Séance n^{o} 3

Exercice 1 - Continuité des racines d'un polynôme, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Soit (P_k) une suite de polynôme scindés de $K[X]$, de degré N, qui tend vers un polynôme P scindé de degré N.
On munit $K[X]$ de la norme $\|.\|_1$ définie de la manière suivante :

$$\|a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n\|_1 = |a_0| + |a_1| + ... + |a_n|$$

1. Montrer que l'on peut supposer P_k et P unitaire (ce que l'on supposera à partir de maintenant).
2. Montrer que si z est une racine de P alors $|z| \leq \|P\|_1$.
3. En déduire que l'ensemble des racines des P_k est borné.
4. On va démontrer la propriété $(\mathcal{P})$: Si z est une racine de P de multiplicité p alors quelque soit ε, pour n assez grand, $\mathcal{B}(z, \varepsilon)$ contient exactement p racines de P_k. On raisonne par l'absurde en supposant vraie la négation de $(\mathcal{P})$.
   (a) Montrer que l'on peut alors construire une extraction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :
   $$\forall k \geq 1,\ |z - x_{N,\psi(k)}| \geq |z - x_{N-1,\psi(k)}| \geq ... \geq |z - x_{p,\psi(k)}| \geq \varepsilon$$
   où $x_{1,k}, x_{2,k}, ..., x_{N,k}$ sont les N racines de P_k
   (b) Montrer que l'on peut supposer que les $(x_{i,\psi(k)})_k$ sont des suites convergentes pour tout $i \in [\![1, N]\!]$.
   (c) On note $y_i = \lim\limits_{n \to +\infty} x_{i,\psi(k)}$.
   Montrer que $P_{\psi(k)}$ tend vers $\displaystyle\prod_{i=1}^{N}(X - y_i)$ et en déduire une contradiction.
5. Montrer que l'on peut se passer de l'hypothèse "P est scindé".