Exercices du CHAP. 1

- thème : matrices et calculs (sommes ; produits hybrides réel/matrice)

► Exercice n°1 : On se donne la matrice suivante $U \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 7 & 8 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 6 & 8 & 1 \\ 9 & 7 & 1 & 5 & 9 & 1 \\ 7 & 3 & 5 & 7 & 2 & 9 \\ 8 & 6 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 9 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Quel est le format de U ?

b) Déterminer les valeurs de : $u_{5,2}$; $u_{2,5}$; $u_{4,4}$; $u_{1,5}$;
$u_{6,1}$; $u_{12-4\times 2\ ,\ 3^2-4}$; $(u_{1,3})^2$;
$u_{3,2} - u_{2,3}$; $13 \times u_{3,5} - 76$; $\sqrt{u_{4,1}+2}$.

c) Pour quels couples d'entiers $(k;l)$ a t-on : $u_{k,l} = 4$?

► Exercice n°2 : *[calculs algébriques pour des matrices]*

i) Calculer $9M - 8N$ **pour** $M = \begin{pmatrix} 17 & -22 \\ 45 & 120 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -9 & 300 \\ 73 & 14 \end{pmatrix}$,

puis pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 11 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

ii) On se place dans un $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ quelconque (avec p et q entiers non nuls).
Simplifier les expressions des matrices suivantes où D, E et F désignent trois matrices quelconques de $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

$M \overset{\text{déf.}}{=} 2D - 3E - 7D - 9E$; $N \overset{\text{déf.}}{=} 8{,}6D - 3{,}95E + 1{,}4F - 5D - 8{,}2E + 4{,}137F$;

$R \overset{\text{déf.}}{=} 23D - 17E - (72D - 89E - 31F)$; $S \overset{\text{déf.}}{=} 8(7E + 3F) - 4(F - 6D)$;

$$T \overset{\text{déf.}}{=} (6 \times 7 - 12)E \quad .$$

► Exercice n°3 : *[matrices mystères]*

À partir des seules informations données, retrouver la matrice décrite.

i) $A = (a_{i,j})_{i,j}$ de $\mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} a_{1,1} = 9 \ ; \quad a_{2,4} = 72 \ ; \quad a_{3,3} = \text{-}18 \ ; \\ \forall (i,j) \in [\![1,3]\!] \times [\![1,3]\!] : \ a_{i,j+1} = a_{i,j} + 5 \end{cases}$.

ii) $B = (b_{k,l})_{k,l}$ de $\mathbf{M}_{2,7}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (k,l) \in [\![1,2]\!] \times [\![1,7]\!] : \ b_{k,l} = k^2 - 3l + 11$.

iii) $D = (d_{i,j})_{i,j}$ de $\mathbf{M}_{5}(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} D \text{ est } \textbf{diagonale} \ ; \\ \forall i \in [\![1,5]\!] : \quad d_{i,j} \in \{ \ 1 \ ; 9 \ ; 4 \ ; 3 \ ; 5 \ \} \ ; \\ \forall i,j \in [\![1,5]\!] : \quad i < j \Longrightarrow d_{i,i} < d_{j,j} \end{cases}$.

iv) $F = (f_{i,j})_{i,j}$ de $\mathbf{M}_{4}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!] : \quad f_{i,j} = (\text{-}1)^{i+j} \times 4$.

v) $M = (m_{i,j})_{i,j}$ de $\mathbf{M}_{3}(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} a_{2,1} = 7 \ ; \quad a_{2,3} = 5 \ ; \quad a_{1,3} = \text{-}6 \ ; \\ \forall (i,j) \in [\![1,3]\!] \times [\![1,3]\!] : \ m_{j,i} = \text{-}m_{i,j} \end{cases}$.

vi) $P = (p_{i,j})_{i,j}$ de $\mathbf{M}_{6}(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} p_{1,2} = 1 \ ; \\ \forall i \in [\![1;5]\!] : \quad p_{i,1} = 1 \ ; \\ \forall j \in [\![3,5]\!] : \quad p_{1,j} = 0 \ ; \\ \forall (i,j) \in [\![2,5]\!] \times [\![2,5]\!] : \ p_{i,j} = p_{i-1,j-1} + p_{i-1,j} \end{cases}$

► Exercice n°4 : *[équations et matrices - épisode 1]*

Résoudre sur $\mathbb{R}^4$ les équations (à quatre inconnues : x, y, z et t) suivantes :

$$(E_1) : \begin{pmatrix} 9t-2 & 4x \\ 7y+10 & 2z+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 & 7x \\ \text{-}24 & 43 \end{pmatrix} \ ; \quad (E_2) : \begin{pmatrix} 3y-8 & 7t-2x \\ 5z+3t & 4x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 40 \end{pmatrix}$$