& 0 \\ 4x - 1 \ \mathbf{+1} &=& 0 \ \mathbf{+1} & \text{ou} & 2x + 6 \ \mathbf{-6} &=& 0 \ \mathbf{-6} \\ 4x &=& 1 & \text{ou} & 2x &=& -6 \\ \frac{4x}{\mathbf{4}} &=& \frac{1}{\mathbf{4}} & \text{ou} & \frac{2x}{\mathbf{2}} &=& \frac{-6}{\mathbf{2}} \\ x &=& \frac{1}{4} & \text{ou} & x &=& -3 \end{array}$$

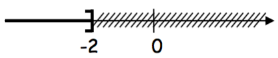
Résolution d'une inéquation de degré 1 :

Exemple 3 : Résoudre l'inéquation : $4x+2 \geq 7x-4$

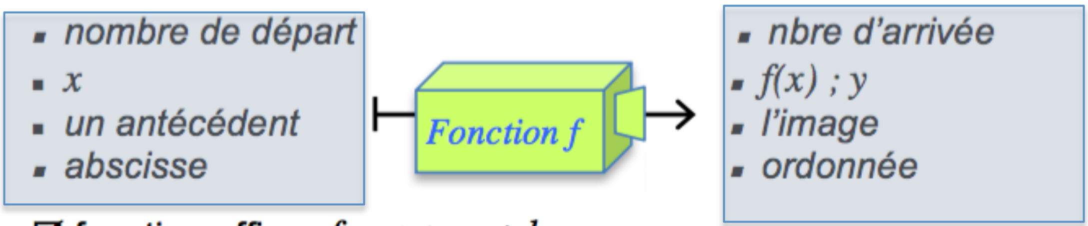
$$4x+2\ \mathbf{-7x} \geq 7x-4\ \mathbf{-7x}$$
$$-3x+2 \geq -4$$
$$-3x+2\ \mathbf{-2} \geq -4\ \mathbf{-2}$$
$$-3x \geq -6$$
$$\frac{-3x}{\mathbf{-3}} \leq \frac{6}{\mathbf{-3}}$$
$$x \leq -2$$

Rappel : les seules opérations qui changent le sens d'une inégalité sont les multiplications et les divisions par un nombre négatif (voir avant-dernière ligne) !

Les solutions de l'inéquation sont représentées sur la droite graduée ci-dessous.



Fonctions



☑ fonction affine $f : x \mapsto ax+b$

avec a ***coef. directeur*** *et b* ***ordonnée à l'origine***

☑ fonction linéaire $f : x \mapsto ax$ ☑ ft constante $f : x \mapsto b$

➔ Soit $f : x \mapsto 2x-7$ ex : $f(5) = 2\times 5-7 = 10-7 = 3$

5 a pour image 3 par f et 3 a pour antécédent 5 par f

****

Exercices d'entrainement.

Exercice 1 :

Calcule :

$A = \frac{-9}{5} - \frac{5}{7} \times \frac{-2}{21} + \frac{-11}{10}$

$B = \left(\frac{-2}{3} - \frac{3}{21}\right) \div \left(-2 + \frac{8}{9}\right)$

Exercice 2:

Écris ces nombres sous la forme d'une seule puissance.

a. $\frac{7^6}{7^2}$ $\quad 5 \times 5^4 \times 5^3 \quad 3^5 \times 9$ **c.** $\frac{20^3}{4^3}$ $\quad 2^5 \times 8^5$

b. $(-4)^3 \times (-4)^3$ **d.** 7^{4^3} $\quad (7^4)^3$

Exercice 3 :

Donne l'écriture scientifique des nombres suivants :

3 120 000 ; 0,002 54;

456,32 ; $25{,}12 \times 10^{-6}$

Exercice 5 :

Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$, a et b étant deux entiers, b positif le plus petit

$A = 5\sqrt{27} + 2\sqrt{75} - 4\sqrt{48}$

Exercice 6 :

Montrer que

$\sqrt{\frac{9}{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

Exercice 7 :

Développe et réduis les expressions suivantes :

A = $-6x(3x - 2y + 7)$

B = $12x - (5x - 6)(7x - 8)$

E= $(3x - 2)^2 + (7x + 1)(7x - 1)$

Exercice 8 :

Factorise au maximum les expressions suivantes :

C = $21a^2b - 14\,a^3$

D = $(x - 1)(2x - 7) - (5x + 8)(x - 1)$

Exercice 9 :

Résoudre l' équations et donne la solution sous forme simplifiée.

1. $2(4x - 11) - (2x + 4) = 0$
2. (3x-2)(4x+7) = 0

Exercice 10 :

Voici le tableau de valeurs d'une fonction g.

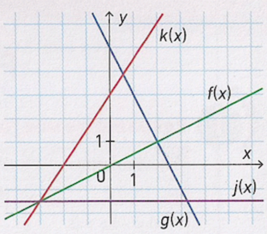
x	-5	-3	-2	1	3	6	8
$g(x)$	-9	-5	1	0	-2	-5	3

1. L'image du nombre -2 par la fonction g est : ....
2. L'image du nombre 3 par la fonction g est : ....
3. L'antécédent du nombre -2 par la fonction g est : ....
4. Les antécédents de -5 par la fonction g sont : .... et ....

Exercice 11 :

Relève les réponses sur le graphique puis complète le tableau.

Fonction	$f(x)$	$g(x)$	$j(x)$	$k(x)$
Image de 2				
Antécédent de 3				
Ordonnée à l'origine				
Coefficient directeur				
Expression algébrique				



Exercice 12

On a représenté en bleu la fonction f telle que $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$

et en rouge la fonction g telle que $g(x) = -1{,}5x - 2$.

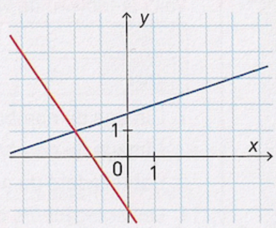
1. Écris la solution des équations :

$\frac{x}{3} + \frac{5}{3} = 3$: ....

$\frac{x}{3} + \frac{5}{3} = -1{,}5x - 2$: ....

2. Écris la solution de l'inéquation :

$-1{,}5x - 2 \geqslant 1$: ....



Solutions

Exercice 1 :

$A = \frac{-9}{5} + \frac{7\times 2}{5\times 3\times 7} + \frac{-11}{10}$ $\qquad B = \left(\frac{-2\times 7}{3\times 7} + \frac{-3}{21}\right) \div \left(\frac{-2\times 9}{9} + \frac{8}{9}\right)$

$A = \frac{-9\times 6}{5\times 6} + \frac{2\times 2}{15\times 2} + \frac{-11\times 3}{10\times 3}$ $\qquad B = \left(\frac{-17}{21}\right) \times \left(\frac{-9}{10}\right)$

$A = \frac{-54}{30} + \frac{4}{30} + \frac{-33}{30} = \frac{-83}{30}$ $\qquad B = \frac{17\times 3\times 3}{7\times 3\times 10} = \frac{51}{70}$

Exercice 2 :

a. Ce sont des puissances d'un même nombre : $\frac{7^6}{7^2} = 7^{6-2} = 7^4$

$5 \times 5^4 \times 5^3 = 5^{1+4+3} = 5^8$ $\qquad 3^5 \times 9 = 3^5 \times 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$.

b. Il y a deux façons possibles de calculer :
$(-4)^3 \times (-4)^3 = 16^3$ ou $(-4)^3 \times (-4)^3 = (-4)^6$.

c. Ce sont des puissances de même exposant :

$\frac{20^3}{4^3} = \left(\frac{20}{4}\right)^3 = 5^3$ $\qquad 2^5 \times 8^5 = (2\times 8)^5 = 16^5$

d. Je calcule l'exposant 4^3 : $7^{4^3} = 7^{(4^3)} = 7^{64}$.
Je reviens à la définition : $(7^4)^3 = (7^4) \times (7^4) \times (7^4) = 7^{4+4+4} = 7^{12}$.

Exercice 3 :

$3{,}12 \times 10^6$; $\quad 2{,}54 \times 10^{-3}$

$4{,}5632 \times 10^{-2}$; $\quad 2{,}512 \times 10^1 \times 10^{-6} = 2{,}512 \times 10^{-5}$

Exercice 5 :

L'idée est de décomposer chacun des nombres 27, 75 et 48 en un produit d'un carré parfait par un autre nombre, puis d'utiliser la deuxième formule pour « casser » la racine carrée :

$$\sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = \sqrt{9}\times\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$
$$\sqrt{75} = \sqrt{25\times 3} = \sqrt{25}\times\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$
$$\sqrt{48} = \sqrt{16\times 3} = \sqrt{16}\times\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

On en déduit :

$$A = 5\times 3\sqrt{3} + 2\times 5\sqrt{3} - 4\times 4\sqrt{3}$$
$$= 15\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 16\sqrt{3}$$
$$= 9\sqrt{3}$$

Exercice 6 :

$$\sqrt{\frac{9}{7}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

Exercice 7 :

$A = -6x(3x - 2y + 7)$
$A = -6x \times 3x + (-6x) \times (-2y) + (-6x) \times 7$
$A = -18x^2 + 12xy - 42x$

$B = 12x - (5x - 6)(7x - 8)$
$B = 12x - (35x^2 - 40x - 42x + 48)$
$B = 12x - 35x^2 + 40x + 42x - 48$
$B = -35x^2 + 94x - 48$

$E = 9x^2 - 12x + 4 + 49x^2 - 1 = 58x^2 - 12x + 3$

Exercice 8 :

$C = 21a^2b - 14a^3$
$C = 7\times 3\times a\times a\times b - 7\times 2\times a\times a\times a$
$C = 7\times a\times a\times (3\times b - 2\times a)$
$C = 7a^2(3b - 2a)$

$D = (x-1)(2x-7) - (5x+8)(x-1)$
$D = (x-1)[(2x-7) - (5x+8)]$
$D = (x-1)[2x - 7 - 5x - 8]$
$D = (x-1)(-3x-15)$

Exercice 9 :

1. $2(4x - 11) - (2x + 4) = 0$
$8x - 22 - 2x - 4 = 0$
$6x - 26 = 0$
$6x = 26$
$x = 26 \div 6$
$x = \frac{26}{6}$
$x = \frac{13}{3}$

La solution est $\frac{13}{3}$.

2) $x = 2/3$ ou $x = -7/4$

Exercice 10 :

Exercice 11 :

Solution

Fonction	$f(x)$	$g(x)$	$j(x)$	$k(x)$
Image de 2	1	1	−1,5	6
Antécédent de 3	6	1	n'existe pas	0
Ordonnée à l'origine	0	5	−1,5	3
Coefficient directeur	$\frac{1}{2}$	−2	0	$\frac{3}{2}$
Expression algébrique	$f(x) = \frac{1}{2}x$	$g(x) = -2x + 5$	$j(x) = -1,5$	$k(x) = \frac{3}{2}x + 3$

Exercice 12 :

1. $\frac{x}{3} + \frac{5}{3} = 3$: d'après le graphique, 3 est l'image de 4 par f donc la solution de $\frac{x}{3} + \frac{5}{3} = 3$ est 4.

$\frac{x}{3} + \frac{5}{3} = -1,5x - 2$: les coordonnées du point d'intersection des droites qui représentent f et g sont $(-2 ; 1)$ donc la solution est −2.

2. $-1,5x - 2 \geqslant 1$: les images par la fonction g sont supérieures à 1 quand $x \leqslant -2$ donc la solution de l'inéquation est l'ensemble des nombres inférieurs ou égaux à −2.