**Lois de probabilité discrètes** Terminale S

**I – Dénombrement**

## Exercice 1 : Nombre de codes d’immeubles : 4 chiffres suivis d’une lettre choisie entre A ou B.

Nombre de combinaisons distinctes d’un code de coffre-fort de trois roues crantées de 0 à 9.

**1. factorielle**

E est un ensemble fini et on note *n* son cardinal : Card(E) = *n*.

**On appelle Permutation sur E toute *n*-liste des éléments de E.**

Par exemple, si E = {a ; b ; c ; d} , une permutation de E est (a ; b ; d ; c)  ou (b ; a; d ; c).  
En revanche (a ; b; c ; c) n'est pas une permutation de E car l'élément "c" apparait 2 fois.  
Une permutation de E est donc un élément de En dont lequel chaque élément de E apparait une et une seule fois.

**Le nombre de permutations d'un ensemble ayant *n* éléments est : n x (n - 1) x (n - 2) x ... x 2 x 1.**

**Définition** : Si n est un entier strictement positif, on appelle ***factorielle de n*** (ou ***n factorielle***) le nombre noté **n!** égal au produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n.

**n! = n x (n - 1) x (n - 2) x ... x 2 x 1**  Par convention, on posera 0! = 1. 1 ! = 1

**Propriétés** : (n+1) ! = (n+1) n ! et 

Exemple : Dans une salle contenant 20 personnes, on veut faire sortir les personnes les unes après les autres. Ceci correspond à classer les personnes de la première à la vingtième. Il y a donc 20! façons de faire sortir les 20 personnes, c'est à dire 2 432 902 008 176 640 000 façons.

Exercice 2 : Avec les chiffres 1 ; 2 ; 3 ...; 9 , on veut écrire tous les nombres possibles en utlisant tous ces chiffres une et une seule fois. Combien y-a-t-il de nombres possibles ?

**2. combinaison**

E est un ensemble fini de cardinal *n* : Card(E) = *n.*  
Pour *p* entier appartenant à {0 ; 1 ; 2 ; ... ; *n*}, on note Ep l'ensemble des parties de E ayant exactement *p* éléments distincts.

**a) Définition:** On appelle ***Combinaison*** de ***p* éléments pris parmi les *n* éléments** de E tout choix de p éléments de E, sans ordre et sans remise. (= simultanément) Cela correspond donc au choix d'une partie de E ayant p éléments, ou d'un sous-ensemble de E à p éléments. C'est donc un élément de Ep.

Par exemple, si E = {1 ; 2 ; 3 ; 4}, choisir une Combinaison de 2 éléments parmi les 4 éléments de E, c'est choisir un de des ensembles suivants:   {1;2}   ou  {1;3}  ou  {1;4}  ou  {2;3}  ou {2;4}  ou  {3;4}

**Nombre de Combinaisons à p éléments dans un ensemble à n éléments:**  
Pour p quelconque compris entre 0 et n, on note  « on lit p parmi n » ou  le nombre de Combinaisons de p éléments parmi les n éléments de E.  Ce nombre correspond au cardinal de Ep.

On a 

b) **Propriétés :**

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

•  = 1 •  = 1 •  = n •  = n

•  = 0 lorsque p > n •  =  (0  p n)  **ROC**

•  +  =  (1  p  n) **ROC**

c**)** Exercice 3 : Pour remplir une grille de loto, il faut cocher 6 cases sur 49. Sachant que l'on met 10 secondes pour remplir une grille, combien de temps faudrait-il pour remplir toutes les grilles différentes possibles.

**3. Triangle de Pascal**

L'idée du triangle de Pascal est de présenter les  ou  sous forme de tableau à double-entrées.  
En colonne, les valeurs de p  et  en ligne les valeurs de n.  
Les colonnes et les lignes sont numérotées à partir de 0, et la case correspond à la p-ème colonne et n-ème ligne est le coefficient  ou . Or les formules précédentes montrent deux choses.  
1: Il y a une symétrie dans ce tableau car  =    
2: Si on connait les éléments de la ligne (n-1), on connait automatiquement ceux de la ligne n par la formule  +  =  D'où le Triangle de Pascal:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |  | **p-1** | **p** |
| **0** | **1** | **0** |  |  |  |  |  |  |
| **1** | **1** | **1** | **0** |  |  |  |  |  |
| **2** | **1** | **2** | **1** | **0** |  |  |  |  |
| **3** | **1** | **3** | **3** | **1** | **0** |  |  |  |
| **4** | **1** | **4** | **6** | **4** | **1** |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **n-1** |  |  |  |  |  |  | **cnp** | **cnp1** |
| **n** |  |  |  |  |  |  |  | **cnp2** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Exercice 4 : Développer (a + b)2 ; (a + b)3 ; (a + b)4. Écrire les résultats en utilisant les nombres  .

**4 Formule du binôme de Newton : ROC**

pour tout n  IN\* , pour tout a  CI et pour tout b  CI

(a + b)n =  an b0 +  an-1 b1 + +  an-p bp + +  a0 bn 

Cette formule, valable pour des nombres réels, est bien entendu valable pour des nombres complexes.

Exercice 5 : En utilisant la formule du binôme de Newton, développer  et (1-2i)3

**II – Lois de probabilité discrètes**

Dans toutes les situations étudiées jusqu’à présent, la variable aléatoire X prend un nombre fini de valeurs. On dit que X est **discrète**.

**1. Loi de Bernoulli**

**Définition :Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues appelées succès (noté S ou 1 ) et échec (noté  ou 0 ), de probabilités respectives p et 1 – p.**

**La loi de probabilité est appelée *loi de Bernoulli* de paramètre p.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **issue** | S (1) | (0) |
| **probabilité** | p | 1 – p |

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de bernoulli est telle que : E(x) = p et V(x) = p(1-p)

Exercice 6 :Une urne contient 70 boules rouges et 30 boules noires. On tire au hasard une boule de l’urne. Expliquer pourquoi cette expérience est une épreuve de Bernoulli. On appelle succès « le tirage d’une boule rouge ». Donner la loi de probabilité.

**2. Loi binomiale**

**Définitions :** a) Un *schéma de Bernoulli* est la répétition d’épreuves de Bernoulli **identique**s dans des conditions d’**indépendance**.

1. Un schéma de Bernoulli est constitué de n épreuves indépendantes. X est la variable aléatoire qui, à chaque liste de n résultats, associe le nombre de succès.
2. **La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée *loi binomiale de paramètre n et p*. Cette loi est notée B (n ; p).**

**Propriétés :a)** **Pour tout entier k, avec 0  k ** **n, .**

1. **L’espérance mathématique est  et la variance .**(Propriétés admises)

Exercice 7 **:** On reprend l'exercice précédent et on réalise de manière indépendantes 10 expériences. Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de boules rouges obtenues après les 10 expériences. Justifier la loi de probabilité de X. Calculer P(X=7) ; P(X=0) ; P(X 2) ; E(X) et interpréter.