BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

Affirmation 1.
Pour tout réel a strictement positif, $\ln(a^3) - \ln(a^2) = \ln(a^{25}) - \ln(a^{24})$.

Affirmation 2.
Si la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur [0 ; 100], alors $P(X < 75) = P(X > 25)$.

Affirmation 3.
On a prélevé un échantillon aléatoire de 400 pièces dans une production et observé 6 pièces défectueuses. La borne supérieure de l'intervalle de confiance de la proportion de pièces défectueuses dans la production au niveau de confiance de 95% est égale à 0,08.

Affirmation 4.
L'équation $x \ln(x) = 2 \ln(x)$ admet exactement deux solutions : 2 et 1 sur $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 2 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

En 2012, un village ne comptait qu'un seul médecin, Albert. Début 2013, un nouveau médecin, Brigitte, s'installe dans ce village.
À l'arrivée de Brigitte, 90% des habitants du village choisirent Albert comme médecin, les autres choisirent Brigitte. On suppose que chaque habitant du village est patient du même médecin, Albert ou Brigitte, tout au long d'une année. On observe, à partir de 2013, que chaque année :

- 13% des patients d'Albert changent de médecin et deviennent des patients de Brigitte ;
- 8% des patients de Brigitte deviennent des patients d'Albert.

On choisit au hasard un habitant de ce village. Pour tout entier naturel n,
a_n est la probabilité que cet habitant soit un patient d'Albert pour l'année (2013+n),
b_n est la probabilité que cet habitant soit un patient de Brigitte pour l'année (2013+n),
$P_n = (a_n \quad b_n)$ est la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année (2013+n).

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.

2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.

3. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.

4. Montrer que $P_1 = (0{,}791 \quad 0{,}209)$.

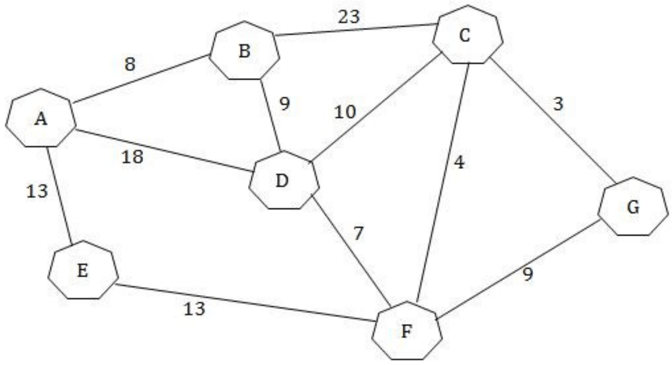
5. Exprimer P_n en fonction de P_0, M et n.

6. En déduire la matrice ligne P_4 et interpréter le résultat. Les résultats seront arrondis au millième.

7. Déterminer l'état stable $(a \quad b)$ de la répartition des patients des médecins Albert et Brigitte. En donner une interprétation.

Partie B

Le médecin Albert, qui officie dans le village A, doit rendre visite à un patient d'un village voisin G. Il a construit le graphe ci-dessous où les sommets représentent les villages alentours. Sur les arêtes sont indiquées les distances en kilomètres.



Déterminer le plus court chemin pour aller du village A au village G.

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Début 2013, la superficie totale des forêts sur la terre représente un peu plus de 4 milliards d'hectares.
Au cours de l'année 2013, on estime qu'environ 15 millions d'hectares ont été détruits.
Des plantations d'arbres et une expansion naturelle des forêts ont ajouté 10,2 millions d'hectares de nouvelles forêts en 2013.

1. Montrer que la superficie totale des forêts détruites au cours de l'année 2013 représente 0,375% de la superficie totale des forêts mesurée au début de l'année.

On admet dans la suite que chaque année, la proportion des surfaces détruites de forêts et la superficie de nouvelles forêts restent constantes.
On note u_n la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre au début de l'année (2013+n) avec $u_0 = 4\,000$.

2. **a.** Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}99625u_n + 10{,}2$.

b. Montrer que la superficie totale des forêts sur la Terre, au début de l'année 2014, en millions d'hectares, est $u_1 = 3\,995{,}2$.

3. Soit (d_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $d_n = u_n - 2\,720$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = 0{,}99625 \times d_n$.

b. Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Calculer d_0.

c. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de d_n en fonction de n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4. **a.** Proposer un algorithme affichant la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre, pour chaque année de 2013 à 2029.

b. À partir de quelle année la superficie des forêts présentes sur la Terre sera inférieure à 3,9 milliards d'hectares ? Préciser la démarche utilisée.

Exercice 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

La courbe (C_1) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-1\ ;\ 2]$.

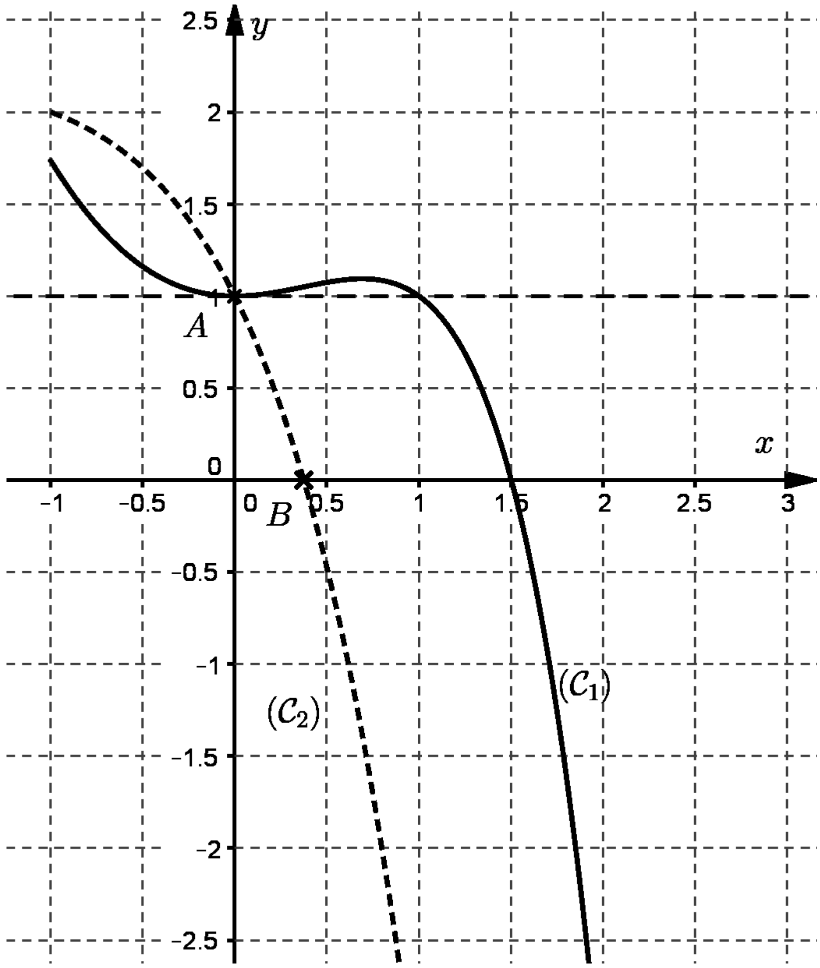
On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.

La courbe (C_2) ci-dessous représente, dans le repère orthonormé, la fonction f''.

Le point A(0 ; 1) est situé sur la courbe (C_1).

Le point B est le point d'intersection de (C_2) avec l'axe des abscisses. Une valeur approchée de l'abscisse de B est 0,37.

La tangente à la courbe (C_1) au point A est horizontale.



1. Par lecture graphique,

a. Donner la valeur de $f(0)$.

b. Donner la valeur de $f'(0)$.

c. Étudier la convexité de f sur $[-1\ ;\ 2]$. Justifier la réponse.

2. On admet désormais que la fonction f est définie pour tout réel x dans $[-1\,;2]$ par :

$$f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{x} + x^2.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	$f(x) := (1-x) * \exp(x) + x^2$ $\rightarrow (1-x)\mathrm{e}^{x} + x^2$
2	factoriser(deriver($f(x)$)) $\rightarrow x(2-\mathrm{e}^{x})$
3	primitive($f(x)$) $\rightarrow \dfrac{1}{3}x^3 + (-x+2)\mathrm{e}^{x}$

a. Vérifier le résultat trouvé par le logiciel pour le calcul de $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-1\,;2]$.

3. a. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[-1\,;\,2]$.

b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01.

4. Déterminer une équation de la tangente à (C_1) au point d'abscisse 1.

5. a. Justifier la ligne 3 du tableau de calcul formel.

b. On admet que la fonction f est positive sur $[-1\,;1]$. En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe (C_1), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$, puis en donner une valeur arrondie au dixième.