MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques

vice-rectorat de la Nouvelle-Calédonie

direction générale des enseignements

Zone Asie / Pacifique / Nouvelle-Calédonie / Polynésie Française

---

Mercredi 15 mars 2017

de 8 h à 10h (partie 1) et 10h10 à 12h10 (partie 2)

Pause de10 heures à 10h10
Confinement de 8h à 12h10
Durée : 2 x 2 heures

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices académiques »). Une pause de 10 minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices nationaux »). Les candidats sont soumis au confinement pendant la durée des épreuves.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.
Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

2ème Partie : Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Puzzle d'un disque : 1,2,4,8,16, et après ?*) et 2 (*Des rationnels en couleur*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Puzzle d'un disque: 1,2,4,8,16, et après ?*) et 3 (*Jeu de stratégie*).

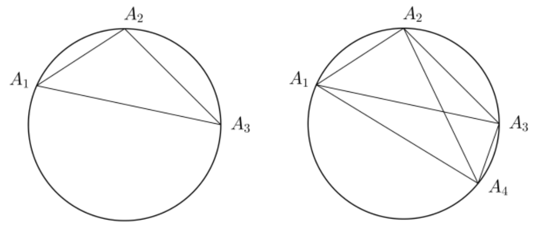
Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Puzzle d'un disque : 1,2,4, 8, 16, et après ?

On donne n points distincts $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ disposés sur un cercle. En reliant deux à deux ces points, puis en coupant selon les traits, on détermine des « morceaux de lune » (surface délimitée par un arc de cercle et la corde qui le sous-tend) et des « morceaux polygonaux », comme autant de pièces d'un puzzle. Pour l'étude qui suit, on suppose que trois cordes ne concourent jamais en un même point intérieur strictement au disque**.** Les figures ci-dessous représentent les cas $n = 3$, et $n = 4$. Le but de l'exercice est de lier le nombre P_n de pièces créées au nombre n de points placés sur le cercle.

Hâtons-nous de proclamer un résultat… faux

1. Vérifier, en recopiant ces figures, que $P_3 = 4$ et $P_4 = 8$.



2. ***a.*** Faire une figure permettant de trouver la valeur de P_5. Quelle est cette valeur ?

b. Quelle est la valeur de P_2 ? Quelle valeur attribuer à P_1 ?

3. Quel résultat imagine-t-on pour P_6 ? Faire une nouvelle figure et déterminer P_6.

4. Est-il possible, dans chacun des exemples précédents, de colorier les pièces en n'utilisant que deux couleurs, deux pièces ayant une frontière commune ne recevant pas la même couleur ? Représenter les coloriages réalisés pour $n = 3, n = 4$ et $n = 5$.

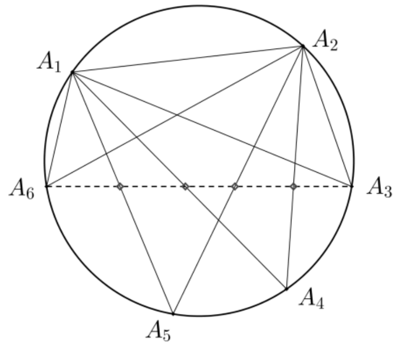
Inventaire soigné

5. ***a.*** Combien peut-on former de couples de points distincts parmi A_1, A_2, …, A_n ? Combien de cordes peut-on alors tracer dont les extrémités soient prises parmi les n points ?

b. Montrer que le nombre de triangles dont les sommets sont pris parmi A_1, A_2, …, A_n est : $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

c. On suppose que $n \geq 4$. Quatre points quelconques pris parmi A_1, A_2, …, A_n définissent six cordes dont deux ont un point d'intersection intérieur strictement au disque. Combien y a-t-il de tels points d'intersection ?

6. Dans cette question, on fait le lien entre le nombre de points d'intersection (intérieurs strictement au disque) de deux cordes et le nombre de pièces créées. On dispose les n points A_1, A_2, …, A_n sur le cercle.



a. La figure ci-contre (où $n = 6$) illustre l'effet du tracé d'une nouvelle corde (en pointillés) sur le nombre de pièces : si elle a k points d'intersection (intérieurs strictement au disque) avec les précédentes cordes, combien a-t-on de pièces de plus, en nombre ?

b. On commence sans aucune corde, et donc une seule pièce (ronde). Une première corde ne crée aucun point d'intersection et le nombre de pièces croît de 1 : il vaut 2 (deux morceaux de lune). Où en est-on à la quatrième corde ? À la cinquième ? On pourra poser k_2, k_3, k_4, k_5 les nombres de nouvelles intersections apportées par la $2^{\text{ème}}$, …, la $5^{\text{ème}}$ corde.

c. Après le tracé de la dernière corde, combien de points d'intersection a-t-on créés en tout ?

d. Conclure finalement que la relation liant le nombre de points et le nombre de pièces est :

$$P_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

7. ***a.*** Retrouver à l'aide de cette formule les résultats obtenus plus haut.

b. Y a-t-il d'autres valeurs de n pour lesquelles P_n est une puissance de 2 ? Donner le plus petit n supérieur à 5 pour lequel cette coïncidence se produit.

8. Exposer un algorithme permettant de colorier chaque pièce en noir ou en blanc, deux pièces ne recevant pas la même couleur si elles ont une frontière commune.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Des rationnels en couleur

On rappelle qu'un nombre rationnel positif est le quotient d'un entier naturel par un entier naturel non nul. Pour tout rationnel x, il existe un entier naturel a et un entier naturel b non nul tels que $x = \frac{a}{b}$. Par exemple, $x = \frac{12}{431}$ est un rationnel positif.

On admet qu'on peut attribuer sans ambiguïté une couleur, rouge ou vert, à chaque rationnel positif en suivant les règles suivantes :

- le rationnel 1 est vert ;
- pour tout rationnel x, x et $x+1$ ne sont pas de la même couleur ;
- pour tout rationnel non nul x, x et $\frac{1}{x}$ sont de la même couleur.

Par la suite, on notera $x \sim y$ lorsque x et y sont de la même couleur et $x \nsim y$ lorsque x et y ne sont pas de la même couleur. Par exemple, $14 \nsim 15$ et $14 \sim \frac{1}{14}$.

Comment annoncer la couleur

1. Déterminer la couleur de chacun des nombres suivants : 2, 0, 17, 2 017, $\frac{1}{2}, \frac{1}{18}, \frac{1}{2\,017}, \frac{5}{2}, \frac{13}{4}$.

2. Soit n un entier naturel non nul. Quelle est la couleur de n (et de $\frac{1}{n}$) ?

3. Pour déterminer la couleur d'un rationnel $\frac{a}{b}$, on utilise le *premier algorithme* ci-contre (les mentions **Étape 1** et **Étape 2** sont des **commentaires**).

a. Après une **Étape 1**, est-on sûr que $\frac{a}{b} \sim \frac{r}{b}$? $\frac{a}{b} \nsim \frac{r}{b}$?

b. Justifier que ce *premier algorithme* termine.

c. En fin de boucle, la couleur de a est-elle la couleur de la fraction $\frac{a}{b}$ du départ ? Comment la reconstituer alors ?

4. ***a.*** En s'aidant du *premier algorithme*, donner la couleur du rationnel $\frac{431}{12}$.

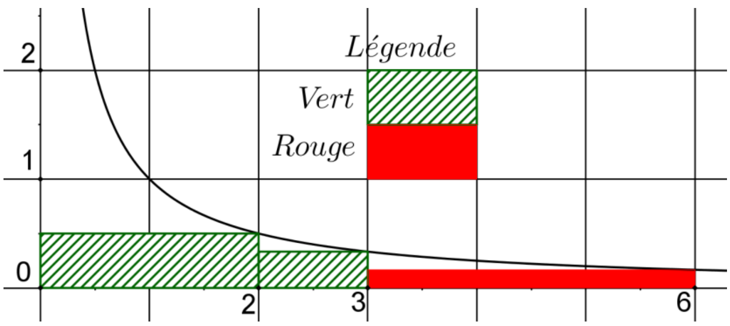
b. Quelle est la couleur de $\frac{403}{2017}$?

c. Rédiger l'**Étape finale** de *l'algorithme modifié* de sorte qu'il renvoie la couleur de $\frac{a}{b}$

Premier algorithme
▪ $r \leftarrow a$ ▪ Tant que $b \neq 0$ ▫ **Étape 1** : calculer q et r entiers tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$ en effectuant la division euclidienne de a par b. ▫ **Étape 2** : Faire $a \leftarrow b, b \leftarrow r$

Algorithme modifié
▪ $r \leftarrow a$; $résultat \leftarrow 0$ ▪ Tant que $b \neq 0$ ▫ Calculer q et r entiers tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$ ▫ $résultat \leftarrow résultat + q$; ▫ Faire $a \leftarrow b; b \leftarrow r$; ▪ **Étape finale…**

Qu'il était vert, mon escalier



Sous la courbe représentative de la fonction f qui à tout réel strictement positif x associe son inverse $\frac{1}{x}$, on dessine un escalier dont les marches sont délimitées en abscisse par divers entiers naturels. Chaque marche est ensuite coloriée avec la couleur du rationnel égal à son aire. La figure ci-contre correspond aux abscisses 0, 2, 3, 6.

5. *Escalier arithmétique* Les marches de cet escalier sont délimitées par tous les entiers : 0, 1, 2, 3, … Quelles sont les couleurs de ses marches successives ?

6. *Escalier quadratique* Les marches de cet escalier sont délimitées par les carrés des entiers : 0, 1, 4, 9, 16,… Quelle est la couleur de la marche qui contient le point de coordonnées (2 017, 0) ?

7. *Escalier géométrique* On se donne un entier q strictement supérieur à 1 et on construit l'escalier dont les marches sont délimitées par 0, 1 et les puissances de q : $q, q^2, q^3, \ldots$ Est-il possible de choisir q de sorte que cet escalier soit entièrement vert ?

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Jeu de stratégie

Asmaa et Benjamin jouent à un jeu dont voici les règles :
Un nombre entier N supérieur ou égal à 3 est donné.
Chacun annonce à son tour un nombre entier compris entre 1 et N, 1 et N compris.
- *Règle 1* : Un joueur ne peut pas réutiliser un nombre entier qui a déjà été annoncé par lui-même ou par son adversaire ;
- *Règle 2* : Un joueur ne peut pas annoncer un nombre entier inférieur ou supérieur de 1 à un nombre qu'il a déjà annoncé lui-même lors de cette partie.

La partie s'arrête lorsque :
- Tous les nombres entiers compris entre 1 et N ont été annoncés et la partie est alors déclarée nulle ;
- Il reste des nombres entiers non annoncés mais le joueur qui a la main ne peut pas les annoncer à cause de la seconde règle. Ce joueur a alors perdu la partie.

C'est toujours Asmaa qui commence à jouer. On pourra noter *A* pour Asmaa et *B* pour Benjamin.

Par exemple : *N* = 6 :

Un exemple de partie nulle :
- *A* annonce 3 ;
- *B* annonce 2 ;
- *A* annonce 5 ;
- *B* annonce 4 ;
- *A* annonce 1 ;
- *B* annonce 6 ; Égalité.

Un exemple de partie où *A* perd :
- *A* annonce 3 ;
- *B* annonce 1 ;
- *A* annonce 6 ;
- *B* annonce 5 ;
- *A* ne peut annoncer ni 2, ni 4; *A* a perdu.

On étudie dans la suite quelques situations. On prendra garde au fait que, par exemple, « ne pas perdre » signifie gagner ou faire partie nulle. On rappelle que c'est toujours Asmaa qui commence.

1. Pour $N = 3$, donner un exemple de stratégie gagnante pour Benjamin (c'est-à-dire telle que Benjamin gagne quoi que joue Asmaa).

2. On s'intéresse au cas où $N = 4$.
a. Proposer un exemple de partie que Benjamin gagne.
b. Étude du jeu
(i) Asmaa dit : « Je joue 1 et, je ne peux pas perdre ». Pourquoi ?
(ii) Asmaa commence par 2, alors Benjamin dit : « Je vais gagner ! ». Quelle est la stratégie de Benjamin ?
(iii) Asmaa peut-elle, en jouant bien, être sûre de gagner ?

3. Donner un exemple de partie nulle pour un entier N quelconque supérieur ou égal à 3.

4. On s'intéresse au cas où $N = 5$.
a. Asmaa commence par annoncer 5. Montrer qu'en jouant 1, Benjamin gagne à coup sûr.
b. En déduire que, pour $N = 5$, quel que soit le nombre choisi par Asmaa au premier coup, il existe un nombre que Benjamin peut choisir au deuxième coup pour être certain de gagner.

5. On s'intéresse au cas où $N = 7$, le jeu commence par *A* : 1 puis *B* : 7. Donner une stratégie gagnante pour Benjamin.

6. On suppose que N est impair, et on pose $N = 2p - 1$. Asmaa joue un entier m, différent de p. Benjamin joue $2p - m$. Il pense gagner en jouant systématiquement par la suite le complément à $2p$ du dernier choix d'Asmaa.

A-t-il raison ?