Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats) Paradoxe de Bertrand

Joseph Bertrand est un mathématicien français du XIX° siècle. Il a énoncé un paradoxe en 1889 qui a mis en évidence les limites du recours à l'intuition dans la théorie des probabilités.

Partie 1 : un peu de géométrie

On rappelle que si A et B sont deux points distincts d'un cercle, le segment [AB] est appelé une corde**.**

1. Tracer un cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O et de rayon 4 cm et placer un point A sur ce cercle.
2. Tracer à la règle et au compas le triangle équilatéral inscrit dans le cercle dont A est un sommet (*On laissera apparent les traits de construction*). Nommer H et E les 2 autres sommets.
3. Prouver que le côté de ce triangle mesure $4\sqrt{3}$.
4. Tracer le cercle $\mathcal{C}_2$ inscrit dans ce triangle et prouver que son rayon est 2 cm.
5. Prouver qu'un point I placé à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}_1$ définit une unique corde de ce cercle dont I est le milieu, à l'exception d'un point particulier que l'on précisera.

Partie 2 : le paradoxe de Bertrand

Dans cette partie, on cherche à déterminer la probabilité qu'une corde choisie au hasard sur le cercle $\mathcal{C}_1$ ait une longueur supérieure au côté du triangle équilatéral AHE. Pour cela, on envisage les deux modélisations suivantes :

1. Modèle 1 : on choisit au hasard sur le cercle $\mathcal{C}_1$ un point B distinct de A.

a. Déterminer la probabilité que la corde [AB] soit plus longue que [AH].

b. Quelle est la probabilité que le milieu de la corde [AB] soit situé à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}_2$?

2. Modèle 2 : on choisit au hasard un point I à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}_1$.

a. Quelle est la probabilité que la corde de milieu I soit plus longue que [AH] ?

b. Quelle est la probabilité que le point I soit situé à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}_2$?

3. Quels commentaires vous inspirent ces résultats ?

4. Ces 2 figures montrent des tirages aléatoires d'environ 500 cordes suivant l'un des 2 modèles (pour le modèle 1, le point A est lui-même choisi aléatoirement sur le cercle $\mathcal{C}_1$).

figure A

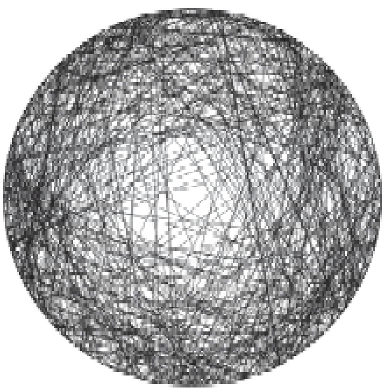
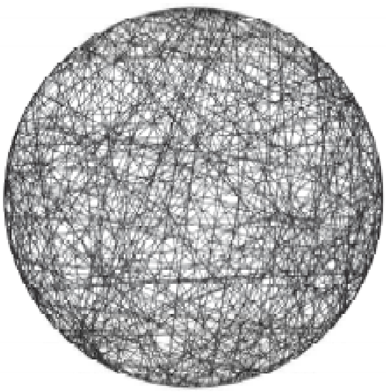


figure B

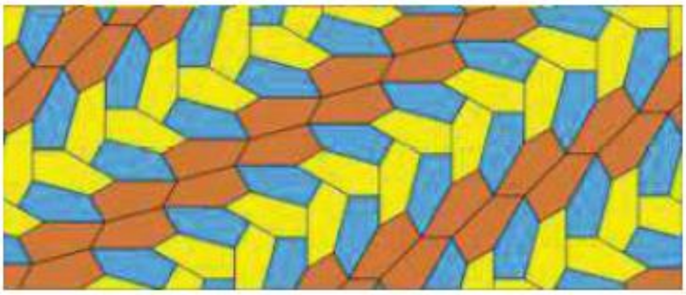


Laquelle de ces deux figures correspond au modèle 2 ? (*Justifier votre réponse*)

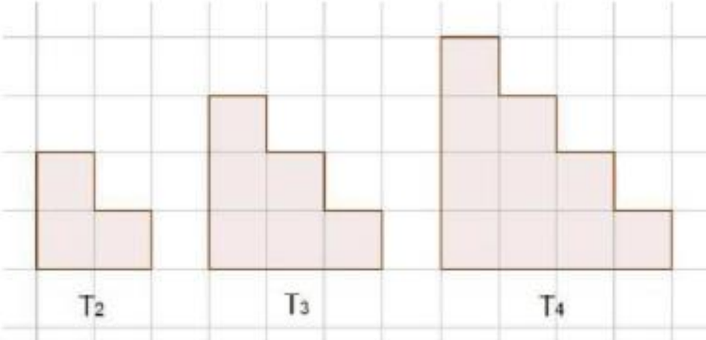
Exercice académique numéro 2 (à traiter par tous les candidats)

Une histoire de pavage…

Août 2015 : Une équipe de mathématiciens a bouleversé le monde des maths en découvrant un nouveau de pentagone capable de « paver un plan », c'est-à-dire que les pièces peuvent s'assembler sur une su plane sans qu'elles ne se chevauchent ni ne laissent de trous.



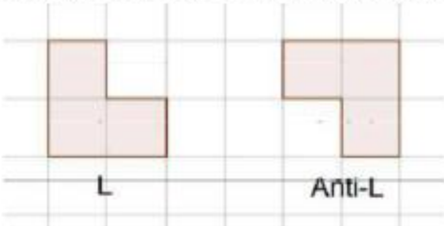
On considère pour notre part les surfaces T_2, T_3 et T_4 suivantes :



Plus généralement, pour tout entier $n \geq 2$, on considère la surface T_n constituée de 1+2+…+n carreaux for un triangle «crénelé».

La surface T_n est dite *pavable* si on peut la recouvrir entièrement par des pièces, sans qu'elles ne se chevau ou ne dépassent de la surface.

On s'intéresse ici au pavage de T_n par deux types de pièces L et anti-L définies ci-dessous.



1. Les surfaces T_2, T_3, T_4 sont-elles pavables ? Justifier vos réponses.
2. a. Montrer que T_9 est pavable.
   b. En déduire que T_{12} et T_{14} sont aussi pavables.
3. a. Montrer que pour que T_n soit pavable il est nécessaire que $n\times(n+1)$ soit un multiple de 3.
   b. Montrer que ce n'est pas une condition suffisante.
   c. Y a-t-il une infinité de surfaces T_n non pavables ? Justifier.
4. Montrer que si n est impair et T_n est pavable alors T_{n+3} est pavable.
5. Montrer que si n est pair et T_n est pavable alors T_{n+9} est pavable.
6. La surface T_{2016} est-elle pavable ?
7. Y a-t-il une infinité de surfaces T_n pavables ? Justifier.

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Accès réservé

L'accès à un laboratoire est protégé par un code composé de six chiffres. La sécurité de l'installation exige que deux responsables soient présents à chaque ouverture.

1. On songe à communiquer à chacun des deux responsables trois des six chiffres, avec leur position dans le code. Cependant, en essayant toutes les combinaisons restantes, l'un des deux pourrait accéder au local. Si chaque tentative lui prend en moyenne 5 secondes, y parviendrait-il en moins d'une heure ?

2. On envisage de communiquer à chacun des deux responsables les coordonnées d'un point du plan. Ces deux points ont des abscisses distinctes, et les six chiffres du code sont les six chiffres de l'ordonnée du point d'intersection de la droite qu'ils définissent avec l'axe des ordonnées. (*Les données doivent permettre d'aboutir à un nombre entier de six chiffres.)*

a. Traitement d'un exemple : les deux couples transmis sont (105 ; 137 521) et (540 ; 151 876). Quel est le code ?

b. Quand on ne connaît qu'un des deux points, peut-on espérer casser le code en moins d'une heure ?

3. On se demande si une information partielle pourrait permettre de pénétrer dans le laboratoire.
Les couples de coordonnées sont (42 ; 295 199) et (684 ; 458 26X), le dernier chiffre de la dernière coordonnée est inconnu.

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il affiche toutes les combinaisons possibles.

b. Quelles sont les combinaisons possibles ?

c. On remplace le second couple par (684 ; 4582XX), les deux derniers chiffres de la deuxième coordonnée sont cette fois inconnus. Modifier le programme pour qu'il affiche toutes les combinaisons possibles et donner ces combinaisons.

Variables
$x_1, x_2, y_1, y_2, i, n, d, c$

Initialisation
$x_1 \leftarrow \cdots$
$x_2 \leftarrow \cdots$
$y_1 \leftarrow \cdots$

Pour i allant de 0 à 9
    $y_2 \leftarrow \cdots$
    $n \leftarrow y_1x_2 - y_2x_1$
    $d \leftarrow x_2 - x_1$
    Si le reste de la division euclidienne de n par d est nul
        $c \leftarrow \cdots$
        Afficher c
    Fin Si
Fin Pour

Dispersion de l'information

Le responsable de la sécurité, qui a entendu parler des rapports entre la cryptographie et les courbes elliptiques, mais dont le bagage mathématique est limité, imagine de faire ouvrir la porte par un groupe de trois responsables au lieu de deux.

4. Si on donne les coordonnées de trois points non alignés, on peut trouver la fonction polynôme du second degré dont la représentation graphique passe par ces trois points et prendre pour combinaison l'image (qui serait un nombre entier) que cette fonction donne de 0.
Proposer un triplet de points associés à la combinaison 190 680 et donner la fonction polynôme du second degré correspondante.

5. Quelle est la combinaison associée aux trois points
(10 ; 365 464), (20 ; 350 314) et (30 ; 325 164) ?

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Nombres à moyenne harmonique entière

Soit a un nombre entier naturel non nul. On rappelle qu'un *diviseur strict de* a est un diviseur positif de a distinct de a. On dit que a *est un nombre parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts. On dit que a *est un nombre à moyenne harmonique entière* lorsque la moyenne harmonique de ses diviseurs positifs, a compris, est un nombre entier.

On rappelle que la moyenne harmonique h des nombres strictement positifs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ est l'inverse de la moyenne arithmétique de leurs inverses : $h = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n}}$

1. ***a.*** Un nombre premier p (nombre qui ne possède comme diviseurs que 1 et p) peut-il être parfait ? à moyenne harmonique entière ?

b. Montrer que 28 est un nombre parfait. Est-il un nombre à moyenne harmonique entière ?

c. Montrer que 140 est un nombre à moyenne harmonique entière. Est-il un nombre parfait ?

2. On considère un entier N et ses diviseurs positifs, notés $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{n-1}, d_n$, rangés dans l'ordre croissant. Dans cette énumération, on a évidemment $d_1 = 1$ et $d_n = N$.

a. Exprimer la somme $\Sigma = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_{n-1}} + \frac{1}{d_n}$ comme le quotient d'un entier S par N.

b. On suppose que N est un nombre parfait. Quelle est la valeur de Σ ?

c. En déduire une condition nécessaire pour qu'un nombre parfait soit un nombre à moyenne harmonique entière.

3. L'algorithme rédigé dans le tableau ci-contre a pour but d'identifier les diviseurs d'un entier.
On demande de le compléter pour qu'il permette de déterminer si le nombre a entré est un nombre parfait et s'il est un nombre à moyenne harmonique entière.

```
Variables entières a, k
Entrer a
Pour k allant de 1 à a
        Si le reste de la division euclidienne de a par k vaut 0
                Afficher k
        Fin Si
Fin Pour
```

Au livre IX des *Éléments*, Euclide, savant de la Grèce antique, énonce :
« Si, à partir de l'unité, on prend tant de nombres que l'on voudra successivement proportionnels en raison double, et que leur somme soit un nombre premier, ce que fera cette somme multipliée par le dernier sera un nombre parfait. »
En langage moderne, cette affirmation signifie que, pour tout entier n tel que le nombre $(2^n - 1)$ soit premier, le nombre $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ est un nombre parfait.

4. On donne un entier non nul n. On suppose que $P = (2^n - 1)$ est un nombre premier.

a. Quels sont les diviseurs du nombre $N = 2^{n-1}P$ défini ci-dessus ?

b. N est-il un nombre parfait ?

c. N est-il un nombre à moyenne harmonique entière ?

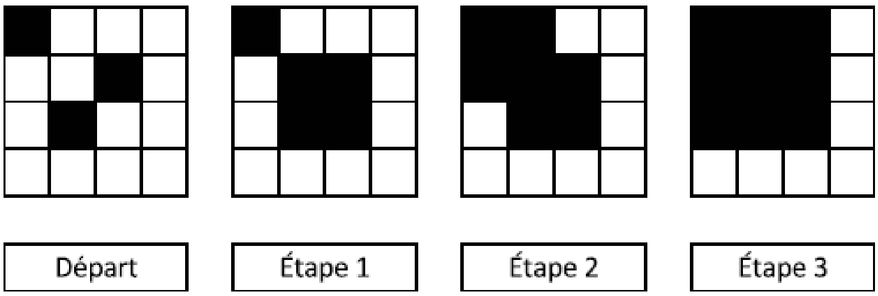
d. En déduire que les nombres 496 et 8 128 sont des nombres parfaits et des nombres à moyenne harmonique entière.

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Coloriages

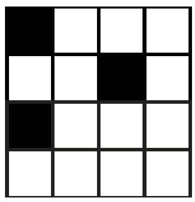
On donne un entier naturel n supérieur ou égal à 3.
Dans un damier $n \times n$ (n lignes et n colonnes), on dit que deux cases sont *voisines* si elles ont un côté (horizontal ou vertical) commun, et on décide que les cases peuvent être noircies selon la règle d'évolution suivante : toute case dont au moins deux des voisines sont noires à une certaine étape est noircie à l'étape suivante.
Le problème est de savoir quelle partie du damier sera finalement noircie.

Traitement d'un exemple, pour un damier 4 x 4



Étude de cas particuliers

1. Indiquer les étapes successives pour le damier 4 x 4 ci-contre :



2. Expliquer pourquoi, partant d'une configuration initiale $n \times n$ donnée , le processus finit par se figer.

3. ***a.*** Montrer que, sur un damier 3 x 3, noircir deux cases ou moins ne permet pas d'aboutir à un damier complètement noirci.
b. Combien y a-t-il de façons de noircir trois cases sur un damier 3 x 3 pour parvenir à un damier intégralement noirci ?

Quelques résultats

4. Sur un damier $n \times n$, peut-on aboutir à un damier complètement noirci en noircissant n cases au départ ?

5. On appelle k le nombre minimal de cases à noircir pour qu'un damier $n \times n$ soit noirci en fin de processus.
a. Montrer que $k \leq n$.
b. On s'intéresse à l'évolution de la zone noircie au cours du processus. Pour cela, on remarque qu'il y a deux dispositions (aux symétries près) dans lesquelles une case (marquée d'une croix) possède deux voisines noires : ou bien les deux cases noires ont un coin commun, ou bien non. Comment évolue le périmètre de la zone noircie au cours du processus ?
c. En déduire que $k = n$.