π est irrationnel et transcendant.

Le nombre π est irrationnel, ce qui signifie qu'on ne peut pas écrire $\pi = p/q$ où p et q seraient des nombres entiers. Al-Khawarizmi, au IX^{e} siècle, est persuadé que π est irrationnel. Moïse Maïmonide fait également état de cette idée durant le XII^{e} siècle. Ce n'est cependant qu'au XVIII^{e} siècle que Johann Heinrich Lambert prouve ce résultat.

Le nombre π est même transcendant, c'est-à-dire non algébrique : il n'existe pas de polynôme à coefficients rationnels dont π soit une racine.
C'est au XIX^{e} siècle que ce résultat est démontré. En 1873, Hermite prouve que la base du logarithme népérien, le nombre e, est transcendant. En 1882, Ferdinand von Lindemann généralise son raisonnement en un théorème (le théorème d'Hermite-Lindemann) qui stipule que, si x est algébrique et différent de zéro, alors e^x est transcendant. Or $e^{i\pi}$ n'est pas transcendant (puisqu'il est égal à -1). Par contraposée, $i\pi$ n'est pas algébrique donc (comme i, lui, est algébrique) π est transcendant.
Une conséquence importante de la transcendance de π est que celui-ci n'est pas constructible. En effet, le théorème de Wantzel énonce en particulier que tout nombre constructible est algébrique. En raison du fait que les coordonnées de tous les points pouvant se construire à la règle et au compas sont des nombres constructibles, la quadrature du cercle est impossible ; autrement dit, il est impossible de construire, uniquement à la règle et au compas, un carré dont la superficie serait égale à celle d'un cercle donné.

Source : Wikipedia