Planning familial !

Dans certains pays, il est recommandé aux couples qui désirent fonder une famille, d'avoir des enfants jusqu'à ce que les deux sexes soient représentés.

1) Réaliser des simulations de 100 familles, de 1000 familles…

2) Estimer le nombre moyen d'enfants de la famille.

Avec ALGOBOX :

```
VARIABLES
  gars EST_DU_TYPE NOMBRE
  fille EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  nb_enfant EST_DU_TYPE NOMBRE
  total EST_DU_TYPE NOMBRE
  moyenne EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  total PREND_LA_VALEUR 0
  AFFICHER "Taille de l'échantillon ? :"
  LIRE n
  AFFICHER n
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    gars PREND_LA_VALEUR 0
    fille PREND_LA_VALEUR 0
    nb_enfant PREND_LA_VALEUR 0
    TANT_QUE (gars==0 OU fille==0) FAIRE
    total PREND_LA_VALEUR total+nb_enfant
    FIN_POUR
  moyenne PREND_LA_VALEUR total/n
  AFFICHER "Nombre moyen d'enfants "
  AFFICHER moyenne
  AFFICHER "  pour ces "
  AFFICHER n
  AFFICHER "  familles."
FIN_ALGORITHME
```

```
***Algorithme lancé***

Taille de l'échantillon ? :2000

Nombre moyen d'enfants 2.987 pour
ces 2000 familles.
```

La loi de probabilité est :

nombre d'enfants	2	3	4			k		
probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$			$\frac{1}{2^{k-1}}$		
	GF ou FG	GGF ou FFG	GGGF ou FFFG					

La moyenne est $\sum_{k=1}^{+\infty} \quad (k+1) \ . \ \frac{1}{2^k}$ = 3

(rappel : $\sum_{k=0}^{n} \quad \frac{k+1}{2^k}$ - $\sum_{k=0}^{n} \quad \frac{1}{2^k}$ =

$1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}$ = $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \quad \frac{k+1}{2^k} - \frac{n+1}{2^{n+1}}$

comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}} = 0$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \quad \frac{k+1}{2^k} = 2\ .2 = 4$)

<u>Un exercice similaire</u> : on lance un dé à 6 faces et on s'arrête lorsque les 6 nombres (1,2,3,4,5,6) sont obtenus.

Avec ALGOBOX :

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  total EST_DU_TYPE NOMBRE
  moyenne EST_DU_TYPE NOMBRE
  T EST_DU_TYPE LISTE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  nb_jet EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  total PREND_LA_VALEUR 0
  AFFICHER "Taille de l'échantillon ? :"
  LIRE n
  AFFICHER n
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    POUR i ALLANT_DE 1 A 6
      DEBUT_POUR
      T[i] PREND_LA_VALEUR 0
      FIN_POUR
    nb_jet PREND_LA_VALEUR 0
    TANT_QUE (T[1]*T[2]*T[3]*T[4]*T[5]*T[6]==0) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      i PREND_LA_VALEUR floor(random()*6)+1
      T[i] PREND_LA_VALEUR 1
      nb_jet PREND_LA_VALEUR nb_jet+1
      FIN_TANT_QUE
    total PREND_LA_VALEUR total+nb_jet
    FIN_POUR
  moyenne PREND_LA_VALEUR total/n
  AFFICHER "Nombre moyen de jets "
  AFFICHER moyenne
  AFFICHER " pour ces "
  AFFICHER n
  AFFICHER " expériences."
FIN_ALGORITHME
```

Algorithme lancé

Taille de l'échantillon ? :2000
Nombre moyen de jets 14.6525 pour ces 2000 expériences.

Le calcul théorique demande un peu d'agilité dans le maniement des coefficients binomiaux. Dans le cas où 3 résultats sont possibles (par exemple « abc »), la loi de probabilité est :

première apparition des 3 lettres	3	4	5			k pair	k impair	
probabilité	$\frac{3!}{3^3}$	$\frac{\binom{3}{1}3.2}{3^4}$	$\frac{\binom{4}{1}+\binom{4}{2}}{3^5}3.2$			$\frac{\binom{k-1}{1}+\binom{k-1}{2}+\cdots+\binom{k-1}{[\frac{k-1}{2}]}}{3^k}3.2$	$\frac{\binom{k-1}{1}+\binom{k-1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\binom{k-1}{\frac{k-1}{2}}}{3^k}3.2$	
	abc, acb, bac, bca, cab, cba	aabc, abac, baac, abbc, ….	on place une lettre dans les 4 premiers tirages et une seconde ; la lettre du 3° tirage est alors celle qui reste					

En utilisant les propriétés combinatoires et en séparant les valeurs paires :

$$\sum_{k=4}^{n} \quad n.\frac{\binom{k-1}{1}+\binom{k-1}{2}+\cdots+\binom{k-1}{[\frac{k-1}{2}]}}{3^k}3.2 = \sum_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} \quad (2j+2)\frac{4^j-1}{3^{2j+2}}3.2$$ qui a pour limite $\frac{1053}{400}$

et impaires

$$\sum_{k=0}^{n} \quad n.\frac{\binom{k-1}{1}+\binom{k-1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\binom{k-1}{\frac{k-1}{2}}}{3^k}3.2 = \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} \quad (2j+3)\frac{2.4^j-1}{3^{2j+3}}3.2$$ qui a pour limite $\frac{1147}{400}$

et la moyenne est $\quad \frac{1053}{400} + \frac{1147}{400} = \frac{11}{2}$