2 Rappels sur la notion de connexité

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 7. (Connexité) Une partie $C \subset X$ est connexe si elle vérifie l'une des propriétés suivantes équivalentes :
(i) C est à la fois ouverte et fermée
(ii) Il n'existe pas de couple d'ouverts disjoints (O_1, O_2) tel que $C = O_1 \cup O_2$
(iii) Il n'existe pas de couple de fermés disjoints (F_1, F_2) tel que $C = F_1 \cup F_2$

Exemples :
. Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
. les parties connexes d'un ensemble discret sont les singletons.
. $\mathbb{Z}$ muni de la topologie induite par celle de $(\mathbb{R}, |.|)$ n'est pas connexe.

Théorème 5. *L'image d'une partie connexe par une application continue est connexe.*

Remaque :
. Le théorème des valeurs intermédiaires est une variante de ce résultat puisque les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
. L'image réciproque d'une partie connexe par une application continue n'est pas nécessairement connexe.

Corollaire 2. *Une partie C est connexe si et seulement si toute fonction continue de C à valeur dans un ensemble discret est constante.*

Définition 8. (composantes connexes) Soit $x \in X$. Il existe une plus grande partie connexe de X contenant x. On l'appelle composante connexe de x et on la note $C(x)$. On dit aussi que $C(x)$ est une composante connexe de X.

Exemples :
- les composantes connexes de $\mathbb{R}^*$ sont $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
- les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont les singletons.

Prop 12. *Les composantes connexes de X sont fermées et forment une partition de X.*

Définition 9. On dit qu'une partie $C \subset X$ est connexe par arcs si pour tout couple (a, b) C^2, il existe un chemin continu reliant a et b, i.e $\exists\ \gamma : [0; 1] \to C$ continue telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Prop 13. *Tout partie connexe par arcs est connexe.*

Remarque : la réciproque est fausse !
Contre exemple : la partie de $\mathbb{R}^2$ $A = \{(x, \sin(1/x)) \quad | \quad x > 0\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$ est connexe mais non connexe par arcs !

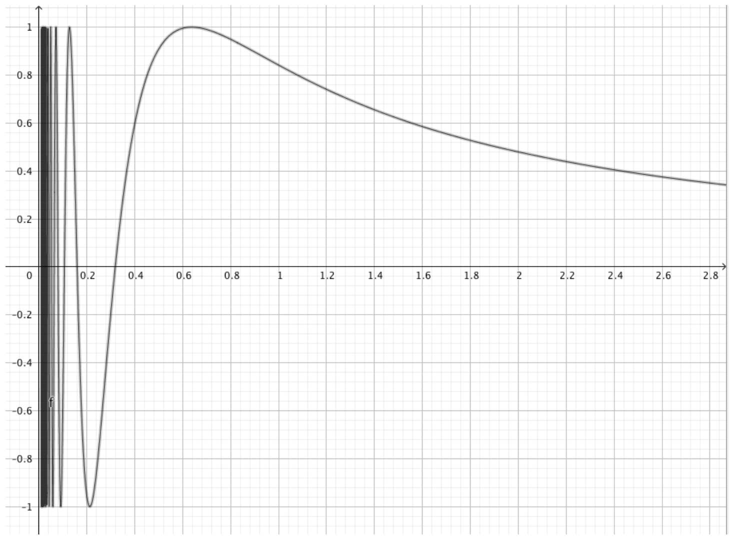

FIGURE 2 – Le sinus du topologue

Prop 14. *Les ouverts connexes d'un espace vectoriel normé sont connexes par arcs.*