Un problème ouvert et ses prolongements

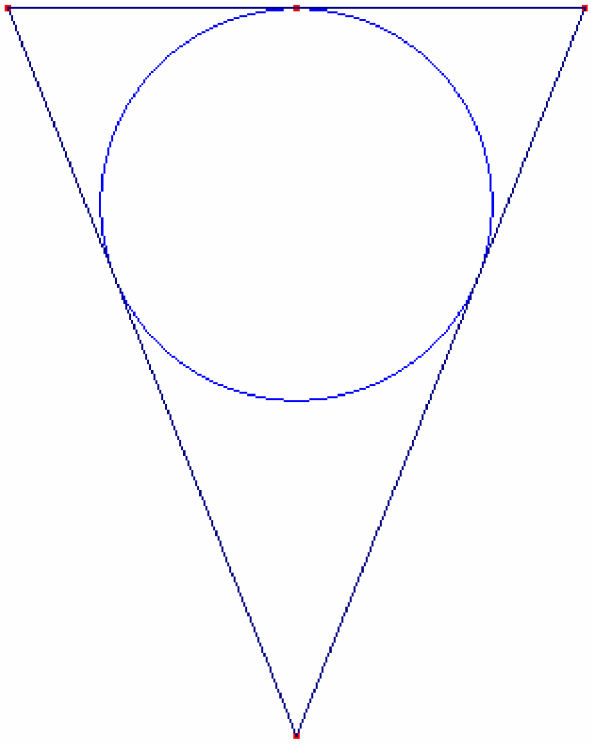
Le but de cet article est de montrer qu'à partir d'un problème ouvert de 4ème on peut faire surgir des solutions ou prolongements touchant les divers niveaux d'enseignement.
Avec cet exercice et ses prolongements on peut donc faire revoir Pythagore, Thalès, la trigo, les équations, les volumes, les agrandissements réductions, aborder les suites géométriques, les logarithmes, l'usage de la calculatrice, d'un logiciel de calcul formel comme Maple etc.

Le départ de cette étude est un problème classique posé par mon ami B Vinter au Rallye Mathématiques sans frontière en 2007

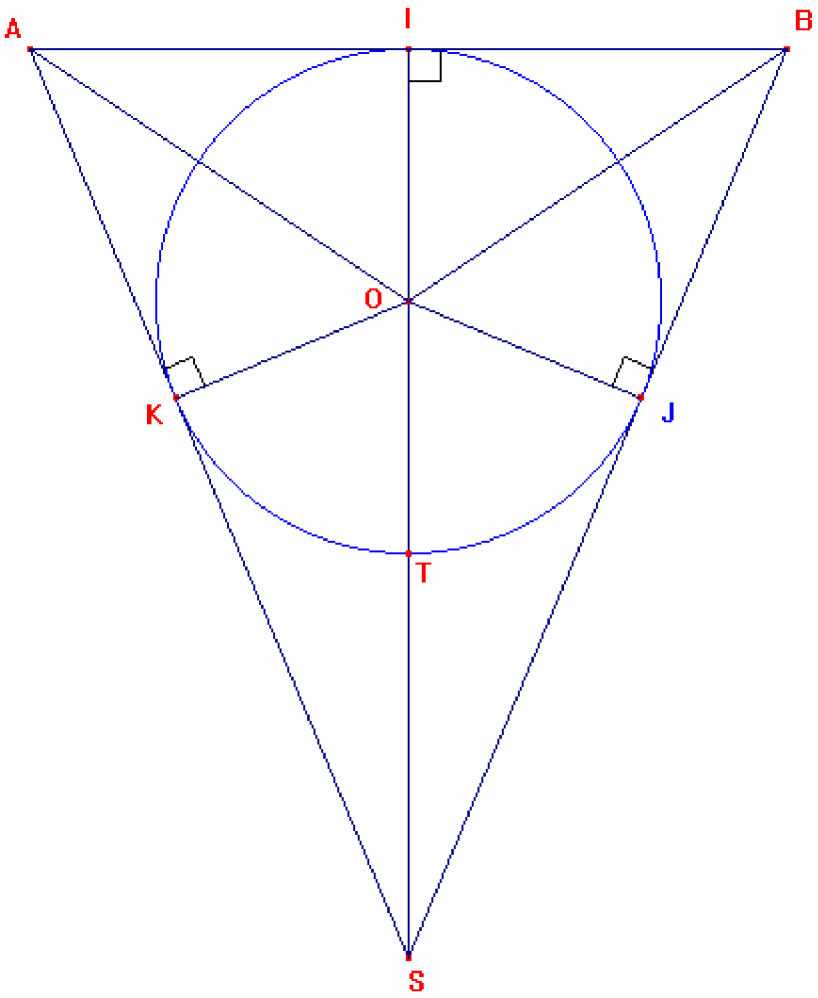
Le texte initial était le suivant et s'adressait à des élèves de troisième et seconde qui composait en classe entière :

La coupe est pleine :

Une bille sphérique est placée dans un verre conique ; elle touche les bords du verre et affleure le plan supérieur du verre conformément au schéma ci dessous
Le diamètre du verre est de 10 cm et sa hauteur est de 12 cm
Calculer le rayon de cette bille



Solution : La coupe est pleine



Il s'agit d'un problème de géométrie dans l'espace que l'on ramène au plan en coupant par un plan médiateur ce qui a été fait dans le dessin joint à l'énoncé

Solution 1 (niveau 4ème) calcul d'aire et théorème de Pythagore ; donne une valeur exacte

Calculons l'aire du triangle IBS de deux façons en posant OI = OJ = OK = R

Aire IBS = $\frac{IB \times IS}{2} = \frac{5 \times 12}{2}$ et Aire IBS = Aire IBO + Aire BOS = $\frac{R \times 5}{2} + \frac{BS \times R}{2}$

Calcul de BS : Pythagore dans le triangle rectangle IBS : $BS^2 = IB^2 + IS^2 = 5^2 + 12^2 = 169$
donc BS = 13
On a donc

$\frac{5 \times 12}{2} = \frac{R \times 5}{2} + \frac{13 \times R}{2}$ soit 60 = 5R + 13R d'où 18R = 60 et $\boxed{R = \frac{60}{18} = \frac{10}{3} \text{ cm}}$

Pour faire plus compliqué : Solution 2 (niveau 3ème) utilise le calcul trigonométrique
mais donne une valeur approchée sauf si l'on utilise judicieusement la calculatrice fx 92 ou fx 92collège 2D (peut-être existe t- il d'autres modèles que je ne connais pas)

Dans le triangle rectangle ISB $\tan \widehat{ISB} = \frac{5}{12}$ donc $\widehat{ISB} = \tan^{-1}(\frac{5}{12})$

Dans le triangle rectangle OSJ, $\sin \widehat{ISB} = \frac{R}{12-R}$ donc

$\sin(\tan^{-1}(\frac{5}{12}) = \frac{R}{12-R}$

A partir de là, cela dépend de la calculatrice utilisée

a. Sur la 2D $\sin(\tan^{-1}(\frac{5}{12})) = \frac{5}{13}$ donc l'équation devient $\frac{5}{13} = \frac{R}{12-R}$ soit $5(12-R) = 13\,R$ et l'on retrouve $\boxed{R = \frac{60}{18}\text{ cm}}$

b. Sur la fx92 normale on tape ($\tan^{-1}(5/12) =$ puis sin Ans puis d/c et on retrouve $\frac{5}{13}$

Sinon on utilise le calcul approché mais on trouvera environ 3,3 cm

<u>Pour vraiment faire savant et compliquer un peu : Solution 3</u> (niveau 1ère) avec la trigo, les équations du second degré , Pythagore et les identités remarquables

Dans le triangle rectangle ISB $\tan \widehat{ISB} = \frac{5}{12}$

Dans le triangle rectangle OSJ $\tan \widehat{ISJ} = \frac{R}{SJ}$ et d'après la propriété de Pythagore

$SJ = \sqrt{(12-R)^2 - R^2}$ soit en factorisant $SJ = \sqrt{12(12-2R)}$

On a donc : $\frac{5}{12} = \frac{R}{\sqrt{12(12-2R)}}$ soit, en élevant au carré, $(\frac{5}{12})^2 = \frac{R^2}{12(12-2R)}$ ce qui donne :

$\frac{25}{12} = \frac{R^2}{12-2R}$ ce qui se transforme en : $6R^2 + 25R - 150 = 0$, équation de second degré dont le discriminant est : $\sqrt{25^2+4\times900} = \sqrt{4225} = 65$

La racine positive est donc : $\frac{-25+65}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$ et laborieusement on retrouve $\boxed{R = \frac{10}{3}\text{ cm}}$

<u>Variante</u> : On peut également montrer que l'on est expert sur la trigo :

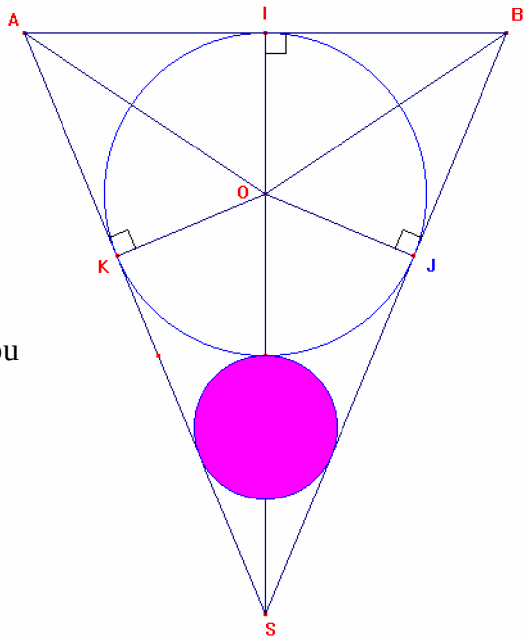
Le cercle de centre O est le cercle inscrit dans le triangle ABS et a donc pour centre le point de concours de bissectrices de ce triangle. On a donc $\widehat{IBO} = \frac{\widehat{IBS}}{2}$

On a vu que $\tan \widehat{ISB} = \frac{12}{5}$ et $\tan \widehat{IBO} = \frac{IO}{IB} = \frac{R}{5}$

On sait que $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$ donc on a $\frac{12}{5} = \frac{2\times\frac{R}{5}}{1 - \left(\frac{R}{5}\right)^2}$ ce qui redonne l'équation du second degré.

Prolongements :

A)*Et si l'on recommençait ?*
(pour utiliser Thales et les rapports de réduction) :



Trouver le rayon de la boule colorée ?

Solution :

Traçons la droite tangente aux deux cercles
On reconnaît alors une figure caractéristique de Thalès (ou une homothétie de centre S)

Le rapport est de $\frac{12-2R}{12}$ soit $\frac{12-\frac{20}{3}}{12}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$

Le rayon de la seconde bille est donc de $\frac{10}{3}\times\frac{4}{9}=\frac{40}{27}$ cm

Sur la lancée, pourquoi ne pas demander une construction du centre de cette petite boule ?

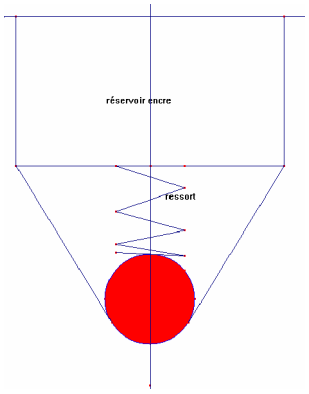
Appelons L le point d'intersection de la tangente commune aux deux cercles autre que (SA) et (SB) avec le segment [AS].
$\frac{SL}{SA}$ est le rapport de réduction et, toujours en utilisant Thalès, il suffit de tracer la parallèle à la droite (AO) passant par L ; cette droite coupe (SI) au point cherché, centre du cercle coloré

Et si l'on continuait le processus (pour les 1ère ou terminales) ??

Les rayons des boules successives sont en progression géométrique de premier terme $\frac{10}{3}$ de raison $\frac{4}{9}$ et l'on pourrait alors en utilisant les logarithmes demander à partir de quel rang la boule a un rayon inférieur à 10^{-2} cm mais ….. je vous laisse le soin de finir les calculs

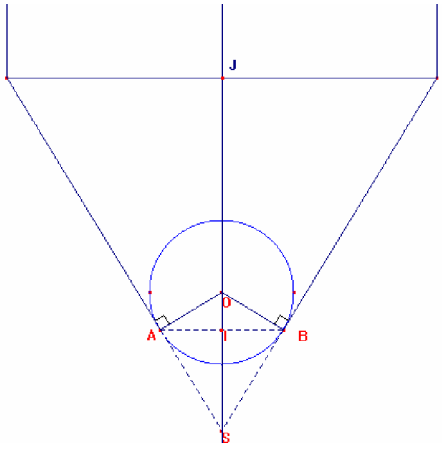
Et si l'on renversait le cône ?
Puisque nous sommes avec une bille de rayon très petit cela peut nous faire penser à la bille du stylo et générer un autre problème en « renversant le problème » :

Une bille de stylo a un diamètre de $\frac{2}{10}$ mm et elle doit être a la pointe d'un cône sans pouvoir « s'évader » et le cône doit être tangent a la bille comme sur le dessin ci-contre



a)donner une condition pour que la bille ne puisse pas tomber
b) on considère qu'un bon compromis est réalisé lorsque la bille sort du tronc de cône du quart de son rayon ; faire un dessin puis calculer l'angle au sommet du cône et la distance du sommet ou l'on doit tronquer ce cône
c) calculer la hauteur du cône pour que celui-ci s'adapte sur le cylindre réservoir de 1mm de diamètre

Solution : on fait le dessin en coupe



Si R est le rayon de la bille OA =OB =R et OI = $\frac{R}{2}$

Dans le triangle rectangle IOB la propriété de Pythagore permet d'écrire cos $\widehat{IOB} = \frac{OI}{OB} = \frac{1}{2}$ donc puisque $\cos^{-1}(\frac{1}{2})$ *=60 on a* $\widehat{IOB}$ = 60° et son complémentaire dans le triangle rectangle OSB est $\widehat{OSB}$ donc $\widehat{OSB}$ = 30°

L'angle $\widehat{ASB}$ a donc pour mesure 60°

Dans le triangle rectangle OSB on peut calculer OS : sin $\widehat{OSB} = \frac{OB}{OS}$ donc OS = $\frac{R}{\sin \widehat{OSB}}$ d'où

OS = $\frac{10^{-1}}{\sin 30°} = \frac{10^{-1}}{0,5} = 2\times 10^{-1}$ mm d'où SI = SO – OI = $2\times10^{-1} - \frac{10^{-1}}{2} = \frac{3}{2}10^{-1}$mm

On doit donc couper le cone à une distance de 0,15 mm du sommet.

Pour calculer la hauteur du cone à prévoir pour l'emboîtement avec le réservoir d'encre il nous suffit d'appliquer la propriété de Thalès dans le triangle SJK en calculant auparavant IB

On trouve $IB^2 = OB^2 - OI^2 = (10^{-1})^2 - (\frac{10^{-1}}{2})^2 = 10^{-2} - \frac{10^{-2}}{4} = \frac{3}{4}\times 10^{-2}$ d'où IB = $\sqrt{\frac{3\times10^{-2}}{4}}$

IB = $\frac{\sqrt{3}\,10^{-1}}{2}$ mm

On a donc $\frac{SI}{SJ} = \frac{IB}{JK}$ soit $\frac{\frac{3}{2}10^{-2}}{SJ} = \frac{\frac{\sqrt{3}\,10^{-1}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\,10^{-1}$

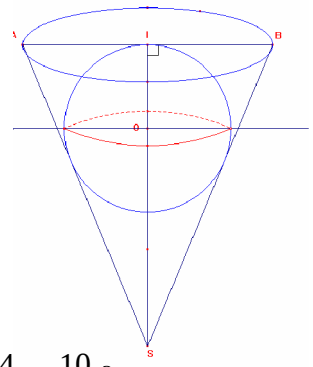
donc SJ = $\frac{\frac{3}{2}10^{-2}}{\sqrt{3}\,10^{-1}} = \frac{3\times10^{-1}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 10^{-1}$mm **SJ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 10 $^{-1}$mm**

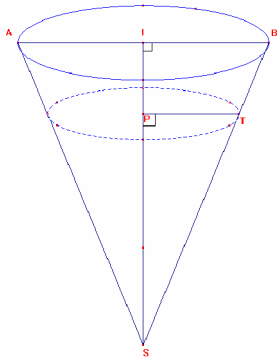
B) ***Pourquoi rester dans le plan ?***

Des élèves de troisième (pugnaces, j'en conviens) pourraient répondre à cette question à condition d'avoir vu la touche inv x^3 ou racine cubique :

Le verre est rempli d'eau ; on enlève la boule.

A quelle hauteur l'eau arrive t'elle dans le verre ?





Solution :

Volume du cône : $\frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 12$. Volume de la boule : $\frac{4}{3}\pi \left(\frac{10}{3}\right)^3$

Volume d'eau : $\frac{\pi}{3}\left(5^2 \times 12 - \frac{4000}{27}\right)$

Ce volume est égal au volume d'un cône de hauteur SP ; le rayon de base est [PT]

D' après la propriété de Thalès on a : $\frac{SP}{SI} = \frac{PT}{IB}$ donc ,en posant SP = h et PT = r , on a : $\frac{h}{12} = \frac{r}{5}$

donc $r = \frac{5h}{12}$

Le volume d'eau est donc : $\frac{1}{3}\pi r^2 \times h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{5h}{12}\right)^2 \times h = \frac{1}{3}\pi \frac{25\,h^3}{144}$

D'où l'équation : $\frac{\pi}{3}\left(5^2 \times 12 - \frac{4000}{27}\right) = \frac{1}{3}\pi \frac{25\,h^3}{144}$

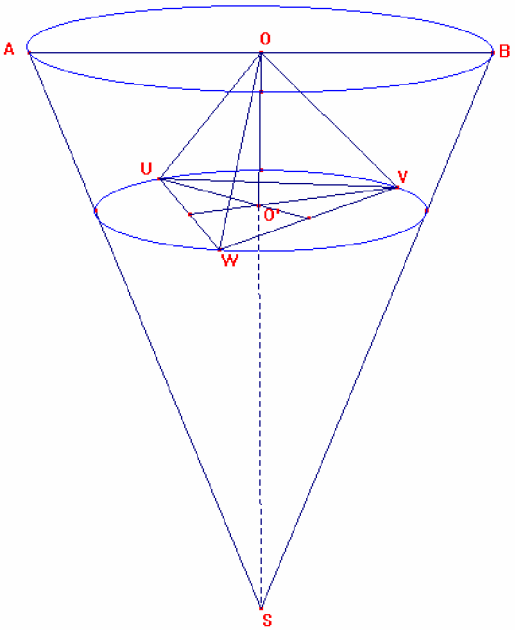
$$\frac{\pi}{3}\left(300 - \frac{4000}{27}\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{25h^3}{144}\right)$$

$$\frac{4100}{27} = \frac{25\,h^3}{144}$$

$$\frac{4100 \times 144}{27 \times 25} = h^3$$

d'où $h^3 = \frac{2624}{3}$

soit, en utilisant la calculatrice : $\boxed{h \approx 9{,}56 \text{ cm}}$

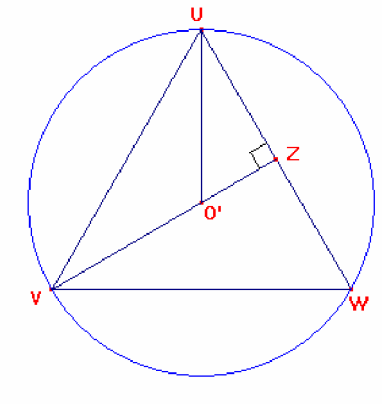


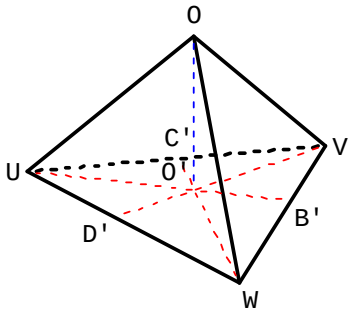
C) Ras la boule : Et si l'on changeait l'objet dans la coupe ?

On introduit un tétraèdre régulier « base vers le bas » de manière à ce que son sommet affleure le disque supérieur en son centre.
Même question :
Quel doit être la mesure d'une arête du tétraèdre

Solution :

La base du tétraèdre est un plan horizontal et plus précisément dans la section du cône par un plan horizontal. Or d'après le cours de 3ème on sait que cette section est un disque D dont le rayon dépend de la cote du plan parallèle a la base. La distance à la base de ce plan est égale à la hauteur du tétraèdre. Les trois sommets du triangle équilatéral formant la base du tétraèdre sont sur le disque D. Dans ce cas il ne faut pas couper par un plan passant par l'axe du cône car la section du tétraèdre ne serait pas un triangle équilatéral





Soit x la longueur d'une arête.
O' est le centre de gravité du triangle équilatéral UVW et les médianes sont aussi hauteurs

Dans le triangle rectangle VD'W calculons VD' à l'aide de la pp de Pythagore

$VD'^2 = x^2 - (\frac{x}{2})^2 = \frac{3}{4}x^2$ d'où $VD' = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

D'après la pp du centre de gravité VO' est egal au $\frac{2}{3}$ de VD' donc $VO' = \frac{2}{3} \times \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$

Dans le triangle rectangle OO'V d'après la pp de Pythagore :

$OO'^2 = OV^2 - O'V^2 = x^2 - (\frac{x\sqrt{3}}{3})^2 = x^2 - \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3}x^2$ donc $OO' = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{6}}{3}$

Pour que le sommet du tétraèdre soit en O, il faut que le disque contenant sa base soit dans un plan tel que $OO' = \frac{x\sqrt{6}}{3}$

Le rapport de réduction est donc $\frac{SO'}{SO} = \frac{12 - \frac{x\sqrt{6}}{3}}{12} = \frac{36 - x\sqrt{6}}{36}$

Cherchons alors quelle relation lie le coté du triangle équilatéral UVW et le rayon de son cercle circonscrit

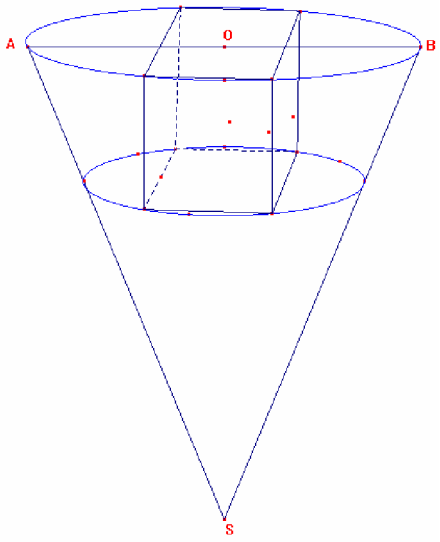
Dans le triangle rectangle UO'Z, $\cos \widehat{UO'Z} = \frac{O'Z}{O'U}$ donc $\cos 60° = \frac{O'Z}{r}$ en posant r rayon du cercle circonscrit au triangle UVW donc $\frac{1}{2} = \frac{O'Z}{r}$ soit $O'Z = \frac{r}{2}$

D'après la pp de Pythagore dans ce même triangle $UZ^2 = r^2 - (\frac{r}{2})^2 = \frac{3r^2}{4}$ donc $UZ = r\frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc puisque UW = 2 UZ on a $UW = r\sqrt{3}$ donc $x = r\sqrt{3}$ soit $r = \frac{x\sqrt{3}}{3}$

D'après la pp de Thalès le rapport des rayons des deux disques doit être égal à $\frac{SO'}{SO}$ donc

$$\frac{x\frac{\sqrt{3}}{3}}{5} = \frac{36 - x\sqrt{6}}{36} \text{ soit } x = \frac{180}{12\sqrt{3} + 5\sqrt{6}} \text{ soit } \boxed{x \approx 5{,}45 \text{ cm}}$$

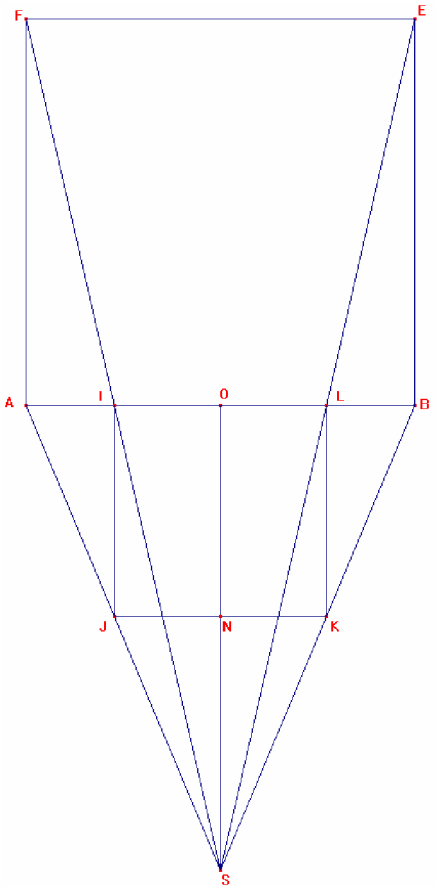
D) On peut alors revenir à bien plus simple et plus classique :
Et si l'objet était un cube ?



Solution

Ici c'est un problème connu et la construction de la figure
déterminée par un plan sécant passant par l'axe du cône ne l'est pas moins :

C'est le célèbre : comment inscrire un carré dans un triangle :



On construit un carré ABEF extérieur que l'on ramène dans le triangle par une homothétie de centre S et de rapport $\frac{SN}{SO} = \frac{12 - x}{12}$ si x désigne le coté du cube
et d'après la pp de Thalès appliquée aux deux parallèles (AB) et (JK) coupées par les sécantes (SO) et (SB)
On a :

$$\frac{12 - x}{12} = \frac{\frac{x}{2}}{5} \text{ soit } 10(12 - x) = 12\,x$$

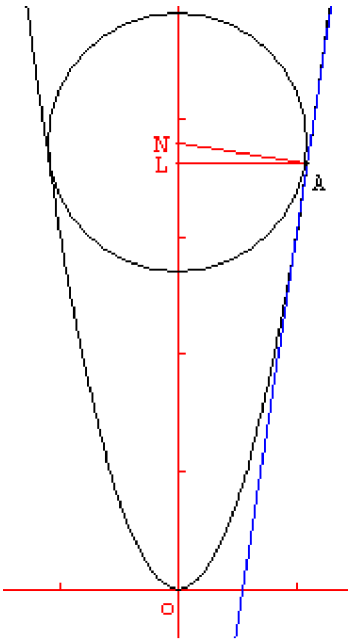
$$120 = 22\,x$$

$$\frac{120}{22} = x$$

Donc $\boxed{x = \frac{60}{11} \text{ cm}}$

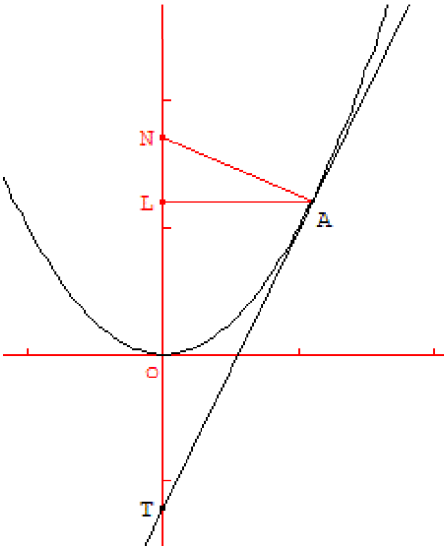
E) Et pour finir si l'on changeait de récipient ?

Prenons une coupe de forme paraboloïdale de 12 cm de haut et dont le disque supérieur a 4 cm de diamètre



Solution

Commençons par un rappel pour ceux qui n'ont pas eu la «chance» d'étudier en terminale les coniques :



Soit P la parabole d'équation $y = f(x) = k\,x^2$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout point A d'abscisse a non nulle

Soit L le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées,
soit T le symétrique T de L par rapport à O,
La droite (AT) est la tangente à la parabole P au point A.

La tangente a donc pour équation $y = f'(a)\,x - f(a)$.

On dit que [LT] est la sous-tangente ; la sous-tangente à la parabole a un milieu fixe : le point O.

La perpendiculaire, au point de contact A, à la tangente coupe l'axe des ordonnées en N.
La parallèle à l'axe des abscisses passant par A coupe l'axe des ordonnées en L.
Quelque soit le point A, distinct de O, le segment [LN] a une longueur constante.

[LN] est appelé sous-normale. Sa longueur est le paramètre p = LN = $\frac{1}{2k}$ de la parabole d'équation :

$y = k\,x^2 = \frac{1}{2p}x^2$ (si k > 0).

Ici commençons par déterminer l'équation de la parabole :

Son équation, rapportée au repère tracé en rouge ci-dessus, a pour forme $y = k\,x^2$

Elle passe par le point (2,12) donc son équation est $y = 3\,x^2$

Son paramètre est donc de $\frac{1}{6}$ et donc ici NL = $\frac{1}{6}$ et OL = $3a^2$ (a est l'abscisse de A)

Puisque N désigne le centre de la boule ; [NA] est un rayon.

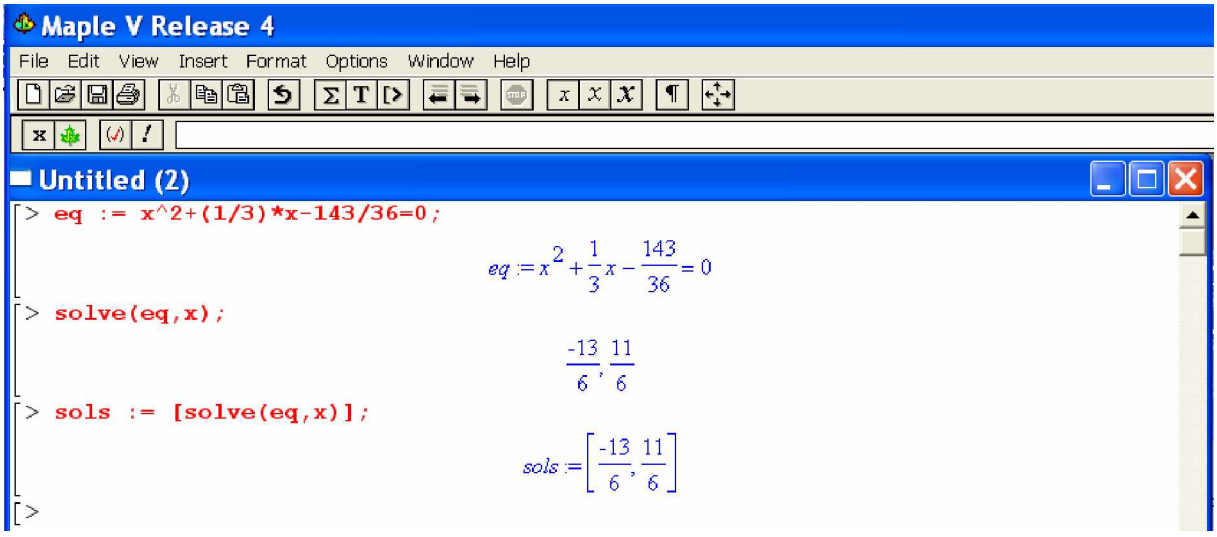
Posons NA = x ; la hauteur du vase étant de 12 cm on a : $x + \frac{1}{6} + 3a^2 = 12$

De plus LA = a donc, dans le triangle rectangle NLA, la propriété de Pythagore donne :

$(\frac{1}{6})^2 + a^2 = x^2$ ce qui nous fait : $\begin{cases} x+\frac{1}{6} + 3a^2 = 12 \\ (\frac{1}{6})^2 + a^2 = x^2 \end{cases}$ qui se résout par substitution

On a : $a^2 = 4 - \frac{x}{3} - \frac{1}{18}$ et en reportant dans la deuxième équation : $x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{143}{36} = 0$

Le logiciel Maple permet de résoudre sans effort cette équation :



On obtient donc x = $\frac{11}{6}$ cm pour rayon de la boule