**Dérivation**  Terminale S

**I ] Nombre dérivé**

1. **Nombre dérivé :**

**Définition** : *f* est une fonction définie sur un intervalle I. Soient a et (a+ h) deux élements de I ( h réel quelconque non nul) . La fonction *f* est dérivable en a lorsque le **taux de variation de *f* entre *a* et *a+h*** tend vers **un nombre réel L** , c'est-à-dire  = L .

**Cette limite est le nombre dérivé en *a*, on le note *f* ' ( a )**

On a aussi *f* ' (a ) = .

Le taux de variation de la fonction *f* entre a et a+ h (appelé aussi taux d'accroissement) représente le coefficient directeur de la sécante à la courbe de *f* aux points (a ; *f*(a)) et (a+h ; *f*(a+h))

Remarques : Si est un nombre réel L , on dit que la fonction *f* est dérivable à droite en a et que L est le nombre dérivé à droite de *f* en a . *f*d' ( a). La courbe représentative de *f* a alors une demi-tangente de coefficient directeur L en A(a ; *f*( a ))

(Propriété similaire avec une limite à gauche et un nombre dérivé à gauche)

**Pour qu'une fonction *f* soit dérivable en a, il faut qu'elle soit dérivable à gauche et à droite en a et que les nombres dérivés à gauche et à droite soient égaux.**

Exercice 1 : Déterminer le nombre dérivé de *x* 2*x*2 +1 en 2.

Exercice 2 : Démontrer que la fonction *x*  n’est pas dérivable en 5.

1. **Application graphique : Equation de tangente**

**Définition** : La courbe représentative de *f* a pour **tangente** en A(a ; f( a )) la droite (T ) de **coefficient directeur *f* ' ( a ).**  alors **( T) a pour équation *y* = *f* ' ( a ) (*x* – a) + *f* ( a) .**

Cas particulier: Si *f* ' (a) = 0, ( T ) est parallèle à l'axe des abscisses (horizontale).

Exercice 3:Déterminer la tangente à la courbe représentative de *f*:*x* 2*x*2 +1 au point d’abscisse 2.

1. **Application numérique : Approximation affine :**

Si *f* est dérivable en a, on peut écrire ***f*(a + h) = *f*( a ) + *f* ' ( a ) . h + h ε(h)**

ε étant une fonction de limite 0 en 0.

**On dit que *f*( a ) + *f* ' ( a ) . h est une approximation affine locale de *f*(a + h)** . Localement, on peut remplacer la fonction *f* par la fonction affine représentée par la tangente (T), c'est à dire qu'on peut remplacer *f*(*a* + *h*) par *f*(*a*) + *hf* '(*a*) lorsque *h* est voisin de zéro.

(On peut même démontrer que c'est la "meilleure" approximation affine de *f*( a + h) )

Exercice 4 : Soit la fonction *f* telle que *f*(1)=0 et *f* '(*x*) = 2*x*. Calculer une valeur approchée de *f*(1,2) puis de *f*(1,4).

1. Propriété A démontrer

**Une fonction dérivable en *a* est continue en *a*.** (La réciproque est fausse)

Application : tout fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

**II ] Fonction dérivée**

1. **Définition :**

Si une fonction *f* est dérivable en tout point a d'un intervalle I, on dit que *f* est dérivable sur I.

L'application qui à tout *x* de I associe le nombre dérivé de *f* au point *x* est appelée **fonction dérivée** de *f*.

La fonction dérivée de *f* est notée *f* '.

Remarque:Si la fonction f ' est elle-même dérivable sur I, la dérivée de f ' sera notée f " ou f(2) , on l'appelle dérivée seconde de f.

On peut ainsi, par itérations, définir si elle existe la dérivée d'ordre n de *f* que l'on notera  *f*(n).

1. **Ecriture différentielle :**

Si *f* est dérivable en *x*, on peut écrire ***f*(*x* + h) = *f*(*x*) + *f* ' (*x*) × h + h ε(h) avec .**

c'est-à-dire *f*(*x* + h) - *f*(*x*) = *f* ' (*x*) × h + h ε(h)

En prenant pour h un petit accroissement de *x*, noté *x*, et en notant *y* l'accroissement de *f* correspondant, on peut écrire *y* = *f* ' (*x*) *x* + *x* ε(*x*) . On a donc ***y*  *f* ' (*x*)** ***x***

On utilisera alors parfois la **notation différentielle** : **d*y* = *f* '(*x*) d*x*** ou encore *f* '(*x*) =  .

1. **Dérivées usuelles**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Fonction** | Dérivée | **Ensemble de dérivation** |
| k réel | 0 | ] - ; +[ |
| *x* | 1 | ] - ; +[ |
| *x*2 | 2*x* | ] - ; +[ |
| *x*3 | 3*x*2 | ] - ; +[ |
| *x*n | *n* *xn-1* | ] - ; +[ |
|  | - | ] - ; 0 [ ] 0 ; +[ |
|  | - | ] - ; 0 [ ] 0 ; +[ |
|  |  | ] 0 ; + [ |
| sin(*x)* | cos(*x)* | ] - ; +[ |
| cos(*x)* | - sin(*x)* | ] - ; +[ |
| tan(*x)* | = 1 + tan²(*x*) | ... ] -/2;  /2 [  ... |

1. **Opérations sur les dérivées :**

Soient *u* et *v* deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors

* *u* + *v* dérivable sur I, et on a : **(*u* + *v*)' = *u*' + *v* '**
* *u . v* dérivable sur I, et on a : **(*u*.*v*)' = *u*'.*v* + *u*.*v* '**
* Si a ∈ IR , au est dérivable sur I, et on a : **(*a*.*u*)' = *a*.*u*'**
* Si *u* ne s'annule pas sur I , alors  est dérivable sur I et on a : 
* Si *v* ne s'annule pas sur I, alors  est dérivable sur I et on a: 

1. **Dérivée de la composée de deux fonctions :**

**Théorème** : **ROC** : **Si *u* est une fonction dérivable sur un intervalle I, si *v* est une fonction dérivable sur un intervalle J, et si pour tout *x* ∈ I, *u(x)* ∈ J,**

**alors *v* o *u* est dérivable sur I et on a** **(*v* o *u*)' = *u* ' . (*v* ' o *u*)**

**Corollaires :**

* Soient a et b deux réels, *f* une fonction dérivable sur un intervalle J et soit I un intervalle tel que pour tout x de I on a a*x* + b  J. La fonction *g* définie par *g*(*x*) = *f*(a*x* + b) est dérivable sur I et  ***g* ' (*x*) = a *f* '(a*x* + b).**

ainsi  (cos(a*x*+b))' = - a sin(a*x*+b) ; (sin(a*x*+b)) ' = a cos(a*x*+b)

• Si *u* est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors :

 est une fonction dérivable sur I et on a  .

• Si *u* est une fonction dérivable sur un intervalle I alors :

pour tout n  IN\* *u*n est une fonction dérivable sur I et on a **(*u*n)' = n *u*' *u*n-1 .**

(si de plus u ne s'annule pas, le résultat ci-dessus peut être appliqué avec n entier relatif)

Exercice 5 : Déterminer la fonction dérivée de *f(x)*= (tan(*x*))² ; de *g(x)*= et de

*h*(*x*)= cos

**III] Dérivée et sens de variation**

**Théorème (**admis) : Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I de  .

* ***f* est constante sur I si et seulement si pour tout *x* de I, *f* ’(*x*) = 0.**
* ***f* est croissante sur I si et seulement si pour tout *x* de I, *f* ’(*x*) ≥ 0.**
* ***f* est décroissante sur I si et seulement si pour tout *x* de I, *f* ’(*x*) ≤ 0.**

Si ***f* ' est strictement positive** sur I, sauf en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors***f* est** **strictement croissante** sur I.

Si ***f* ' est strictement négative** sur I, sauf en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors ***f* est strictement décroissante** sur I.

Remarque :

**Pour étudier les variations d’une fonction,** on pourra successivement :

* Chercher l’ensemble de définition dans le cas où il n’est pas donné.
* Etudier la dérivabilité de la fonction.
* Calculer la dérivée *f* ’(*x*) pour tout *x* de l’ensemble de dérivabilité.
* Etudier soigneusement le signe de la dérivée (ce qui inclut la recherche des zéros de la dérivée et l’étude de son signe)
* Dresser le tableau de variation complet de *f* ce qui suppose de déterminer les valeurs et les limites de *f* aux bornes des intervalles de monotonie.

Exercice 6 : Etudier les variations de la fonction définie sur par : *f(x)* = *x*3 – 3*x*² +3*x* –1

Exercice 7 : Etudier les variations de la fonction définie par *f*(*x*) = 

**Théorème** (admis) : *f* est une fonction dérivable sur l'intervalle I, a est un réel de cet intervalle.

**Si *f* admet un maximum ou un minimum local en a   alors  *f* ' ( a ) = 0** . La réciproque est fausse.

Pour qu'une fonction *f* admette un extremum local en a il faut que la fonction dérivée **s'annule en a en changeant de signe.**