Première composition de mathématiques

X 2009 – MP

Exponentielles d'endomorphisme, intégrales et séries

PARTIE I

On désigne par $C^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles, de classe C^∞, d'une variable réelle. On identifie $\mathbf{R}[X]$ à un sous-espace de $C^\infty(\mathbf{R})$ et on confond polynôme et fonction polynomiale. On définit comme suit des endomorphismes de cet espace :

— pour tout f dans $C^\infty(\mathbf{R})$, $(Xf)(x) = xf(x)$, $(Df)(x) = f'(x)$, $(Af)(x) = xf'(x)$,

— pour tout nombre réel t et pour tout f dans $C^\infty(\mathbf{R})$, $(\Phi_t f)(x) = f(e^t x)$.

1) Vérifier que la valeur en $t = 0$ de la dérivée de la fonction $t \mapsto (\Phi_t f)(x)$ est égale à $(Af)(x)$.

On va maintenant étudier les puissances de A et chercher le sens à donner à la formule $\exp(tA) = \Phi_t$.

2) Vérifier que, si f est un polynôme, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}(A^n f)(x)$ est convergente et de somme $(\Phi_t f)(x)$.

3) Montrer que, pour tout entier $n > 0$, on a $D^n X = XD^n + nD^{n-1}$.

4) Montrer que, pour tout entier $n > 0$, il existe des nombres réels positifs $\mu_{n,k}$, $k = 1, \cdots, n$, tels que $A^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_{n,k} X^k D^k$, et exprimer $\mu_{n,k}$ en fonction des $(\mu_{n-1,p})_{1\leq p\leq n-1}$.
Préciser les valeurs de $\mu_{n,1}$ et $\mu_{n,n}$.

5) On désigne par f un polynôme d'une variable réelle. Démontrer la relation

$$\forall (t,x) \in \mathbf{R}^2 \quad f(e^t x) = f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \mu_{n,k} \right) x^k f^{(k)}(x) .$$

6) Étant donné une suite de nombres réels $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$, comparer les rayons de convergence des séries entières $\displaystyle\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 0} k a_k x^k$.

7) Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0, de rayon de convergence R strictement positif. On note $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. On **admettra** la propriété (**P**) suivante : pour $|x| < R$, la série entière en h, $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x)$ a un rayon de convergence au moins égal à $R - |x|$, et **si** $|h| < R - |x|$ **on a** $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) = f(x+h)$.

a) Vérifier que, si $|x| < R$, il existe un réel $\gamma_x > 0$ tel que

$$|t| < \gamma_x \Longrightarrow \left| (e^t - 1)x \right| < R - |x| .$$

b) Démontrer l'existence de nombres réels $(\lambda_{n,k})_{1\leq n,k}$, indépendants de f et tels que l'on ait

$$\forall x \in \,]-R;R[\;,\quad \forall t \in \,]-\gamma_x;\gamma_x[\;,\quad f(e^t x) = f(x) + \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!}\lambda_{n,k}\right)x^k f^{(k)}(x)\,.$$

c) Vérifier qu'on a $\lambda_{n,k} = \mu_{n,k}$ si $k \leq n$ et $\lambda_{n,k} = 0$ sinon.
[On pourra utiliser le résultat de la question 5.]

d) Montrer que, pour $1 \leq k \leq n$, on a $\lambda_{n,k} \leq 2^n \dfrac{n!}{(k-1)!}$.

e) On pose $Z_{n,k} = \dfrac{t^n}{n!}\lambda_{n,k}x^k f^{(k)}(x)$. Indiquer deux réels $\alpha > 0$ et $\eta > 0$ tels que

$$|x| < \alpha\,,\ |t| < \eta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|Z_{n,k}|\right) < +\infty\,.$$

f) Montrer que, si $|x| < \alpha$ et $|t| < \eta$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}(A^n f)(x)$ est convergente et de somme $(\Phi_t f)(x)$.

PARTIE II

Dans cette partie, on désigne par $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions f réelles, d'une variable réelle, continues et telles que, pour tout entier $k \geq 0$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ soit bornée.

8) Soit f une fonction de $\mathcal{F}$. Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

On posera $m_k(f) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} x^k f(x)\,\mathrm{d}x$.

9) Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{F}$.

a) Montrer que, pour tout réel x, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

On notera $f * g$ *la fonction* $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$.

b) Montrer que $f * g$ appartient à $\mathcal{F}$ et écrire une formule de la forme

$$m_k(f*g) = \sum_{p=0}^{k}\gamma_{k,p}m_p(f)m_{k-p}(g)\,,$$

où les $\gamma_{k,p}$ sont des coefficients à déterminer.

On **admettra** *la commutativité et l'associativité de l'opération* $(f,g) \mapsto f * g$.

Dans la suite du problème, on désigne par $\mathcal{F}_0$ *l'ensemble des fonctions* f *de* $\mathcal{F}$ *qui sont positives et telles que* $m_0(f) = 1$ *et* $m_1(f) = 0$.

10) Étant donné des fonctions $f_1, \dots, f_n$ de $\mathcal{F}_0$, calculer $m_0(f_1 * \cdots * f_n)$ et $m_1(f_1 * \cdots * f_n)$ puis exprimer $m_2(f_1 * \cdots * f_n)$ en fonction des $(m_2(f_i))_{1 \leq i \leq n}$.

Pour tout réel $a > 0$, on désigne par T_a l'endomorphisme de $\mathcal{F}$ défini par $(T_a f)(x) = af(ax)$.

11) Calculer $m_k(T_a f)$.

Dans la suite du problème on désigne par $(f_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$, des fonctions de $\mathcal{F}_0$, et, pour tout n, on pose $F_n = f_1 * \cdots * f_n$. On suppose que tous les $m_2(f_i)$ sont majorés par une même constante C.

12) a) Montrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, les intégrales $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} (T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x$ tendent vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

b) Étant donné une fonction h continue bornée sur $\mathbf{R}$, étudier le comportement, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} h(x)(T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x$.
[On pourra considérer d'abord le cas où $h(0) = 0$.]

13) a) Établir une inégalité entre $m_4(f)$ et $m_2(f)^2$ lorsque $f \in \mathcal{F}_0$.

b) Démontrer la formule, pour $n \geq 2$,

$$m_4(F_n) = \sum_{i=1}^{n} m_4(f_i) + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_2(f_i) m_2(f_j) \ .$$

c) Trouver une condition portant sur les $m_4(f_i)$ sous laquelle on ait, pour tout $\alpha > 0$,

$$\sum_{n \geq 1} \int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x < +\infty \ .$$