**Lois de Probabilité continues (ou à densité)** Term S

**I – Introduction**

Il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d’un intervalle de  (borné ou non). On dit alors que la variable est **continue**. On s’intéresse à des événements du type : « X est compris entre les réels a et b » soit « a **** X **** b ».

*Exemples :* le temps d’attente à un arrêt de bus, la durée de vie d’un transistor, la distance du point d’impact au centre d’une cible ………… .

**Loi de probabilité continue**

**Définition : *f* est une fonction continue, positive sur un intervalle I = [a ; b] ou I = [a ; +[. Soient c et d deux réels de I tels que c ** **d.**

**Dire que *P est la loi de probabilité sur I de densité f* ( ou *f* = densité de probabilité ) signifie que :**

**Si I = [a ; b],  et .**

**Si I = [a ; + [, ,  et .**

**Remarque :**  est aussi noté P(a **** X **** b) et est noté P(X  c).

**Propriétés :**

1. La probabilité de la réunion d’un nombre fini quelconque d’intervalles de I disjoints deux à deux est égale à la somme des probabilités de ces intervalles.

Ainsi, si J I , K I et J  K = , alors .

1. La probabilité que X prenne une valeur isolée de I est nulle. En effet, pour tout réel a de I : .
2. On en déduit que, pour tous réels a et b de I, avec a **** b :, etc.
3. Si  désigne le complémentaire de  dans I, alors .
4. Si J et K sont des intervalles inclus dans I avec , alors .

Exercice 1 : On considère la fonction *f* définie sur  par : 

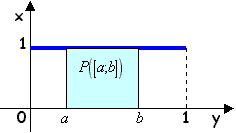
1. Démontrer que *f* est une densité de probabilité.

2. Calculer P(X t) pour t > 0.

3. Déterminer la probabilité P (-5 < X < 10)

4. Déterminer le réel t > 0 tel que P(X  t ) = 0,8.

**II – Loi Uniforme**

**Définition :On appelle *loi uniforme sur [0 ; 1]* la loi de probabilité dont la densité *f* est la fonction constante égale à 1 sur [0 ; 1].**

#### **Théorème :** Si est la loi uniforme sur alors, pour tous réels et de avec  : on a

#### Propriétés : • Soit la loi uniforme sur .

#### Si et sont des sous-intervalles de de même amplitude alors .

• Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur alors on admet que E(X)=1/2 et V(X)=1/12

**Généralisation** : loi uniforme

**Th et Def :** On appelle **loi uniforme** sur l’intervalle [a ;b] de , la loi de probabilité continue sur I dont la densité est la fonction constante *f* définie par : *f*(*x*) =  . Pour cette loi, la probabilité d’un intervalle [α ; β] inclus dans [a ;b] est égales à , on a : ***p* (**[α ; β]  **) =  = **

Exercice 2 : On choisit un nombre réel λ au hasard dans [0 ; 4]. Quelle est la densité de probabilité de cette loi uniforme ?

Quelle est la probabilité de l’événement : le nombre choisi appartienne à [1,5 ; 2,8 ] ?

Déterminer p() lorsque 0   4

Exercice 3 : Le bus passe toutes les quinze minutes à un arrêt précis. (Il passe à 7h , 7h15 et 7h30). Un usager se présente à cet arrêt entre 7h et 7h30. La variable aléatoire sera l’heure exacte de son arrivée à cet arrêt, uniformément répartie sur l’intervalle [0 ;30].

Quelle est la probabilité que l’usager attende moins de cinq minutes le prochain bus ?

Quelle est la probabilité qu’il attende plus de 10 minutes ?