Problème : formule de Poincaré et applications

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$.

1. **La formule de Poincaré**

   (a) Si A_1, A_2, A_3 sont des évènements, montrer que

   $$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)-p(A_1 \cap A_2)-p(A_1 \cap A_3)-p(A_2 \cap A_3)+p(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

   (b) Démontrer la formule de Poincaré : Si $n \geq 2$, pour toute suite finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ alors :

   $$p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n}((-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subset I \\ |J|=k}} p(\bigcap_{j \in J} A_j))$$

   en notant $|J|$ le cardinal de l'ensemble J et $I = \{1, ..., n\}$.

2. **Manipulation d'un ensemble fini d'évènements** Pour toute partie J non vide de I on note : $\hat{A}_J = \bigcap_{j \in J} A_j$ et $B^J = \hat{A}_J \cap (\bigcap_{j \in J^c} A_j^c)$ puis pour si $1 \leq m \leq n$:

   $$B_m = \bigcup_{\substack{J \subset I \\ |J|=m}} B^J$$

   et enfin :

   $$B_0 = \bigcap_{j=1}^{n} A_j^c$$

   (a) Montrer que si J et J' sont distinctes et non vides, les ensembles B^J et $B^{J'}$ sont disjoints.

   (b) Montrer que pour tout $m \in I$, $\omega \in B_m \Leftrightarrow \omega$ appartient à exactement m évènements A_i.

   On note $S_0 = 1$ et, pour $1 \leq r \leq n$, $S_r = \sum_{\substack{J \subset I \\ |J|=r}} p(\hat{A}_J)$

   (c) Pour tout $A \in \mathcal{A}$,

   $$p(B_0 \cap A) = p(A) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{\substack{J \subset I \\ |J|=k}} p(\bigcap_{j \in J} A_j \cap A)$$

   (d) Montrer que si $1 \leq m \leq n$,

   $$p(B_m) = S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + ... + (-1)^{n-m}\binom{n}{m} S_n$$

3. **Une application concrète** Au cours d'une soirée, n personnes déposent dans un chapeau une carte portant leur nom (aucune personne ne portant le même nom qu'une autre). A la fin de la soirée, on brasse bien les cartes puis chacun tire une carte.

   (a) Quelle est la probabilité qu'aucune personne ne tire une carte portant son nom ?

   (b) Quelle est la probabilité qu'exactement m personnes tirent une carte portant leur nom ?

4. **Une application à un problème d'indépendance** $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ est un espace probabilisé

   (a) Si A et B sont deux évènemements indépendants, démontrer que :

– A et B^c sont indépendants.
– A^c et B^c sont indépendants.

(b) Si $(A_i)_I$ est une famille d'évènements indépendants et que I est partitionné en deux parties non vides I_1 et I_2 alors on définit la famille $(B_i)_I$ par :

$$B_i = \{ \begin{matrix} A_i \ si \ i \in I_1 \\ A_i^c \ si \ i \in I_2 \end{matrix}$$

Démontrer que les évènements $(B_i)_I$ sont indépendants.

(c) En déduire que si une famille d'évènement est indépendante alors la famille des évènements contraires est une famille d'évènements indépendants.

(d) **Calcul de l'indicateur d'Euler par les probabilités** Soit Ω l'ensemble des entiers $\{1, ..., n\}$ où n est un entier non premier supérieur ou égal à 2. On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ où p est la probabilité uniforme. Si d divise n on note : $A_d = \{kd \ tels \ que \ k \in \Omega \ et \ kd \in \Omega\}$

i. Quelle est la probabilité de A_d ?
Soit $p_1 < p_2 < ... < p_r$ la suite des diviseurs premiers de n rangés par ordre croissant.

ii. Démontrer que $(A_{p_i})_{1 \leq i \leq r}$ est une famille d'évènements indépendants.

iii. En déduire le cardinal $\varphi(n)$ de l'ensemble A des nombres inférieurs ou égaux à n et premiers avec n (indicateur d'Euler).