**Les Suites numériques réelles** Terminale S

I ] Suites arithmético-géométriques

Ce sont des suites définies par : **un+1 = a un + b** et par la donnée du premier terme u0.

* 1. Pour les exemples suivants, tracer dans un repère orthonormal, "le chemin de la suite" et observer la convergence éventuelle :

  

* 1. Si a = 0 , la suite est stationnaire à partir du rang 1 et est égale à b.
  2. Si a = 1 : **un+1  = un + b** : cas d'une **suite arithmétique** où on obtient un terme en ajoutant au précédent une constante b appelée raison. Alors

un = u0 + n b ou un = u1 + (n-1) b ; up = uq + (p-q)b

**Somme des premiers termes d’une suite arithmétique :**



*On peut aussi retenir :*

Propriété : Pour démontrer qu'une suite (un) est arithmétique, il faut que **un+1 – un soit une constante.**

Exercice 1 : u est la suite de réels strictement positifs définie par u0= 1 et un+1 = . v est la suite définie par vn = 1/ un.

1. Calculer u1 , u2 , u3 ,u4 puis v0 , v1 , v2 , v3 et v4 .
2. Démontrer que v est une suite arithmétique.
3. En déduire vn puis un en fonction de n.
4. Justifier le sens de variation de la suite v.

Exercice 2 : Calculer la somme des 100 premiers entiers naturels pairs non nuls.

* 1. Si b = 0 : **un+1= a un** : cas d'une **suite géométrique** où on obtient un terme en multipliant le précédent par une constante a appelée raison. Alors un = u0 an ou un = u1 an-1

up = uq ap – q

**Somme des premiers termes d’une suite géométrique :**



*On peut aussi retenir :*

Propriété : Pour démontrer qu'une suite (un) est géométrique, il faut que **un+1 = q un** (ou bien que si un0, alors un+1 ÷ un soit une constante).

Propriété : Toute suite géométrique de raison q avec < 1 , converge vers 0 .

Exercice 3: u est la suite définie sur  par un = .

1. Démontrer que u est une suite géométrique.
2. Justifier le sens de variation de la suite u.

Exercice 4 : Calculer S = 2 + 4 + 8 + ……..+ 256

* 1. Si a  1 et b 0, pour calculer le terme général de  de façon explicite en fonction de n, on se ramène au cas de la suite  définie par : vn = un -  avec  (=a+b) une constante réelle telle que la suite soit géométrique. On en déduira alors vn, puis un en fonction de n.

Exercice 5 : On considère la suite définie par u0 = 5 et un+1 = 2 un -3.

Montrer que la suite définie par vn = un – 3 est une suite géométrique dont vous exprimerez le premier terme et la raison. En déduire une expression de vn, puis un en fonction de n.

## II ] Convergence

1. **Théorème des gendarmes** : (admis) soit  un triplet de suites telles que les suites  et  convergent vers la même limite l et vérifient , pour n assez grand , les relations . Alors la suite  converge aussi vers l .

**Corollaire** : Si  diverge vers + ,  aussi . Si  diverge vers - , aussi.

**Propriétés** : Toute suite arithmétique de raison r > 0 est croissante et diverge vers + .

Toute suite arithmétique de raison r < 0 est décroissante et diverge vers - .

Toute suite géométrique de raison q avec < 1 , converge vers 0 .

1. **Propriétés** ( admises) :
   1. Si une suite croissante est majorée par M , alors elle est convergente vers L et LM.
   2. Si une suite décroissante est minorée par m , alors elle est convergente vers L et Lm.
2. **Propriété** : (démontré dans le chapitre des limites)
   1. Une suite croissante non majorée diverge vers + .
   2. Une suite décroissante non minorée diverge vers - .

Exercice 6 : On considère la suite (u) définie sur par : u0 = 10 000 et un+1 = 0,8 un + 5 000.

1. Calculer u1, u2 et u3.
2. Démontrer par récurrence que (u) est majorée par 25 000.
3. Démontrer que la suite (u) est croissante.
4. Etudier la convergence de la suite (u) et en déduire sa limite.

## III ] Suites adjacentes

1. **Définition :** Deux suites  et  sont dites **adjacentes** si :
   1. La suite  est croissante .
   2. La suite est décroissante.
   3. La suite  converge vers 0.
2. **Théorème** (A démontrer) ROC : Deux suites adjacentes ont la même limite.

Exercice 7 : Soient les suites u, v , w et t définies par : u0 = 2 , v0 = 3 , un+1 =  , vn+1 =  ,

wn = vn – un et tn = un + vn .

a) Montrer que la suite w est géométrique.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, wn > 0 .

c) Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

d) Montrer que la suite t est constante et en déduire la limite commune des suites u et v.