Somme de termes d'une suite

Énoncé

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n entier naturel par $u_n = n^3$ et la somme de ses premiers termes $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

1. Donner la somme V_n des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique des entiers naturels soit $V_n = 0 + 1 + \cdots + n$.
2. Avec un tableur ou une calculatrice programmable, calculer la valeur de S_n pour n allant de 1 à 30.

   Appeler le professeur, lui montrer les calculs des termes $S_1,\ S_2\ldots,\ S_{30}$ et lui indiquer la formule donnant V_n.

3. Avec un tableur ou une calculatrice programmable, calculer la valeur de V_n^2 dans les mêmes cas particuliers. Que constate-t-on ?

   Appeler le professeur, lui montrer les calculs des termes S_n et V_n^2 pour n de 1 à 30. Lui indiquer la formule conjecturée et la méthode retenue pour la démonstration.

4. À partir du constat ci-dessus, conjecturer une formule donnant la valeur de S_n en fonction de n, puis la démontrer.

   On suggère une démonstration par récurrence.

Production demandée

- Formule donnée sans démonstration exprimant V_n en fonction de n.
- Tableau des valeurs exactes des suites S_n et V_n^2 pour n de 1 à 30 (par exemple en imprimant la feuille de calcul).
- Formule, donnant S_n en fonction de n, conjecturée à partir du tableau précédent.
- Démonstration de la formule donnant S_n en fonction de n.

Quelques commentaires personnels sur la fiche 044 SOMME DE TERMES

n	Vn	Vn²	cubes	Sn
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	3	9	8	9
3	6	36	27	36
4	10	100	64	100
5	15	225	125	225
6	21	441	216	441
7	28	784	343	784
8	36	1296	512	1296
9	45	2025	729	2025

Pour les élèves qui maîtrisent les références absolues

n	Vn	Vn²	cubes	Sn
0	=SOMME(A$2:A2)	=+B2^2	=+A2^3	=SOMME(D$2:D2)
1	=SOMME(A$2:A3)	=+B3^2	=+A3^3	=SOMME(D$2:D3)
2	=SOMME(A$2:A4)	=+B4^2	=+A4^3	=SOMME(D$2:D4)
3	=SOMME(A$2:A5)	=+B5^2	=+A5^3	=SOMME(D$2:D5)

Mais, il est possible aussi d'utiliser une formules récurente

n	Vn	Vn²	cubes	Sn
0	=SOMME(A$2:A2)	=+B2^2	=+A2^3	0
1	=+A3+B2	=+B3^2	=+A3^3	=+E2+A3^3
2	=+A4+B3	=+B4^2	=+A4^3	=+E3+A4^3
3	=+A5+B4	=+B5^2	=+A5^3	=+E4+A5^3

Le niveau de manipulation d'un tableur dans cet exercice semble satisfaisant

Attention : certaines calculatrices « formelles » risquent … de trouver directement le résultat !

$$\sum_0^{p+1} k^3 = \sum_0^p k^3 + (p+1)^3 = (\sum_0^p k)^2 + (p+1)^3 = (\sum_0^p k)^2 + (p+1)(p+1)^2 = (\sum_0^p k)^2 + 2\frac{p(p+1)}{2}(p+1) + (p+1)^2$$

$$= (\sum_0^p k)^2 + 2(\sum_0^p k)(p+1) + (p+1)^2 = (\sum_0^{p+1} k)^2$$

Mais , pourquoi suggérer un raisonnement par récurrence ?
D'autres stratégies sont possibles.

<u>Conclusion : sujet sympathique, avec une bonne conjecture obtenue grâce à l'informatique ; démonstration abordable.</u>

26/07/2008 Claude Poulin Nouméa