

CHAP 4. MATRICES ET PREMIÈRES OPÉRATIONS

Dans ce chapitre, nous allons introduire des objets mathématiques d'un type (presque) nouveau, à savoir les matrices. Comme bien souvent en Mathématiques, après en avoir dégagé des ensembles "sympathiques" et défini diverses opérations dessus, nous auront le droit de "faire joujou" avec ces dernières.

I. Matrices

a) Notions de matrice : définition et écriture

Définitions et notations 1. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

On appelle « *matrice* à p ligne(s) et q colonne(s) (à élément(s) dans $\mathbb{R}$) », toute famille de nombres réels (doublement) indexée sur $\llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$.

Plus concrètement, on représentera une matrice par un tableau (exclusivement composé de nombres) délimité par un couple de (grandes) parenthèses :

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,q-1} & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,q-1} & a_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,q-1} & a_{i,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p-1,1} & a_{p-1,2} & \cdots & a_{p-1,j} & \cdots & a_{p-1,q-1} & a_{p-1,q} \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,j} & \cdots & a_{p,q-1} & a_{p,q} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{j}^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ \downarrow \\ \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne} \end{matrix}$$

Concernant la disposition des nombres dans la matrice :

l'emplacement de chaque $a_{i,j}$ se repère par ses indices i et j , où i indique le numéro de sa ligne et j , le numéro de sa colonne.

On appelle alors :

- le couple (p, q) , « *format* (dans certains cours : *taille* ou *dimension*) de la matrice A » ;
- le(s) réel(s) $a_{i,j}$, « *termes* (variante : *coefficient(s)*) de la matrice A ».

On désigne généralement une matrice par une lettre en grande capitale détachée (par exemple : M). Les termes seront alors désignés par la minuscule correspondante (donc, pour notre exemple : $m_{i,j}$).

Au lieu de M , on pourra désigner la même matrice par : $(m_{i,j})$ (en toute rigueur, il faudrait écrire $(m_{i,j})_{i,j}$ et même : $(m_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$).

Exemple 1. On se donne la matrice $C \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -5 & 0 & 78 \end{pmatrix}$ qui est de format $(2, 3)$.
Ici : $c_{2,1} = -5$; $c_{1,2} = 6$; $c_{2,3} = 78$; $c_{2,2} = 0$.

b) Les ensembles $M_{p,q}(\mathbb{R})$ et égalités matricielles

Définitions et notations 2.

[hors programme]

Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

- L'ensemble des matrices de format (p, q) et à élément(s) dans $\mathbb{R}$ forment un ensemble -noté $M_{p,q}(\mathbb{R})$.

Pour la situation particulière où $p = q$, au lieu de noter l'ensemble $M_{p,q}(\mathbb{R})$, on pourra se contenter d'écrire $M_p(\mathbb{R})$.

- Dans $M_{p,q}(\mathbb{R})$, deux matrices (nécessairement de même format) sont considérées comme **égales**ssi leurs termes respectifs sont égaux.

Exemple 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -5 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -5 & 0 \\ 3 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \in M_{4,2}(\mathbb{R}) ; \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

À ce stade de l'année, il est possible que vous n'ayez pas encore appris l'existence d'un ensemble plus vaste que $\mathbb{R}$ (et qui l'englobe) : celui des nombres complexes -noté $\mathbb{C}$.

On pourra adapter les définitions : ainsi, une matrice de $M_{p,q}(\mathbb{C})$ a pour particularité d'avoir tous ses termes à **valeurs complexes**. Et ainsi de suite... Les propriétés qui suivront restent vraies si on remplace tous les " $\mathbb{R}$ " par " $\mathbb{C}$ ".

c) Matrices à profils particuliers

Définitions et notations 3.

[Matrice à **formats** particuliers]

- Pour un entier q non nul, toute matrice de format $(1, q)$ (ne comportant ainsi qu'une seule ligne) est (très naturellement) appelée *matrice (uni)ligne*.
- Pour un entier p non nul, toute matrice de format $(p, 1)$ (ne comportant ainsi qu'une seule colonne) est appelée *matrice (uni)colonne*.
- Pour un entier n non nul, toute matrice de format (n, n) (comportant ainsi autant de lignes que de colonnes) est (assez instinctivement) dite « *carrée d'ordre n* ».

Exemple 3. $\begin{pmatrix} 7 & 41 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une matrice λ *uni-colonne* ; $\begin{pmatrix} 4 & -9 & 23 \end{pmatrix}$ est une matrice λ *uniligne* ; $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice λ *carrée*.

Définitions et notations 4.

[Matrice à contenus particuliers]

- Une matrice est qualifiée de **nulle** ssi **tous** ses termes sont nuls.
Dans $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, la (seule) matrice nulle est notée $0_{p,q}$
(et dans le cas particulier d'un $\mathbf{M}_n(\mathbb{R}) : 0_n$).
- Une matrice carrée est qualifiée de **diagonale** ssi **tous** les termes **hors** de la diagonale "anti-slash" (l'anti-barre oblique "\" du clavier) sont **nuls**.
On appelle **identité**, toute matrice **diagonale** dont tous les **termes diagonaux** sont égaux à 1.
Dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, la (seule) matrice identité est notée : I_n .

Exemple 4. $0_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $0_3 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I_3 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $I_4 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices **diagonales**.

II. Opérations avec les matrices (première partie)

- a) Addition et soustraction sur l'ensemble $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

Définitions et notations 5.

On définit la « **somme** de deux matrices de même format A et B », comme la matrice notée " $A + B$ " obtenue en additionnant les termes respectifs.

Plus formellement : étant donnés deux matrices A et B d'un ensemble $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $A + B$ est la matrice $C = (c_{i,j})$ appartenant à $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et telle que :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket \times \llbracket 1;q \rrbracket : \quad c_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} a_{i,j} + b_{i,j}$$

Exemple 5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 1+(-7) \\ 0+1 & 4+0 \\ -1+0 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

Propriétés 1.

[dédiées aux additions matricielles]

Soient p et q deux entiers **naturels non nuls**.

- $\forall A, B \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R}) : \quad A + B = B + A$. [commutativité de +]
- $\forall A \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R}) : \quad A + 0_{p,q} = A$. [$0_{p,q}$ est neutre pour +]
- $\forall A, B, C \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R}) : \quad A + (B + C) = (A + B) + C$. [associativité de +]

Nous donnerons des démonstrations ainsi que des applications en exercices.
Si les mathématiciens ont repris les notation et terminologie, ce n'est pas par manque d'inspiration, mais bel et bien parce qu'elle se calcule sur l'addition "classique" des nombres réels (en effet, elle en possède les mêmes propriétés et la matrice nulle joue le même rôle que 0).

L'opération "siamoise" de l'addition étant la soustraction, nous sommes à même de la définir (n'attendez ici aucune grande révélation, juste des définitions rébarbatives).

Définitions et notations 6.

- On désigne par « matrice opposée à A », la matrice de même format notée " $-A$ " obtenue en remplaçant chaque terme par son opposé.

Plus formellement : étant donné une matrice A d'un ensemble $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, l'opposée $-A$ est la matrice $B = (b_{i,j})$ appartenant à $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et telle que :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket \times \llbracket 1;q \rrbracket : \quad b_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} -a_{i,j}$$

- On définit alors la soustraction dans un ensemble $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ainsi :

$$\forall A, B \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R}) : \quad A - B \stackrel{\text{def}}{=} A + (-B)$$

b) Multiplication mêlant réels et matrices de $M_{p,q}(\mathbb{R})$

Définitions et notations 7.

On définit le *produit* d'une matrice A par un réel k , comme la matrice notée " kA " obtenue en multipliant chaque terme de la matrice par k .

Plus formellement : étant donné un matrices A d'un ensemble $M_{p,q}(\mathbb{R})$ et un réel k , kA est la matrice $B = (b_{i,j})$ appartenant à $M_{p,q}(\mathbb{R})$ et telle que :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket \times \llbracket 1;q \rrbracket : \quad b_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} k \times a_{i,j}.$$

Exemple 6.
$$3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 & 3 \times 1 & 3 \times (-4) \\ 3 \times 0 & 3 \times 5 & 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -12 \\ 0 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriétés 2.

[dédiées aux produits "hybrides"]

Soient p et q deux entiers *naturels non nuls*.

- $\forall A, B \in M_{p,q}(\mathbb{R}), \quad \forall l \in \mathbb{R} : \quad k(A + B) = kA + kB$
[pseudo-distributivité à droite]
- $\forall A \in M_{p,q}(\mathbb{R}), \quad \forall k, l \in \mathbb{R} : \quad (k + l)A = kA + lA$
[pseudo-distributivité à gauche]
- $\forall A \in M_{p,q}(\mathbb{R}), \quad \forall k, l \in \mathbb{R} : \quad k(lA) = (k \times l)A$

Nous donnerons quelques démonstrations ainsi que des applications en exercices.

Point T.I.C.E.

Modes d'emploi pour définir une matrice et réaliser des calculs matriciels sur sa calculatrice (incluant le produit de deux matrices -que l'on définira à l'occasion d'une autre leçon).

Calculatrice T.I.

Entrer dans le mode "Matrice" puis "EDIT" puis

Saisir la taille de la matrice puis ses coefficients.

MATRIX[A] 3 x 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

MATRIX[B] 3 x 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Quittez () puis entrer à nouveau dans le mode "Matrice"

sélectionner la matrice A

et compléter la formule pour élever A au carré et faire de même pour le calcul de $A \times B$.

$[A]^{\wedge}2$

$$\begin{bmatrix} 11 & 24 & 19 \\ 10 & 29 & -5 \\ 2 & -1 & 28 \end{bmatrix}$$

$[A]*[B]$

$$\begin{bmatrix} 14 & 19 & 24 \\ 39 & 48 & 57 \\ -31 & -35 & -39 \end{bmatrix}$$

Calculatrice Casio

Entrer dans le menu puis choisir (Touche F1).

Choisir une matrice et saisir sa taille dans la fenêtre qui s'ouvre.

Dimension m x n

$$\begin{matrix} m : 3 \\ n : 3 \end{matrix}$$

Saisir ensuite les coefficients de la matrice.

A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

B

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Quitter le mode d'édition (deux fois) et taper sur la touche "Mat" () puis () puis la lettre correspondant à la matrice éditée (Ici puis pour la lettre A)

Mat $A^{\wedge}2$

$$\begin{bmatrix} 11 & 24 & 19 \\ 10 & 29 & -5 \\ 2 & -1 & 28 \end{bmatrix}$$

Mat $A \times \text{Mat. B}$

$$\begin{bmatrix} 14 & 19 & 24 \\ 39 & 48 & 57 \\ -31 & -35 & -39 \end{bmatrix}$$