Distance d'un point à une courbe

Énoncé

Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction exponentielle et le point B a pour coordonnées $(2; -1)$.
On admet que la distance BM admet un minimum quand M décrit $\mathscr{C}$. Ce minimum est appelé distance du point B à la courbe $\mathscr{C}$.
Le but de l'exercice est de trouver la distance du point B à la courbe $\mathscr{C}$.

Expérimentations

1. Réaliser à l'aide d'un logiciel une figure dynamique correspondant à cette situation.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

   (a) M est un point quelconque de la courbe $\mathscr{C}$. Faire une conjecture sur la position du point M pour laquelle la distance BM semble minimale.
   On appelle ce point M_0.

   (b) Tracer la droite d perpendiculaire en M_0 à la droite (BM_0).
   Quelle semble être la position particulière de la droite d ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures émises et lui indiquer la ou les méthodes de contrôle prévues à la question (c).

   (c) Utiliser le logiciel pour contrôler les conjectures et, éventuellement, les rectifier.

Démonstrations

2. On se propose de déterminer la valeur exacte de la distance du point B à la courbe $\mathscr{C}$.

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les contrôles faits et lui proposer une méthode permettant à la fois de déterminer le point M_0 et la distance du point B à la courbe $\mathscr{C}$.

   (a) Déterminer, par le calcul, la position du point M_0.

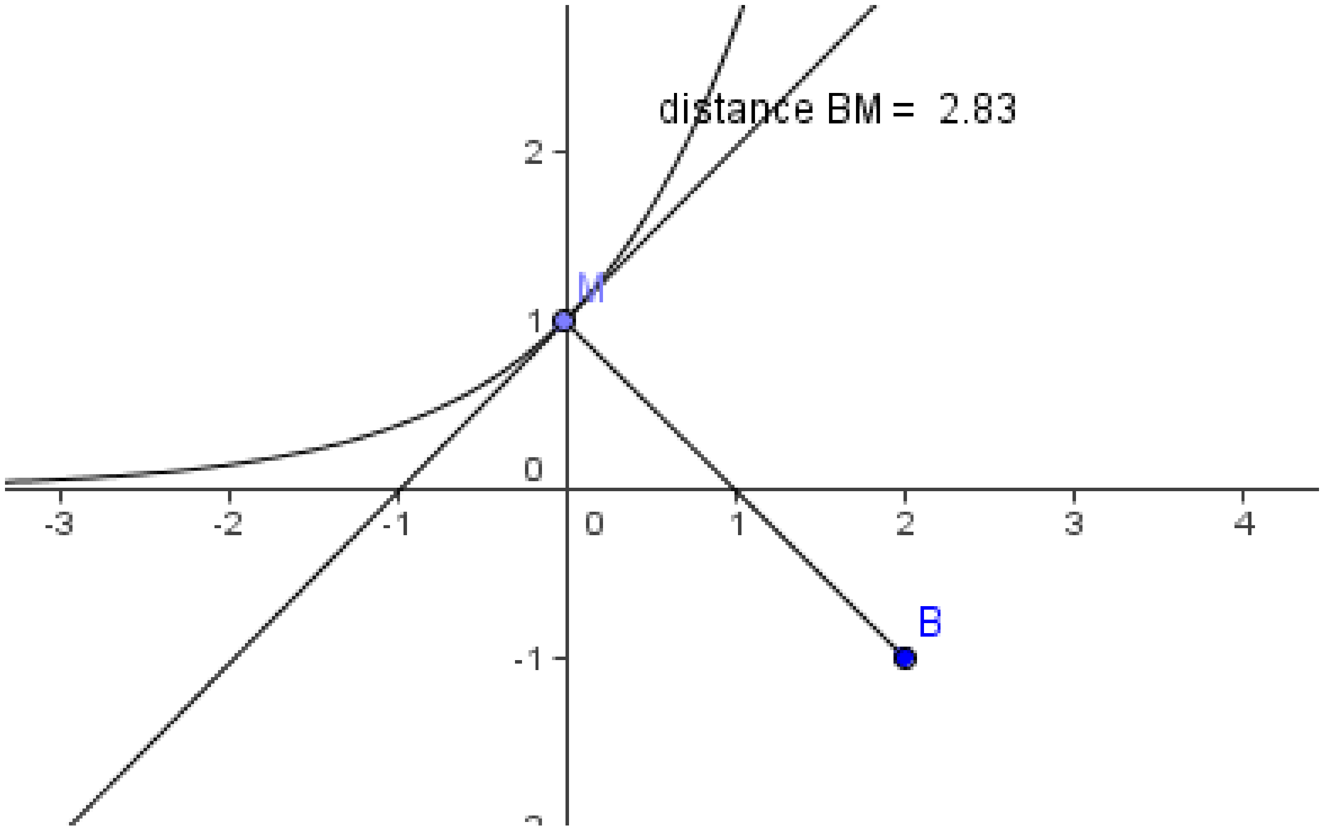
   (b) Quelle est la valeur exacte de la distance du point B à la courbe $\mathscr{C}$?

3. Vérifier, par le calcul, la conjecture formulée au 1.(b).

Production demandée

- Obtention à l'écran de la figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.
- La formulation des conjectures et leur contrôle.
- Les stratégies de démonstration prévues pour répondre à la question 2 et le résultat des calculs.
- La vérification demandée à la question 3.

Quelques commentaires personnels sur la fiche 014
« distance d'un point à une courbe »



Les conjectures à formuler sont intéressantes.
On fera calculer la distance [B,M] , le minimum semblant se trouver pour M=(0,1) et en ce point la perpendiculaire semble être la tangente. Ce que l'on peut confirmer avec la commande « relation ».

La partie théorique n'est pas triviale : on peut chercher à minimiser $BM^2 = (x-2)^2 + (e^x+1)^2$
Pour cela, étudier sa dérivée $f'(x) = 2(x-2) + 2(e^x+1)e^x$ dont le signe nécessite la dérivée de cette dernière $f''(x) = 2 + 2e^x(e^x+1) + 2e^x e^x > 0$: beau raisonnement en cascade.

Il sera alors facile de vérifier les conjectures proposées (la distance minimale est $\sqrt{8}$ et les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ e^x \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x-2 \\ e^x+1 \end{pmatrix}$ sont bien normaux pour x = 0)

<u>Conclusion : bon sujet.</u>

24/11/2008 Claude Poulin nouméa

Un exemple de fiche de suivi, utilisée lors du passage de l'épreuve « sujet 014 distance d'un point à une courbe »

Grille de correction - sujet n°014

Nom : ……………………………………………….

	Barême	point élève :
CONSTRUCTION et CONJECTURE		
1.a) Courbe f = exp(x)	1	
point B(2 ; - 1)	1	
point M sur la courbe	1	
Conjecture position minimum (tracé du segment [BM]) puis lecture de la longueur minimale de [BM], lecture des coordonnées de M0	1 + 2	
Placer M0 (0 ; 1)	1	
1.b) Tracer (d) perpendiculaire à (BM0)	1	
Conjecture sur la position de (d) : perpendiculaire à (BM0) (en mettant en évidence l'angle droit) donc tangente à la courbe C en M0	2 + 1	
1.c) Contrôle des conjectures : tracer la tangente à la courbe C en M0 puis utiliser "relation entre 2 objets"	1	
DEMONSTRATION		
l'élève est capable d'expliquer qu'il faut étudier la fonction correspondant à la distance BM	2	
démonstration	3	

Réactivité :	………… / 3

Note : ……. / 20

Cette fiche permet de suivre les 3 ou 4 candidats en parallèle, et sera une aide à la notation finale (sur le document officiel).

Sujet 014 Épreuve pratique de mathématiques Fiche évaluation

Distance d'un point à une courbe

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	*Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)*
L'élève est capable de réaliser une figure dynamique lui permettant d'étudier le problème posé.	
L'élève tire profit des indications données éventuellement à l'oral (ces indications peuvent être des aides logicielles nécessaires pour réaliser ce qu'il ou elle avait prévu).	
L'élève est capable d'explorer la figure dynamique construite et de l'exploiter pour faire des conjectures en cohérence avec ses essais.	
L'élève est capable de proposer une stratégies de démonstration (modélisation par une fonction, stratégie pour déterminer un minimum) ou d'en maîtriser des étapes.	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet.	

Remarques complémentaires :