Suite de Syracuse

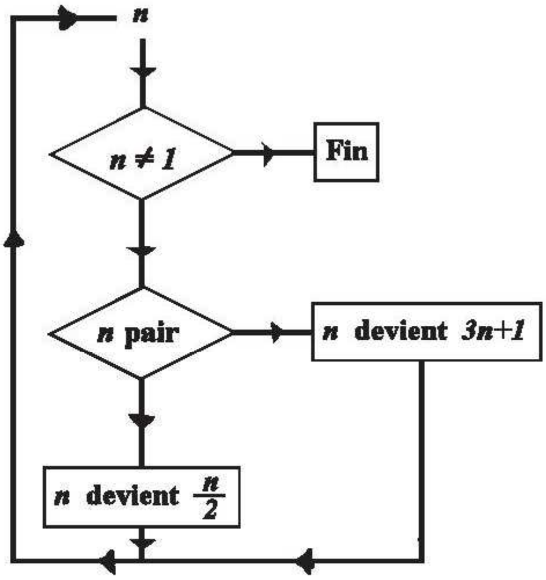
Énoncé

À tout n entier naturel ($n \geqslant 1$), on applique l'algorithme suivant :
Si $n = 1$ le processus s'arrête, sinon :

– si n est pair, on le transforme en $\dfrac{n}{2}$,
– si n est impair, on le transforme en $3n + 1$.
On note à nouveau n le résultat obtenu et on ré-applique l'algorithme à ce n.

Lorsque, pour l'entier n, l'algorithme aboutit à 1, on appelle " suite de Syracuse associée à n " la suite (finie) des entiers rencontrés pour passer de n à 1.
On note $\mathscr{L}(n)$ le nombre d'entiers de cette suite finie. $\mathscr{L}(n)$ est la longueur de la suite de Syracuse associée à n.

Exemple : pour $n = 5$ *on obtient successivement les nombres* $5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1$ *et donc* $\mathscr{L}(5) = 6$.



1. (a) À l'aide d'un tableur, appliquer cet algorithme aux entiers compris entre 1 et 10.
   (b) Compléter alors la feuille de calcul en donnant les suites de Syracuse des 100 premiers entiers.
   (c) Préciser les valeurs de $\mathscr{L}(26)$ et $\mathscr{L}(27)$.

Appeler l'examinateur pour vérification du tableau construit.

2. Etude de quelques résultats particuliers relatifs aux longueurs des suites $\mathscr{L}(n)$ pour n entier naturel.
   (a) Quelle est la longueur des suites de Syracuse associées aux nombres de la forme 2^p pour p entier naturel non nul ?
   (b) Que remarque-t-on quant aux suites de Syracuse associées aux nombres de la forme $8k+4$ et $8k+5$ pour $k \in N^*$.

   Appeler l'examinateur pour vérification des conjectures émises.

   (c) Démontrer conjecture émise en 2b).
3. Démontrer que si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 0, 1 ou 2 alors l'algorithme amène nécessairement, au bout d'un certain nombre d'étapes, à un entier strictement inférieur à n.

La conjecture de Syracuse affirme que pour tout entier non nul n le processus aboutit à 1. La longueur de la suite quant à elle n'est pas, à l'heure actuelle prévisible, en toute généralité.

Production demandée

- Construction du tableau des suites de Syracuse pour les 10 premiers entiers.
- Le tableau pour les 100 entiers sera simplement visé par l'examinateur.
- Énoncé des conjectures du 2)
- Preuve de 2b) et de 3).

Quelques commentaires personnels sur la fiche 052   SUITE DE SYRACUSE

1(a) : est ce indispensable d'imposer un tableur ?
Et, si on veut vraiment faire afficher les 100 valeurs demandées, l'écran devient bien vite illisible.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
	4	1	10	2	16	3	22	4
	2	4	5	1	8	10	11	2
	1	2	16	4	4	5	34	1
	4	1	8	2	2	16	17	4
	2	4	4	1	1	8	52	2
	1	2	2	4	4	4	26	1
	4	1	1	2	2	2	13	4
	2	4	4	1	1	1	40	2
	1	2	2	4	4	4	20	1
	4	1	1	2	2	2	10	4

Avec Excel, l'élève va-t-il penser à utiliser Mod(x,2) pour tester la parité de x ?
Et connaît-il :   Si(mod(x ; 2)=0 ; x /2 ; 3*x +1) ?
Sinon et qu'on l'aide il n'y a plus grand-chose à faire dans cette partie TICE !

1
=SI(MOD(A1;2)=0;A1/2;3*A1+1)
=SI(MOD(A2;2)=0;A2/2;3*A2+1)
=SI(MOD(A3;2)=0;A3/2;3*A3+1)
=SI(MOD(A4;2)=0;A4/2;3*A4+1)
=SI(MOD(A5;2)=0;A5/2;3*A5+1)

1(c) : on trouve L(26) = 11 et L(27) = 112

2(a) la conjecture est facile
2(b) intéressant, même 4° valeur, donc fin identique…

(3) si n=4k, à l'étape suivante on est en dessous
Si n=4k+1, impair 12k+4 pair puis 6k+2 puis 3k+1 < n
Enfin si n = 4k+2 pair 2k+1 impair 6k+4 pair et alors 3k+2 < n

Conclusion : sujet facile, option TS, peut être à compléter ou reformuler

Programme avec Casio Graph 35+

```
? → N
0 → S
Do
S + 1 → S
If Frac(N ÷ 2) = 0
Then N ÷ 2 → N
Else 3 × N + 1 → N
IfEnd
LpWhile N > 1
S ◢
```

26/07/2008 Claude Poulin Nouméa