**Droites et plans dans l'espace** Terminale S

**I – Représentations paramétriques d’une droite dans l’espace**

L’espace est muni d’un repère orthonormé .

1. **Représentations paramétriques d’une droite**

La droite (D) passant par A(*x*A ; *y*A ; *z*A) et de vecteur directeur  est l’ensemble des points M( *x* ; *y* ; *z*) tels que : 

Le système (S) est appelé **une représentation paramétrique** de la droite (D) dans le repère  et on dit que t est **le paramètre.**

Exercice 1 : Donner une représentation paramétrique de la droite passant par les points A ( -1 ; 2 ; -3) et B ( 1 ; -1 ; 1 ) . Le point C (1 ; 2 ; 3 ) appartient-il à la droite (AB) ?

**Dans l’espace, deux droites peuvent être**:

* Coplanaires (strictement parallèles, ou confondues, ou sécantes)
* Non coplanaires

**Définition et propriété**: Deux droites (d) et (d’) de l’espace sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs  et sont orthogonaux 

**Définition et propriété**: Deux droites (d) et (d’) de l’espace sont perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et coplanaires (donc ont un point commun).

Exercice 2 : Considérons les droites : (d)  et (d’) .

Étudier l’intersection des deux droites (d) et (d’), si elle existe. Sont-elles perpendiculaires ?

**Dans l’espace, une droite (d) de vecteur directeur**  **et un plan (P) de vecteur normal** **peuvent être**:

* Strictement parallèles (  et aucun point en commun)
* La droite (d) est incluse dans le plan (P) ( et un point en commun)
* Sécantes 

Cas particulier : Propriété : Une droite (d) est orthogonale à un plan (P) si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan (P) ; donc si et seulement si son vecteur directeur et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (P).

Exercice 3 : Déterminer l'intersection de la droite (d) :  et du plan (P) : x + 2y - 3z + 4 = 0

1. **Représentations paramétriques d’un segment, d’une demi-droite**

A et B sont deux points distincts de l’espace et on note . L’appartenance d’un point M au segment [AB] ou bien à la demi-droite [AB) s’obtient en adaptant l’énoncé de la conclusion ci-dessus :

1. pour le segment, il suffit de remplacer dans le système (S) : «  » par «  ».
2. pour la demi-droite [AB), il suffit de remplacer dans le système (S) : «  » par «  »

**II – Intersections de droites et de plans**

1. **Intersection de deux plans (P1) et (P2)**
   1. **Le point de vue géométrique**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (P1) et (P2) confondus | (P1) et (P2) strictement parallèles | (P1) et (P2) sécants |
| (P1) = (P2) | (P1)  (P2) | (d)  (P2)  (P1) |

* 1. **Le point de vue algébrique**

Deux plans d'équations ax + by +cz + d = 0 et a'x + b'y +c'z + d' = 0 sont parallèles lorsque leurs vecteurs normaux sont colinéaires, c'est-à-dire lorsque les triplets (a ; b ; c) et (a' ; b' ; c') sont proportionnels.

Une droite pourra être définie par intersection de deux plans, c'est-à-dire par un système de deux équations cartésiennes :  avec (a ; b ; c) et (a' ; b' ; c') non proportionnels.

Exercice 4 : Considérons les plans d’équations :

.

Démontrer que les deux plans sont sécants.

Donner une représentation paramétrique de la droite (d), intersection de ces deux plans.

1. **Intersection d’un plan (P) et d’une droite (d)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **(d) est contenue dans (P)** | **(d) est strictement parallèle à (P)** | **(d) et (P) sont sécants en un point** |
| (P)    (d) | (P)  (d) | (P)  (d)  x  A |

**Propriété** :Le plan (P) d'équation ax + by + cz +d = 0 et la droite (d) passant par un point A et de vecteur directeur  sont sécant si le vecteur normal du plan (P) n'est pas orthogonal au vecteur directeur de (d) donc si  c'est à dire si 

Exercice 5 : Dans un repère orthonormé  le plan (P) a pour équation : 5x + y − z + 3 = 0 et la droite (d) pour représentation paramétrique : t ∈  .

Étudier position de la droite (d) et du plan (P).

**III - Intersection de trois plans**

1. **Le point de vue géométrique**

(P), (Q) et (R) sont trois plans de l’espace.

Soit : **ils n'ont aucun point commun ( 3 cas)** (3 parallèles, 2 parallèles et 1 sécant ; sécants 2 à 2);

Soit

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Ils ont un seul point commun** | **Leur intersection est une droite** | **Leur intersection est un plan** |
| A  (Q)    (P)  (d)  (R) | (R)  (Q)  (d)  (P) |  |

L'intersection de trois plans peut être : l'ensemble vide, un point, une droite ou un plan.

(On pourra déterminer ces intersections en écrivant les systèmes formés avec les équations cartésiennes des plans.)

1. **Le point de vue algébrique**

Dans un repère orthonormé , les plans (P), (Q) et (R) ont respectivement pour équations cartésiennes , où a, b, c puis a’, b’, c’ puis a’’, b’’, c’’ ne sont pas tous les trois nuls. Pour étudier l’intersection des trois plans, on peut résoudre le système : . Ce système, d’après le point de vue géométrique, a soit aucun triplet solution, soit un triplet solution, soit une infinité de triplets solutions.

Exercice 6 : Dans un repère orthonormé , le plan (P) a pour équation : , le

plan (Q) a pour équation : , le plan (R) a pour équation : .

Étudier l’intersection de ces trois plans.