

**EXERCICE 1 (4 points)**  
**Commun à tous les candidats**

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5% de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?
2. (a) On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.  
Montrer que  $X$  suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer son espérance mathématique.
- (b) On désigne par  $A$  l'événement : "aucun animal n'est malade parmi les 10".  
On désigne par  $B$  l'événement "au moins un animal est malade parmi les 10".  
Calculer les probabilités de  $A$  et de  $B$ .
3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note  $T$  l'événement "avoir un test positif à cette maladie" et  $M$  l'événement "être atteint de cette maladie".
  - (a) Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.
  - (b) Calculer la probabilité de l'événement  $T$ .
  - (c) Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

## EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

On considère l'équation (E) :

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 0$$

où  $z$  désigne un nombre complexe.

### Partie A

- (a) Montrer que (E) admet une solution réelle, notée  $z_1$ .  
(b) Déterminer les deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que, pour tout nombre complexe  $z$ , on ait :

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2i)(az + b)$$

- Résoudre (E).

### Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $1$ ,  $2 + 2i$  et  $1 - i$ .

- Représenter  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
- Déterminer le module et un argument de  $\frac{2 + 2i}{1 - i}$ . En déduire la nature du triangle  $OBC$ .
- Que représente la droite  $(OA)$  pour le triangle  $OBC$ ? Justifier votre affirmation.
- Soit  $D$  l'image de  $O$  par la rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  et de centre  $C$ . Déterminer l'affixe de  $D$ .
- Quelle est la nature de  $OCDB$ ?

**EXERCICE 3 (5 points)**  
Commun à tous les candidats

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{2}{u_n} \right)$$

1. (a) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right)$$

Étudier le sens de variation de  $f$ , et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (On prendra comme unité 2 cm).

- (b) Utiliser le graphique précédent pour construire les points  $A_0, A_1, A_2$  et  $A_3$  de l'axe  $(O; \vec{i})$  d'abscisses respectives  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$ .
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $u_n \geq \sqrt{2}$ .  
(b) Montrer que pour tout  $x \geq \sqrt{2}$ ,  $f(x) \leq x$ .  
(c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est décroissante à partir du rang 1.  
(d) Prouver qu'elle converge.
3. Soit  $L$  la limite de la suite  $(u_n)$ . Montrer que  $L$  est solution de l'équation

$$x = \frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right)$$

En déduire sa valeur.

**EXERCICE 4 (6 points)**  
Commun à tous les candidats

**Première partie**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère :

- les points  $A(0; 0; 3)$ ,  $B(2; 0; 4)$ ,  $C(-1; 1; 2)$  et  $D(1; -4; 0)$
- les plans  $(P_1) : 7x + 4y - 3z + 9 = 0$  et  $(P_2) : x - 2y = 0$ .
- les droites  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  définies par leurs systèmes d'équations paramétriques respectifs :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -8 + 2t \\ z = -10 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 7 + 2t' \\ y = 8 + 4t' \\ z = 8 - t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

	a)	b)	c)	d)
1) Le plan $(P_1)$ est :	Le plan $(ABC)$	Le plan $(BCD)$	Le plan $(ACD)$	Le plan $(ABD)$
2) La droite $(\Delta_1)$ contient :	Le point $A$	Le point $B$	Le point $C$	Le point $D$
3) Position relative de $(P_1)$ et de $(\Delta_1)$ :	$(\Delta_1)$ est strictement parallèle à $(P_1)$	$(\Delta_1)$ est incluse dans $(P_1)$	$(\Delta_1)$ coupe $(P_1)$	$(\Delta_1)$ est orthogonale à $(P_1)$
4) Position relative de $(\Delta_1)$ et de $(\Delta_2)$ :	$(\Delta_1)$ est strictement parallèle à $(\Delta_2)$	$(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ sont confondues	$(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ sont sécantes	$(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ sont non coplanaires
5) L'intersection de $(P_1)$ et de $(P_2)$ est une droite dont une représentation paramétrique est :	$\begin{cases} x = t \\ y = -2 + \frac{1}{2}t \\ z = 3t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 5t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$	$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3t \end{cases}$

### Deuxième partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère la droite  $(D)$  passant par  $A(0; 0; 3)$  et dont un vecteur directeur est  $\vec{u}(1; 0; -1)$  et la droite  $(D')$  passant par  $B(2; 0; 4)$  et dont un vecteur directeur est  $\vec{v}(0; 1; 1)$ .

L'objectif est de démontrer qu'il existe une droite unique perpendiculaire à la fois à  $(D)$  et à  $(D')$ , de la déterminer et de dégager une propriété de cette droite.

- On considère un point  $M$  appartenant à  $(D)$  et un point  $M'$  appartenant à  $(D')$ , définis par  $\overrightarrow{AM} = a\vec{u}$  et  $\overrightarrow{BM'} = b\vec{v}$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels. Exprimer les coordonnées de  $M$ , de  $M'$  puis du vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
- Démontrer que la droite  $(MM')$  est perpendiculaire à  $(D)$  et à  $(D')$  si et seulement si le couple  $(a; b)$  est solution du système :

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1 \end{cases}$$

- Résoudre ce système. En déduire les coordonnées des deux uniques points  $M$  et  $M'$ , que nous noterons ici  $H$  et  $H'$ , tels que la droite  $(HH')$  soit bien perpendiculaire commune à  $(D)$  et à  $(D')$ . Montrer que  $HH' = \sqrt{3}$  unités de longueur.
- On considère un point  $M$  quelconque de la droite  $(D)$  et un point  $M'$  quelconque de la droite  $(D')$ .

(a) En utilisant les coordonnées obtenues à la question 1., démontrer que

$$MM'^2 = (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3$$

(b) En déduire que la distance  $MM'$  est minimale lorsque  $M$  est en  $H$  et  $M'$  est en  $H'$ .