1 Quelques précisions...

Après la leçon de Jéremy, nous avons soulevé quelques points que je voulais préciser :

- **L'espace vectoriel nul** (réduit à $\{0\}$) a pour base $\emptyset$ (il n'y a rien à engendrer !) et est donc de dimension 0.
- Comme l'a souligné Ali, Il est moins facile de montrer que $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$, sans faire appel à l'identification à l'espace des matrices, mais ce n'est pas très compliqué. C'est un petit exercice de manipulation d'indices.
- Pour l'existence d'une base algébrique pour un espace vectoriel quelconque, j'ai évoqué que la démonstration faisait appel à **l'axiome du choix**, dont une bonne explication peut se trouver à `http ://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_du_choix`
  Dans la rubrique **axiome du choix dénombrable** vous trouverez l'explication de l'exemple que j'avais pris : **choisir** un élément dans une boule de rayon indexé sur $\mathbb{N}$ (par exemple $\mathcal{B}(0, \frac{1}{n})$) définit une suite.
- Le fait que les solutions d'une équation différentielle du type $Y'(t) = A(t)Y(t)$ où $Y : I \to \mathbb{R}^n$ est un sous espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, fait bien appel au **théorème de Cauchy-Lipschitz**, version linéaire (les solutions maximales sont définies sur I tout entier). Une référence : Gourdon d'analyse page 352 et démonstration page 374.

2 La correction de l'exercice n° 12

Avant d'aborder cet exercice il est nécessaire de connaître cette propriété (E est un ev) :

Lemme 1 *$f \in \mathcal{L}(E)$ **est une homothétie** $\Leftrightarrow \forall x \in E$ $(x, f(x))$ **est liée.***

Le sens direct est évident, donnons une preuve du sens réciproque :
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x \in E$ $(x, f(x))$ est liée.
Soit $x \neq 0$ et $y \neq 0$ dans E **fixés**.
$(x, f(x)$ et $(y, f(y)$ sont liées donc $\exists \lambda_x, \lambda_y$ telles que $f(x) = \lambda_x x$ et $f(x) = \lambda_x x$.

<u>**1er cas :**</u> Si (x, y) est liée, alors il existe μ tel que $y = \mu x$.
Donc $f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x \mu x = \lambda_x y$.
Or $f(y) = \lambda_y y$, donc $\lambda_y y = \lambda_x y$
Puisque $y \neq 0$ on a : $\boxed{\lambda_x = \lambda_y}$
<u>**2nd cas :**</u> Si (x, y) est libre.
Alors $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}(x+y)$.
Donc $(\lambda_x - \lambda_{x+y})x + (\lambda_y - \lambda_{x+y})y = 0$.
Puisque (x, y) est libre, on obtient $\boxed{\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}}$
Conclusion : $\forall x, y \neq 0$ $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$.
Donc $\forall x$, $f(x) = \lambda x$ (si $x = 0$ cette relation est aussi vérifiée). □

Passons à la correction de l'exercice 12. **On confond dans cette exercice A et son endomorphisme f associé dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.**

1. (a) La matrice d'une homothétie est $A = \lambda I_n$ où $\lambda \neq 0$ (l'application nulle n'est pas une homothétie), ce choix ne dépendant pas de la base (pourquoi ?). Donc $\mathrm{Tr}(A) = n\lambda \neq 0$
   (b) Puisque A n'est pas une matrice d'homothétie, d'après le lemme 1, il existe $e \in \mathbb{K}^n$ tel que (e, Ae) soit libre.

(c) On pose $e_1 = e$ et $e_2 = Ae$, et puisque ces deux vecteurs forment une famille libre on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$.
Alors la matrice Δ de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots\cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \Delta$$

Si on note P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ on a $\boxed{\Delta = P^{-1}AP}$ $\square$

(d) Pour $n = 1$ la propriété est évidente. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$ et prenons une matrice A de trace nulle.
On peut traiter la question en raisonnant sur les endomorphismes (il faut alors considérer la restriction à $\mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n) = F$ de $p \circ f$ où p est la projection sur F), mais on peut le voir matriciellement :

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots\cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$

Alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A') = 0$ donc on peut appliquer la propriété à A' : il existe $D \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ de diagonale nulle et $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que $D = Q^{-1}A'Q$.

Posons alors $G = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{array}\right)$

Alors $\det(G) = 1 \times \det(Q) \neq 0$ donc $G \in Gl_n(\mathbb{K})$ et $G^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$

Pour voir ce point on rappelle la règle sur **le produit matriciel par bloc** :

$$\overset{\overset{r}{\longleftrightarrow}\,\overset{s}{\longleftrightarrow}}{\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)} \times \begin{array}{c} r \updownarrow \\ s \updownarrow \end{array} \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right) = \begin{pmatrix} AA' + BC' & CA' + DC' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

On vérifie donc bien que $GG^{-1} = I_n$.
On a de plus avec le calcul matriciel par bloc

$$G^{-1} \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots\cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) G = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots\cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1}A'Q & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots\cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Donc $G^{-1}P^{-1}APG = (PG)^{-1}A(PG) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots\cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{array}\right)$

Donc A est semblable à $\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots\cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ qui est une matrice de diagonale nulle puisque D est de diagonale nulle : cqfd □

2. (a) $\mathrm{Tr}([B,C]) = \mathrm{Tr}(BC - CB) = \mathrm{Tr}(BC) - \mathrm{Tr}(CB) = \mathrm{Tr}(BC) - \mathrm{Tr}(BC) = 0$
   (b) Si $M = BC - CB$ alors pour $P \in Gl_n(\mathbb{K})$,

$$P^{-1}MP = (P^{-1}BP)(P^{-1}CP) - (P^{-1}CP)(P^{-1}BP) = [P^{-1}BP, P^{-1}CP]$$

   Donc $P^{-1}MP$ est aussi un crochet de Lie.

3. (a) Une base de $\mathcal{D}$ est $(E_{i,i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ et une base de $\mathcal{D}_0$ est $(E_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!],i\neq j}$, où les $E_{i,j}$ sont les matrices élémentaires.
   Ceci nous permet d'affirmer que $\boxed{\dim(\mathcal{D}) = n}$ et $\boxed{\dim(\mathcal{D}_0) = n^2 - n}$
   (b) On a $b_{i,j} = \delta_i^j b_i$ (où δ_i^j est le symbole de Krönecker).
   On a donc $(BC)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}c_{k,j} = b_i c_{i,j}$ et de même $(CB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}b_{k,j} = c_{i,j}b_j$.
   Donc $(BC - CB)_{i,j} = (b_i - b_j)c_{i,j}$
   On peut choisir $b_i \neq b_j$ pour tout $i \neq j$ car on est dans un corps infini.
   Et alors

$$\begin{aligned} \phi_B(C) = 0 &\Leftrightarrow \forall i,j\,,(b_i - b_j)c_{i,j} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i,j \text{ avec } i \neq j\,, c_{i,j} = 0 \text{ (car } b_i - b_j \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \boxed{C \in \mathcal{D}} \end{aligned}$$

   (c) Alors $C \in \ker(\phi_B) \Leftrightarrow \phi_B(C) = 0 \Leftrightarrow C \in \mathcal{D}$
   (d) D'après le thorème du rang : $n^2 = \mathrm{rg}(\phi_B) + \dim(\ker(\phi_B)) = \mathrm{rg}(\phi_B) + n$
   Donc $\mathrm{rg}(\phi_B) = n^2 - n$.
   De plus d'après le choix qui a été fait de B, $\mathrm{Im}(\phi_B) \subset \mathcal{D}_0$, donc par égalité des dimensions on obtient que $\boxed{\mathrm{Im}(\phi_B) = \mathcal{D}_0}$

4. Toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de $\mathcal{D}_0$ qui est un crochet de Lie d'après la questiuon précédente. D'après la question 2-b, M **est alors un crochet de Lie**.