Problème ouvert: problème pour chercher

Ce document tire sa source en grande partie dans le manuel de Roland Charnay pour préparer au concours de professeur des écoles. Je l'ai adapté, remanié en introduisant des exemples traités en classe avec des extraits de travaux d'élèves.

1. Introduction

On estime actuellement qu'il y a entre 80 000 et 100 000 mathématiciens dans le monde qui chaque année produisent environ 200 000 articles présentant des résultats de recherche.

En 1900, lors du deuxième Congrès Internationale des Mathématiciens, David Hilbert proposa 23 problèmes non encore résolus qui, selon lui, marqueraient l'histoire des mathématiques du 20ème siècle. Ces problèmes ont effectivement été à l'origine d'une activité mathématique très importante. À l'aube du 21ème siècle, six d'entre eux ne sont encore que partiellement résolus.

Il faut savoir que certains problèmes très anciens n'ont été résolus que très récemment. Ainsi au 17ème siècle, Pierre Fermat a conjecturé que l'on ne peut trouver d'entiers a, b et c tels que pour n>2, l'égalité $a^n + b^n = c^n$ soit vérifiée. Il a fallu attendre ces toutes dernières années pour qu'une démonstration convenable de cette conjecture soit proposée. D'autres problèmes de formulation simple ont donné lieu à des développements considérables. Ainsi les questions : « Quelle est la taille d'un ensemble infini ? Existe-t-il plusieurs types infinis » posées par le mathématicien Georg Cantor à la fin du 17ème siècle a donné naissance à la théorie des ensembles.

En 2000, un mécène américain Landon Clay, fondateur du « Clay Mathematics Institute », dressa une liste de 7 problèmes ouverts, considérés comme fondamentaux, et offrit un prix d'un million de dollars à qui résoudrait l'un d'entre eux.

C'est bien la recherche qui permet le développement des connaissances mathématiques, mais comme le dit Timothy Gowers, médaille Fields 1998 (prix considéré comme l'équivalent du prix Nobel pour les mathématiques, attribué à un chercheur de moins de 40 ans) : « les mathématiciens n'arrivent à trouver qu'une infime partie des problèmes qu'ils se posent ».

Cette activité de recherche a été récemment introduite dans les programmes de l'Education Nationale, que ce soit à l'école primaire, au collège comme au lycée.

2. Les nouveaux programmes :

Les nouveaux programmes impulsent une nouvelle orientation à nos pratiques pédagogiques en disant: « La véritable activité mathématique consiste à :

- «identifier et formuler un problème,
- conjecturer un résultant en l'expérimentant sur des exemples,
- bâtir une argumentation,
- contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié,
- communiquer une recherche,
- mettre en forme une solution. »

Ce n'est bien sur pas l'unique activité à proposer à nos élèves mais telle qu'elle est décrite, elle prend toute sa place dans leur formation ; Tous les types de problème ne répondent pas aux critères de l'activité dont parlent les programmes.

3. Plusieurs types de problèmes

Pour mieux comprendre l'enjeu des problèmes, essayons de les classer selon les objectifs d'apprentissage poursuivis.

- Les problèmes destinés à engager les élèves dans la construction de nouvelles connaissances : les « situations-problèmes »
- Les problèmes destinés à permettre aux élèves l'utilisation de connaissances déjà étudiées : les « problèmes de réinvestissement »
- Les problèmes plus complexes dans lesquels les élèves doivent utiliser conjointement plusieurs catégories de connaissances : les « problèmes de synthèse »
- Les problèmes dont l'objectif est de faire le point sur la manière dont les connaissances sont maîtrisées : les « problèmes d'évaluation »
- Les problèmes destinés à mettre l'élève en situation de recherche et donc de développer des compétences plus méthodologiques : les « problèmes ouverts ».

Au travers de cette catégorisation, on peut voir apparaître le caractère original du problème ouvert. Tous les autres types de problèmes sont d'abord centrés sur l'acquisition et la maîtrise de notions mathématiques.

Le problème ouvert est, lui, principalement destiné à développer un comportement de recherche et des capacités d'ordre méthodologique : faire et gérer des essais, faire des hypothèses, imaginer des solutions, éprouver leur validité, argumenter.

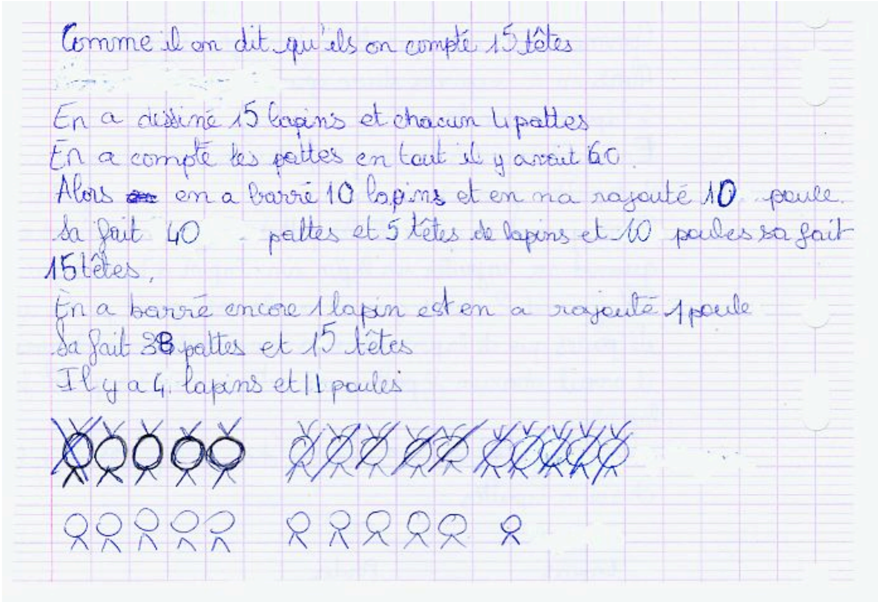
Tous les problèmes ne trouvent pas leur place dans cette classification et plus fondamentalement, un même énoncé peut selon le moment où il est proposé, selon les connaissances initiales des élèves relever de l'une ou l'autre des catégories. En voici un exemple :

« Dans ma ferme, il y a des lapins et des poules. J'ai compté ce matin 38 pattes et 15 têtes. Combien y a t-il de lapins, combien y a t-il de poules? »

❖ Posé en sixième, cet énoncé relève d'un problème ouvert.
Il n'a d'autre but que la recherche en elle-même.

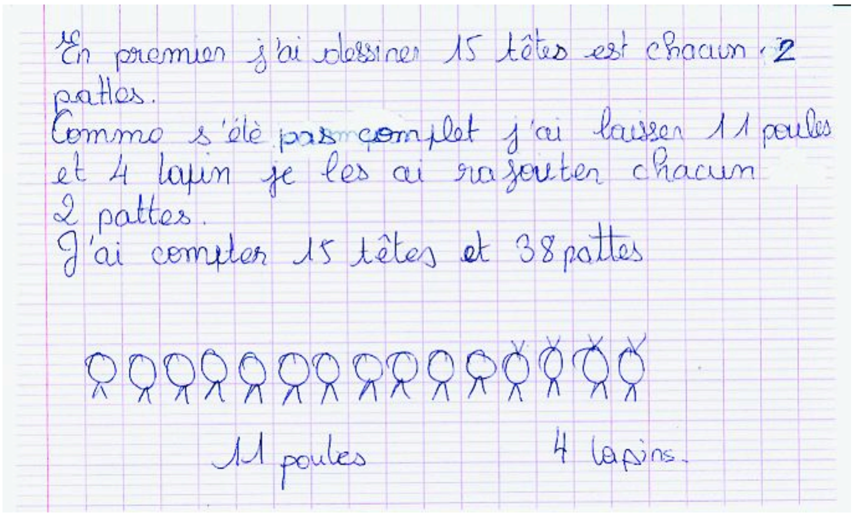
Méthode 1 :

Les élèves ont fait plusieurs essais en réajustant selon le résultat précédent, les nouvelles valeurs à donner.


Comme il on dit qu'ils on compté 15 têtes
En a dessiné 15 lapins et chacun 4 pattes
En a compté les pattes en tout il y avait 60.
Alors en a barré 10 lapins et en na rajouté 10 poule.
Sa fait 40 pattes et 5 têtes de lapins et 10 poules sa fait 15 têtes.
En a barré encore 1 lapin est en a rajouté 1 poule
Sa fait 38 pattes et 15 têtes
Il y a 4 lapins et 11 poules

Méthode 2 :

Les élèves ont adopté une méthode par dénombrement qui conduit directement au résultat. Ils ont donné à chacune des 15 têtes deux pattes puis ont rajouté des paires de pattes jusqu'à 38.


En premier j'ai dessiner 15 têtes est chacun 2 pattes.
Comme s'été pas complet j'ai laisser 11 poules et 4 lapin je les ai rajouter chacun 2 pattes.
J'ai compter 15 têtes et 38 pattes

11 poules 4 lapins.

Méthode 3 :

Méthodiquement et même « algorithmiquement », les élèves sont arrivés au résultat par essais successifs


J'ai multiplié 14 + 1 = 15
× 2 × 4
28 + 4 = 32

J'ai multiplié 13 + 2 = 15
× 2 × 4
26 + 8 = 34

J'ai multiplié 12 + 3 = 15
× 2 × 4
24 + 12 = 36

J'ai multiplié 11 + 4 = 15
× 2 × 4
22 + 16 = 38

Et voila comment j'ai trouvé le résulta en additionent chaque multiplication avec chaque résulta.

❖ Posé en troisième, cet énoncé relève d'une situation-problème
On veut amener les élèves à travailler sur les systèmes d'équation

Méthode 4 :

Les élèves ont utilisé leurs connaissances sur les équations simples pour aboutir au résultat. Ils ont contourné la méthode des systèmes en exprimant la deuxième inconnue en fonction de l'autre, qu'ils ont substituée dans l'équation.

① choix des inconnues

a : lapin (4 pattes)

15-a : poules (2 pattes)

② Mise en équation

$38 = 2 \times (15-a) + 4 \times a$

③ Résolution de l'équation

$38 = 30 - 2a + 4a$

$-30 + 38 = 30 + 2a - 30$

$\frac{8}{2} = \frac{2a}{2}$

$4 = a$

Il y a 4 lapins.

poules $= 15 - a$

$= 15 - 4$

$= 11$

Il y a 11 poules

$15 = a + b$

$11 + 4 = 15$

❖ Cet énoncé relève d'un problème de réinvestissement pour les élèves de troisième ou de seconde qui ont déjà étudié ce thème (en modifiant les nombres dans l'énoncé).

Méthode 5 :

La méthode experte est utilisée avec la résolution du problème à l'aide d'une mise en équation et de la résolution d'un système à deux équations et deux inconnues.

① choix des inconnus

x = nombre de poules

y = nombre de lapins.

② Mise en équation

$38 = x \times 2 + y \times 4$

$15 = x + y$

③ Résolution du système.

$\begin{cases} y = 15 - x \\ 38 = 2x + (15-x) \times 4 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 15 - x \\ 38 = 2x + 60 - 4x \end{cases}$

$\begin{cases} y = 15 - x \\ 38 = -2x + 60 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 15 - x \\ 38 - 60 = -2x + 60 - 60 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 15 - x \\ 38 - \frac{22}{-2} = \frac{-2x}{-2} \end{cases}$

$\begin{cases} y = 15 - x \\ 11 = x \end{cases}$

$\begin{cases} x = 11 \\ y = 15 - 11 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 11 \\ y = 4 \end{cases}$

④ Conclusion.

dans ma ferme il y a 11 poules et 4 lapins.

- ❖ Posé en seconde, cet énoncé relève d'un problème ouvert.

Il n'a d'autre but que la recherche en elle-même.

16 points sont tracés sur une feuille, de façon à ce que 3 quelconques d'entre eux ne soient jamais alignés.
Combien peut-on tracer de segments les joignant 2 à 2 ?
Et avec n points ?

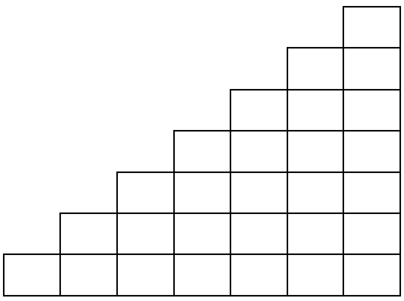
- ❖ Posé en première, cet énoncé intégré dans une série de problèmes de même classe relève d'une situation-problème

On veut amener les élèves à établir la relation : $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Problème n°1 :
Tous les matins, les 7 maçons de l'entreprise Bétonchoc échangent en guise de salutation, une poignée de mains. Sachant que chaque maçon serre la main de chacun de ses collègues, combien de poignées de mains ont été échangées ?

Problème n°2
16 points sont tracés sur un cercle. Combien peut-on tracer de segments les joignant 2 à 2 ?

Problème 3 :
Imaginons que l'on mette l'une à côté de l'autre des piles de 1, 2, 3, 4... cubes. On forme ainsi un escalier.



Combien de cubes forment un escalier de 7 étages ?
de 25 étages ?
de 100 étages ?
de n étages ?

4. Le problème ouvert, pourquoi ?

Voici quelques arguments en faveur de la pratique du problème ouvert :

❖ Le problème ouvert permet de proposer à l'élève une activité comparable à celle du mathématicien confronté à des problèmes qu'il n'a pas appris à résoudre : problème ouvert et situation-problème pourraient ainsi renvoyer à deux aspects du travail mathématicien :

- dans le cas du problème ouvert, il s'agit d'abord de chercher une solution originale, personnelle avec les moyens du bord, mais la solution experte n'est pas à portée de main

- dans le cas de la situation-problème, il s'agit, à partir d'un problème particulier, d'élaborer une connaissance (notion, procédure, ...) de portée plus générale et destinée à être institutionnalisée, reconnue socialement, maîtrisée par chacun.

❖ Le problème ouvert permet de mettre l'accent sur des objectifs spécifiques, d'ordre méthodologique, déjà évoqués plus haut. Il exige en effet de l'élève, la mise en oeuvre de méthodes et de compétences peu travaillées par ailleurs : essayer, organiser sa démarche, mettre en oeuvre une solution originale, en mesurer l'efficacité, argumenter à propos de sa solution ou de celle d'un autre, ...

❖ Le problème ouvert offre une occasion de prendre en compte et même de valoriser les différences entre élèves. En effet, si l'énoncé est le même pour tous les élèves, les solutions peuvent être diverses, plus ou moins rapides, utilisant des connaissances et des stratégies variées. C'est précisément cette diversité qui est ici intéressante, pour permettre l'échange, la confrontation et le débat.

❖ Le problème ouvert permet à l'enseignant de faire connaître aux élèves quelles sont ses attentes en matière de résolution de problèmes. En effet, pour résoudre de tels problèmes, l'élève perçoit rapidement qu'il est inefficace d'essayer d'appliquer directement des connaissances déjà étudiées. Au contraire, il s'agit de chercher (plutôt que de trouver rapidement), il faut prendre des initiatives, on peut essayer pour voir, l'originalité est encouragée et reconnue, ... La responsabilité de la solution appartient entièrement à l'élève.

❖ Les problèmes ouverts rendent pertinents les outils que nous introduirons par la suite (plusieurs mois ou plusieurs années plus tard) et qui permettront de résoudre certains problèmes proposés de manière beaucoup plus efficace.

5. Le problème ouvert, comment ?

Il est difficile de fournir des indications précises de mise en oeuvre, qui seraient valables quel que soit le problème et quel que soit le niveau de classe. L'énoncé ne peut pas être présenté de la même manière à des élèves de 6ème et à des élèves de 3ème . Osons cependant quelques recommandations.

1) **La difficulté ne doit pas résider dans la compréhension de la situation.**
La recherche ne doit commencer que lorsque les termes et l'enjeu du problème sont appropriés par tous les élèves. Facile à dire, ... plus difficile à réaliser : il faut donner toutes les indications pour que le problème soit clairement défini et aucune indication qui puisse esquisser une procédure possible de résolution. Ajoutons que le problème n'est pas nécessairement présenté sous la forme d'un énoncé écrit ; il peut être formulé oralement ou même illustré matériellement (par exemple, avec des poules et des lapins dans la classe ?!?)

Un échange avec les élèves peut suffire à assurer la compréhension de la situation proposée. Le respect des contraintes (10 têtes et 34 pattes) n'est pas assuré pour autant, certaines contraintes sont souvent oubliées en cours de recherche. C'est le rôle du débat de validation que de le mettre en évidence.

2) Un temps de recherche individuel.

Avant le travail en groupe, il est souhaitable que, pendant quelques minutes, chaque élève examine individuellement le problème afin de se l'approprier.

3) La phase de recherche doit appartenir aux élèves.

Les interventions de l'enseignant doivent se limiter à des encouragements, des réponses à des questions portant strictement sur la compréhension de l'énoncé, mais en aucun cas, sur la validité d'une procédure, sur le fait que la voie choisie et bonne ou mauvaise, ...
Que le travail se fasse en groupe ou qu'il reste individuel, il est important, pour l'enseignant, d'observer et de recueillir des informations qui l'aideront à préparer la phase de mise en commun.

4) Un moyen de validation

Lorsque cela est possible, l'énoncé doit permettre aux élèves de vérifier par eux-mêmes si leur solution est valide ou pas. Le travail en groupe a cet avantage sur le travail individuel en ce que 4 contrôles sur le résultat vaut mieux qu'un.

5) La mise en commun est avant tout une phase d'échanges et de débat autour des solutions proposées par les élèves.

Le plus souvent, elle pourra se réaliser autour des affiches (ou des transparents) que les élèves auront réalisées à l'issue de leur recherche. Le rôle de l'enseignant est d'abord de permettre un échange véritable entre les élèves, et non entre les élèves et lui, avec l'idée permanente qu'il s'agit de confronter des solutions, de les discuter, de les défendre, de les valider ... et non d'arriver à exhiber "la bonne solution", celle à laquelle avait pensé l'enseignant ou celle des élèves considérée comme la plus efficace.

6) La même situation peut être proposée à nouveau aux élèves, après la phase de mise en commun, avec des nombres différents par exemple. Cela permet à certains élèves d'essayer une solution qu'ils n'ont pas élaborée eux-mêmes, mais dont ils ont perçu l'intérêt au cours des échanges. Mais ce choix doit rester à leur initiative !

6. Le problème ouvert : quel type d'activité ?

Pour mieux comprendre le type d'activité intellectuelle que l'on sera amené à solliciter auprès de nos élèves, résolvons le problème ouvert suivant :

> Un entier naturel possède plusieurs décompositions additives, par exemple :
> 45=20+20+5
> 45=16+10+17+2
> 45=15+30, etc…
> Parmi toutes les décompositions additives d'un entier naturel, quelle est celle dont le produit des termes est le plus grand ?

Ce problème est probablement pour vous un problème inédit, qui ne ressemble pas à un problème que vous avez déjà résolu. Mais si la compréhension de cet énoncé se fait aisément, l'élaboration de la procédure comporte des difficultés. Ici, les stratégies de type « chaînage avant » ou « chaînage arrière » ne sont pas utilisables. Comment s'y prendre ? Par quoi commencer ?

Après un moment d'hésitation, si vous n'avez pas sombré dans le découragement, vous avez dû commencer à **faire quelques essais** en testant plusieurs hypothèses, peut-être implicites, comme par exemple :

- faut-il choisir des nombres assez grands dans la décomposition ?
- faut-il choisir une décomposition comportant beaucoup de termes ? Vous avez probablement rapidement pris conscience qu'il fallait éviter d'utiliser 0 et 1 dans les décompositions.

En continuant votre recherche, vous avez certainement dû **faire l'hypothèse** qu'il fallait un maximum de 2. Mais, en testant cette hypothèse sur d'autres nombres, vous avez dû vous rendre compte qu'il fallait qu'il y ait un maximum de 3. Il vous a certainement fallu de nombreux essais pour parvenir à une conjecture, c'est-à-dire à une hypothèse qui vous paraisse valable pour tous les nombres.

Il faut également **formuler cette conjecture**, ce qui n'est pas toujours facile. En voici une possible :

« La décomposition doit comporter le plus possible de 3, sans qu'il y ait de 1, ce qui revient à exprimer n sous la forme : $n = 3 \times q + r$, avec $0 < r < 3$. »

Si $r = 0$, il faut choisir la décomposition :$3 + 3 + 3 + \ldots + 3$ (q termes égaux à 3);
Si $r = 1$, il faut choisir la décomposition : $3 + 3 + \ldots + 3 + 2 + 2$ (cj-1 termes égaux à 3)
Si $r = 2$, il faut choisir la décomposition :$3 + 3 + 3 + \ldots + 3 + 2$ (q termes égaux à 3).

Vous avez ensuite certainement essayé de **tester cette conjecture** avec d'autres nombres : « Ça marche ! ». Mais peut-on être sûr du résultat ? N'y a-t-il pas un nombre pour lequel cette conjecture ne marche pas ? En mathématiques, il ne suffit pas de vérifier une conjecture sur plusieurs exemples pour être sûr de sa validité : il faut **démontrer** qu'elle est vraie, quel que soit le nombre n choisi.

Voici quelques éléments de cette démonstration.

Propriété 1 : Une décomposition ne doit pas comporter le nombre 1. Si c'est le cas, on obtient une « meilleure décomposition » (c'est-à-dire une décomposition dont le produit des termes est supérieur) en remplaçant l'un des nombres de la décomposition par son successeur.

Preuve : En effet, on a toujours $x+1>x\times 1$

Propriété 2 : Une décomposition ne doit pas comporter de nombre supérieur à 4.

Preuve : Soit x un nombre d'une décomposition tel que $x>4$. On obtient une « meilleure décomposition » en remplaçant x par $(x-2)$ et 2

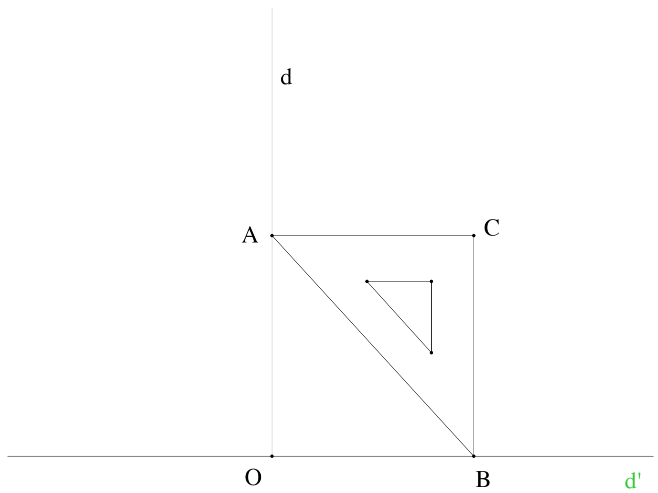
En effet : $(x-2)\times 2>x$, car la différence $(x-2)\times 2-x$ (qui est égale à $x-4$) est strictement positive.

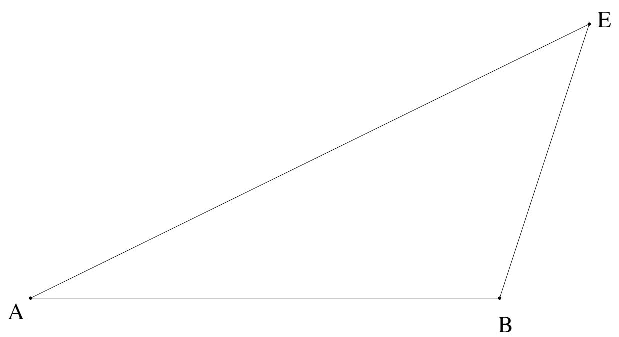
Propriété 3 : Une décomposition ne doit pas comporter plus d'une fois le nombre 4.

Preuve : On obtient une « meilleure décomposition » en remplaçant 4 + 4 par 3 + 3 + 2, car 3 x 3 x 2 > 4 x 4.

7. Les TICE : un outil formidable

a) Un outil pour conjecturer : Cabri, Géoplan

Pour la recherche d'un lieu géométrique : *« Comment se déplace le point C lorsqu'on fait glisser l'équerre avec le point A sur la demi-droite d et le point B sur la droite d' ? »* Animation sur le site académique de Reims http://dialog.ac-reims.fr/math-pbouverts/	

Pour la recherche d'un point : *« Comment construire un triangle ABE de base [AB] donnée, de même aire que ABC mais de périmètre minimum.»* Animation sur le site académique de Reims http://dialog.ac-reims.fr/math-pbouverts/	

b) <u>Un outil pour résoudre : Excel</u>

On donne le jeu suivant :
« Chacun des deux joueurs tire au hasard un nombre entier entre 1 et 1000. Si les deux nombres sont premiers entre eux, c'est le joueur A qui gagne, sinon, c'est le joueur B qui gagne. »
Le jeu est-il équitable ?

On peut donner ce problème ouvert en troisième à la suite de la leçon sur l'arithmétique. Quelques pré-requis sont alors nécessaires.

Les élèves sont familiarisés avec le logiciel Excel et ont déjà programmé le calcul du pgcd de deux nombres.

Les ordinateurs sont à la disposition des élèves, mais ne sont pas ouvertement proposés pour la résolution du problème. Les élèves doivent en manifester le besoin. Il est donc souhaitable de disposer d'une salle mixte (tables et postes informatiques).