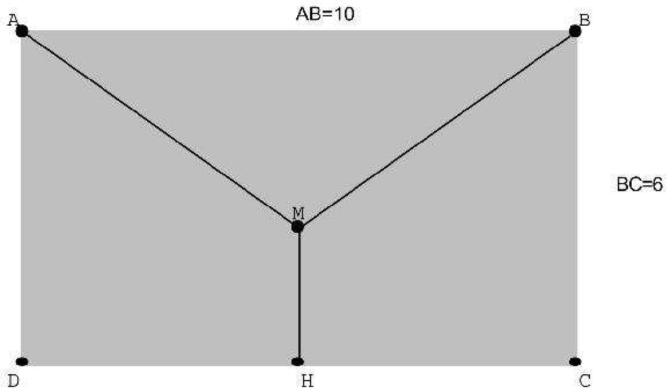
Problème d'optimisation

Énoncé

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluies pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

On donne ci-dessous le plan de cette façade ainsi que quelques dimensions, exprimées en mètre.



Sur ce plan :
- $[AM]$ et $[BM]$ représentent les deux premiers tuyaux
- $[MH]$ représente le troisième tuyau
- (MH) est la médiatrice de $[DC]$.

On souhaite trouver la position du point M sur la façade de cette maison qui permet de minimiser la longueur des tuyaux à acheter et donc la dépense à effectuer.

On note Q le projeté orthogonal de M sur (BC) et on prend comme variable la mesure en radian de l'angle aigu $\widehat{BMQ} = \theta$.

1. (a) Utiliser un logiciel de géométrie pour simuler la situation décrite précédemment

   (b) En déduire une valeur approchée au centième de la valeur de θ qui rend minimale la longueur des tuyaux. Déterminer, grâce au logiciel, une valeur approchée au centième de la longueur minimale totale des tuyaux.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction et des réponses trouvées.

2. On définit la fonction $g : \theta \to g(\theta) = 2MA + MH$ sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.

(a) On note g' la fonction dérivée de g. Démontrer que $g'(\theta) = 5 \times \dfrac{2\sin\theta - 1}{(cos\theta)^2}$.

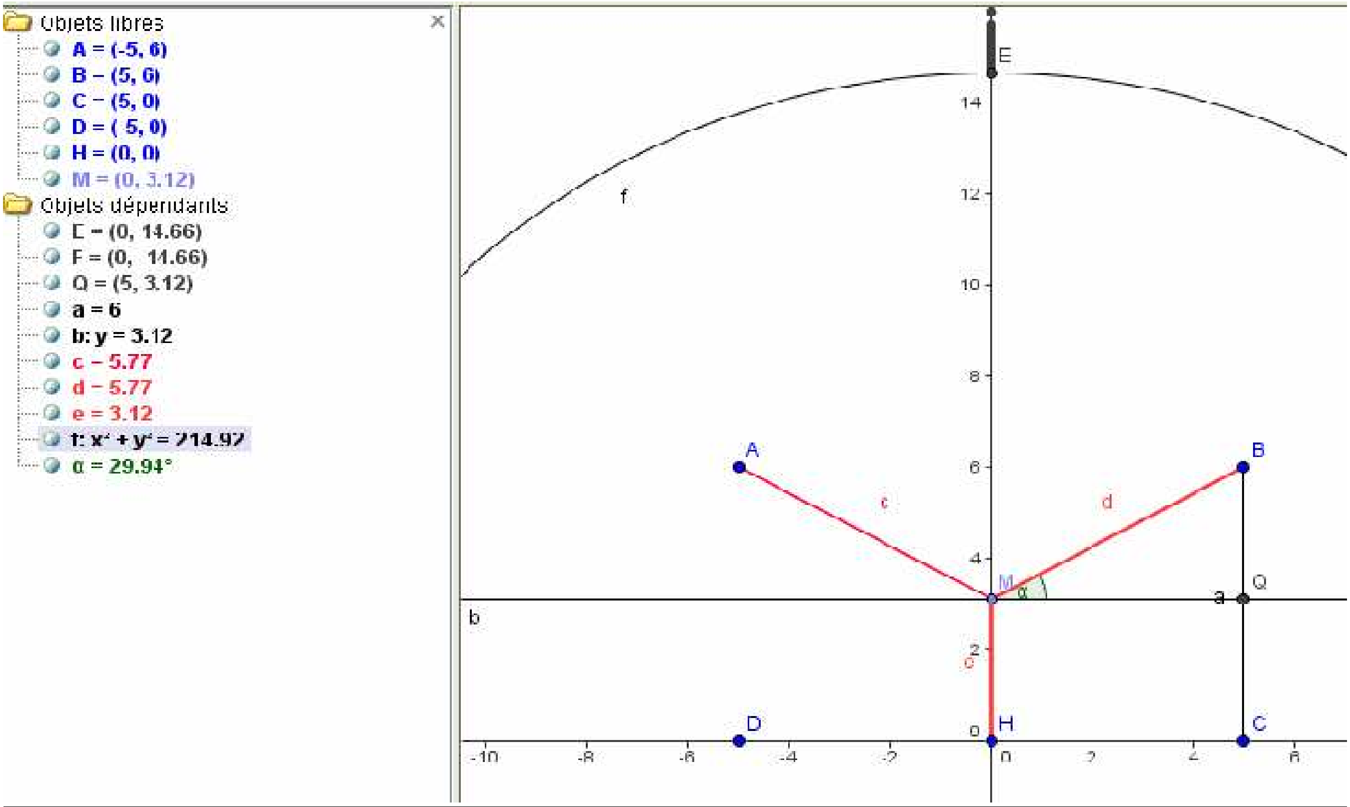
(b) Déterminer la valeur exacte de θ qui minimise la longueur des tuyaux.

Production demandée

– Les réponses attendues dans la question 1.
– Les démonstrations attendues dans la question 2.

<u>Quelques commentaires personnels sur la fiche 003</u>

Réalisation avec Géogébra :



L'exploration assez facile semble indiquer la valeur particulière 30° (si les angles ne sont pas en radians !)
Avec un peu de trigonométrie du triangle, il vient :
$g(\theta) = 2 \times \dfrac{5}{\cos(\theta)} + 6 - 5\tan(\theta)$ et $g'(\theta) = \dfrac{10\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} - 5 - 5\tan^2(\theta) = 5\dfrac{2\sin(\theta) - 1}{\cos^2(\theta)}$ et le minimum observé

<u>Conclusion : sujet plutôt intéressant</u>

26/07/2008 Claude Poulin Nouméa