Tangentes à une parabole

Énoncé

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On considère la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$.
Étant donné un réel t non nul, on se propose de mettre en évidence, puis de démontrer une propriété du point d'intersection des tangentes à la parabole $\mathscr{C}$ aux points M et M' d'abscisses respectives t et $t' = -\frac{1}{t}$.

1. (a) À l'aide d'un logiciel adapté, tracer la parabole $\mathscr{C}$.
   (b) On se donne un réel t. Placer le point M d'abscisse t sur la courbe $\mathscr{C}$.
   (c) Tracer la droite D tangente à $\mathscr{C}$ au point M.
   Indication : Si le logiciel utilisé le nécessite, calculer d'abord le coefficient directeur de cette tangente.

   Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie la construction de $\mathscr{C}$, M et D.

   (d) Placer le point M' d'abscisse $t' = -\frac{1}{t}$ sur la courbe $\mathscr{C}$. Tracer la droite D' tangente à $\mathscr{C}$ en M'.
   Placer le point d'intersection P des droites D et D'.
   (e) Lorsque t varie dans $\mathbb{R}^*$, à quel ensemble le point P semble-t-il appartenir ?

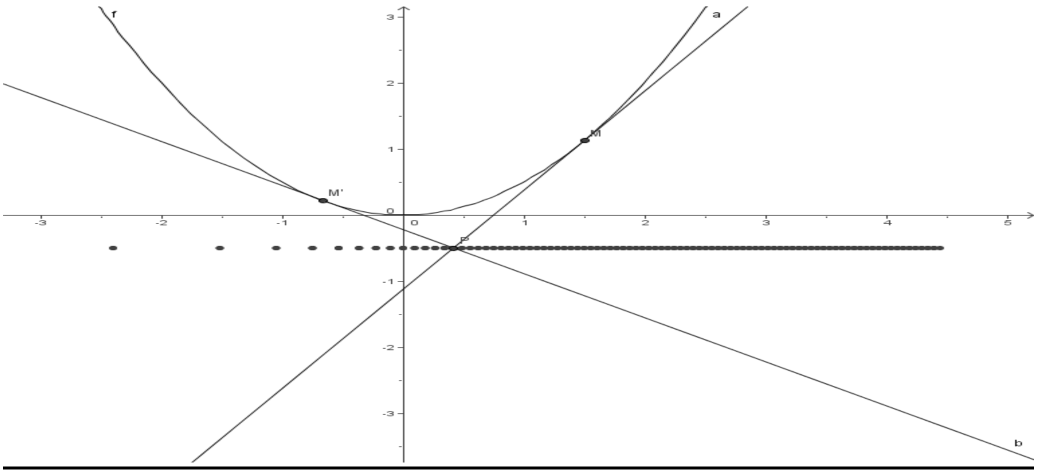
   Appeler l'examinateur pour lui présenter la figure construite et lui proposer une conjecture.

2. Démonstration
   (a) Donner les équations des droites D et D'.
   (b) Calculer les coordonnées du point P et conclure sur la propriété conjecturée.

Production demandée

- Question 1
  - Visualisation à l'écran et si possible impression de la figure réalisée avec le logiciel ;
  - Rédiger la conjecture relative au point P.
- Question 2
  - Calcul des équations des droites D et D' ;
  - Calcul des coordonnées du point P et conclusion.

Quelques commentaires personnels sur la fiche 031 TANGENTES-PARABOLE



Avec GeoGebra (très facile de construire les tangentes !)
t=2
f(x) = 0.5 * x * x
M = (t , f(t))
Tangente[M , f]
M' = (-1/t , f(-1/t)]
Tangente [M' , f]
Reste à « tracer » le point intersection des deux tangentes

2 a) $\begin{cases} y = tx - \dfrac{t^2}{2} \\ y = -\dfrac{1}{t}x - \dfrac{1}{2t^2} \end{cases}$

b) et on arrive à $\begin{cases} x = \dfrac{t^2-1}{2t} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

<u>Conclusion : sujet très intéressant, bonne conjecture, demande quand même une bonne dextérité en logiciel de géométrie ; le calcul terminal ne parait pas facile quand même.</u>

27/07/2008 Claude Poulin nouméa