II. La formation des élèves

Mettre en œuvre le socle commun consiste concrètement à faire vivre en classe deux objectifs de formation :

- Permettre aux élèves d'acquérir les mathématiques nécessaires à une poursuite d'études (autrement dit, le programme), objectif qui doit rester **l'ambition pour tous.**
- Donner à tous la culture mathématique nécessaire au citoyen (autrement dit, permettre aux élèves d'acquérir les connaissances et compétences du socle commun), objectif que l'on peut qualifier de **nécessaire pour tous.**

1. Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes

a) Des problèmes pour découvrir un nouveau savoir

Pour donner du sens aux mathématiques enseignées et cultiver chez les élèves le goût de faire des mathématiques, les programmes recommandent d'introduire certaines notions au travers d'une situation-problème. L'intérêt de cette démarche est de montrer la pertinence de l'outil construit pour la résolution du problème.
Les situations choisies dans ce cadre doivent permettre à **tout élève** de s'engager avec ses acquis du moment et donc, ne reposer que sur des consignes simples, n'exiger que des connaissances solidement acquises. Chaque élève est ainsi conduit à exercer les aptitudes dont il dispose et à en identifier les limites. La mutualisation des différentes procédures apparues dans la classe permet de présenter dans les meilleures conditions le savoir nouveau visé en lui donnant toutes les chances d'être perçu comme utile voire indispensable. Les élèves sont ainsi en état de le recevoir puis de se l'approprier.

> ***Pour gérer la double exigence du programme et du socle commun et faire cohabiter harmonieusement tous les objectifs de formation visés, il est essentiel de veiller à ce que ce type de problème offre une véritable activité mathématique à tout élève sans oublier celui qui n'accèdera peut-être pas à la modélisation ou à la stratégie experte visée.***

Exemple : des programmes de calcul pour introduire la résolution des équations du type $ax + b = cx + d$, notion qui ne fait pas partie des exigibles du socle commun.

Problème 1

Emma et Zoé ont chacune une calculatrice. Elles ont « tapé » le même nombre.
Ensuite, Emma a appuyé sur les touches :

$\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

et Zoé a appuyé sur les touches :

$\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{+}$ $\boxed{8}$ $\boxed{=}$

Surprise ! Elles obtiennent le même résultat !
Quel nombre ont-elles bien pu choisir ?

Tous les élèves peuvent s'engager dans l'étude de ce premier problème, ne serait-ce qu'en faisant des essais. Ils peuvent aboutir en tâtonnant puisque la solution est décimale. Certains peuvent recourir au calcul littéral et résoudre l'équation $2x + 3 = 4x$ de « façon artisanale » par exemple en mobilisant le sens des opérations ou en décomposant $4x$ en $2x + 2x$ pour constater que $2x = 3$. La mutualisation des différentes démarches permet l'enrichissement de chacun avant que le problème 2 ne soit abordé.

Problème 2

Yuna et Pierre ont chacun une calculatrice. Ils ont « tapé » le même nombre.
Ensuite, Yuna a appuyé sur les touches :

$\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

et Pierre a appuyé sur les touches :

$\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{5}$ $\boxed{+}$ $\boxed{8}$ $\boxed{=}$

Surprise ! Ils obtiennent aussi le même résultat !
Quel nombre ont-ils bien pu choisir ?

Tous les élèves peuvent encore s'engager dans l'étude de ce second problème en faisant des essais mais la méthode par essai-erreur atteint ses limites puisque la solution n'est pas décimale. Cependant, aucun élève n'est en échec, chacun étant en mesure d'approcher la solution. Les élèves qui n'avaient fait que quelques essais désordonnés lors de l'étude du problème 1 vont peut-être cette fois organiser leurs essais de façon efficace. Des élèves qui n'avaient pas été tentés de recourir au littéral pour le problème 1 peuvent y penser puisqu'ils ont entendu des camarades s'exprimer à ce sujet lors de la synthèse faite sur le problème 1. Poussés dans leur retranchement, les meilleurs peuvent utiliser des stratégies très proches de la stratégie experte. Chacun a donc fait un pas de plus.
Au cours de ce travail, les élèves en difficulté ne sont pas en échec. Mieux encore, ils peuvent consolider leur maîtrise de compétences complexes telles que « identifier un problème, … élaborer une stratégie pour y répondre ». En outre, leur travail de « tâtonnement » est utile à tous puisqu'il donne du sens à ce qu'est une résolution d'équation.

Voir en annexe 1, des productions d'élèves pour le problème 2 et un exemple de résolution « artisanale » de $5x + 5 = 7x + 3$.

Une fois ce travail terminé, les élèves sont prêts à entendre l'exposé d'une stratégie experte de résolution des équations du type $ax + b = cx + d$. Pour tirer le meilleur profit du travail préliminaire, cet exposé de type magistral, doit prendre appui sur la diversité des productions « artisanales » des élèves.

Remarque : La méthode de résolution par essai-erreur, qui est à valoriser lors de l'apprentissage, doit l'être encore lors de l'évaluation. Il faudrait donc veiller à proposer dans ce cadre des problèmes dont la solution est parfois décimale et suffisamment « simple » pour être accessible sans avoir recours à une mise en équation non exigible pour le socle commun. Pour autant, cela ne veut pas dire qu'il faut s'interdire en évaluation de proposer des équations dont la solution n'est pas décimale.

Bien entendu tous les nouveaux savoirs ne seront pas nécessairement « construits par les élèves ». **Des apports de type plus transmissif peuvent être faits par le professeur**. Toutefois, dans une telle pratique, il est tout aussi indispensable de mettre chaque élève en activité en lui ménageant de vrais temps de réflexion mathématique. Tout élève doit être confronté à des questions du genre : « À quoi va servir ce que je viens de vous montrer ? » ; « À quoi vous fait penser cette situation ? » ; « Pourquoi peut-on faire appel à tel ou tel savoir antérieur ? » ; « Essayez de mener le début de ce calcul » …

Exemple : voir en annexe 2 un mode d'introduction de la propriété de Pythagore qui ne propose pas d'approche expérimentale.

> *Pour autant il est important,* ***pour gérer la double exigence du programme et du socle commun,*** *de continuer à* ***valoriser des approches empiriques.***

En effet progressivement, au cours de leur formation, les élèves prennent conscience que les mathématiques permettent de réaliser un certain nombre de tâches sans avoir à « tâtonner ». À côté de cela, ils sont aussi convaincus, sans avoir toujours l'occasion ou la permission de le dire, que des méthodes empiriques permettent d'obtenir des résultats très satisfaisants en pratique. Par exemple, on peut voir des élèves déterminer le centre d'un cercle dans une excellente approximation, sans recourir au tracé des médiatrices. Le professeur de mathématiques perd souvent en crédibilité s'il ne fait aucune place à ces approches empiriques qui sont communément reconnues comme efficaces dans la vie courante (pour trouver le centre d'un disque en papier, on peut le plier en quatre, par exemple).

Au contraire, en amenant les élèves à comparer les deux types d'approche, il est possible de :
- valoriser des aptitudes qui relèvent du socle,
- montrer les limites de la résolution empirique (tout en lui reconnaissant une efficacité),
- plaider plus honnêtement et plus efficacement pour des méthodes mathématiques rigoureuses.

Par exemple, quand des élèves de 5^{e} doivent réaliser un patron d'un cylindre de révolution de 3 cm de rayon et 5 cm de hauteur, le premier obstacle à franchir est la détermination de la forme du patron. Il faut ensuite faire en sorte que le rectangle ait une longueur adéquate. Dans ce type de travail, on voit bon nombre d'élèves (s'ils y sont autorisés habituellement) découper et rouler du papier pour ajuster leur première conjecture et trouver, au brouillon, une forme globale pertinente. Ils se lancent alors dans une construction au propre pour découvrir finalement le problème de la longueur du rectangle. Certains reprennent alors un brouillon pour faire des calculs tandis que d'autres ajustent avec leurs ciseaux.

Toute cette approche empirique aura permis aux premiers d'aboutir, aux autres de prendre conscience du problème pour se préparer à la suite. Quand les deux types d'élèves s'expliqueront en plénière, un des enjeux sera la comparaison des méthodes. Les deux auront bien en main un cylindre en papier mais le premier pourra dire que, pour un prochain patron, il est certain de réussir du premier coup, sans aucun ajustement.

b) Des problèmes pour réinvestir les connaissances acquises

Pour gérer la double exigence du programme et du socle commun, il est essentiel de veiller à ce que les problèmes proposés dans ce cadre offrent une vraie activité mathématique à tout élève, y compris à celui qui ne maîtrisera peut-être pas une résolution complète.

Pour cela, il est nécessaire d'ouvrir les questions posées aux élèves.
Une façon de procéder, assez communément partagée, consiste à proposer des situations dont l'énoncé est suffisamment détaillé pour permettre à tout élève d'amorcer le travail.

L'énoncé ci-dessous (extrait du DNB 2007) illustre cette façon d'envisager les choses.

On donne un programme de calcul • Choisir un nombre. • Lui ajouter 4. • Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi. • Ajouter 4 à ce produit. • Écrire le résultat	1. On note x le nombre choisi. Exprimer en fonction de x le résultat de ce programme de calcul. 2. Démontrer qu'une autre écriture de $(x+4)\times x + 4$ est $(x+2)^2$. 3. Lorsque l'on applique ce programme de calcul à un nombre entier, obtient-on toujours le carré d'un nombre entier ? 4. a. Résoudre l'équation $(x+2)^2 = 1$. b. On souhaite obtenir 1 comme résultat. Quels nombres peut-on choisir au départ ?

Dans une telle version, les indications sont données dans le but d'aider les élèves à démarrer. Mais comme ces indications induisent une stratégie de résolution experte hors de portée de certains élèves (« passer à l'algèbre », « transformer des expressions du second degré », « résoudre des équations » ne sont pas des exigibles du socle commun), elles ont souvent pour effet de priver totalement les élèves en difficulté de toute activité mathématique. Elles ôtent aussi aux bons élèves la possibilité de faire preuve d'initiative et de passer de façon autonome à l'algèbre, seul moyen dans cette situation d'accéder à la preuve.

Au contraire, ***ouvrir le questionnement favorise l'activité de chacun en augmentant la palette des stratégies accessibles.***

Voici une autre version du problème précédent ***à proposer en formation*** :

On donne un programme de calcul • Choisir un nombre. • Lui ajouter 4. • Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi. • Ajouter 4 à ce produit. • Écrire le résultat	*Seule question posée dans un premier temps :* Tester ce programme de calcul sur quelques nombres entiers. *Laisser les élèves faire des constats, proposer des conjectures, se poser la question de sa généralité.* *Éventuellement relancer une recherche par une seconde question :* On souhaite obtenir 1 comme résultat. Quels nombres peut-on choisir au départ ?

Extraits de réponses d'élèves :

Je choisis le nombre 3 :

$3 + 4 = 7$

$7 \times 3 = 21$

$21 + 4 = 25$

le résultat du programme de calcul avec 3 est 5^2 ou.

Je choisis le nombre 22 :

$22 + 4 = 26$

$26 \times 22 = 572$

$572 + 4 = 576$

le résultat du programme de calcul avec 22 est 24^2.

b) Oui, lorsque l'on choisit un nombre entier au départ de ce programme de calcul, on obtient toujours le nombre choisi + 2 au carré.
le tout

Si le problème est énoncé sous une forme ouverte, tout élève a la possibilité de mettre en œuvre des capacités élémentaires de calcul, d'observer les résultats obtenus, d'émettre une conjecture, de faire la part entre ce dont on est sûr et ce qu'il faut prouver (quelques essais constituent-ils une preuve ?), d'élaborer une démarche par essais-erreurs, autant de capacités exigibles du socle commun.
Certains parviendront peut-être, comme l'extrait ci-dessus le montre, à formaliser un autre programme de calculs, plus court que le premier, qui donne toujours le même résultat que le premier, quel que soit le nombre auquel on applique ces deux programmes. Ils auront pu ainsi passer de façon autonome à l'abstraction.

Mais sans doute faudra-t-il accepter que certains élèves n'accèdent pas seuls à la stratégie de preuve, ce qui n'est pas grave dans la mesure où chacun a eu la possibilité d'avancer relativement à ses propres apprentissages et de construire des capacités attendues dans le cadre du socle commun. En outre, le travail d'exploration personnelle de la situation les a préparés à s'intéresser, au moment de la synthèse, aux preuves qui seront proposées par d'autres et à, peut-être, en tirer profit dans une expérience future.

> *Pour gérer la double exigence du programme et du socle commun, il est important de valoriser différents niveaux de production.* ***En outre, permettre la coexistence de plusieurs niveaux de production au cours d'un travail, et même en garder la trace, est souvent très enrichissant pour la suite de la formation.***

Exemple en classe de cinquième : « Des programmes de calcul qu'on ne peut pas remonter. »

Deux exercices que l'on peut donner dès le début de l'année :

Voici un programme de calcul qui peut s'appliquer à n'importe quel nombre. Tripler Ajouter 4 Doubler Retirer 4 1) Appliquer le programme au nombre 5. 2) À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour trouver 809,2 ? 3) À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour trouver 14 ?

À la question 2), on obtient en général trois types de production : des essais-erreurs un peu anarchiques ; des essais-erreurs très organisés (par dichotomie) ; des « remontées de programme » qui s'appuient sur le sens des opérations.
Lors de la plénière qui clôture ce premier travail, il est essentiel de valider les deux dernières méthodes, même si la « remontée de programme » apparaît plus économique. L'exposé de cette dernière permet à tous de retravailler sur le sens des opérations au niveau du socle. Mais, bien que reconnue par les élèves comme plus longue, la méthode par essais-erreurs mérite aussi d'être étudiée car elle a de l'avenir dans la classe.
En effet, à la question 3), la méthode par essais-erreurs n'est plus efficace puisque la solution n'est plus décimale. Toutefois elle retrouvera plus tard tout son intérêt, par exemple dans l'exercice suivant :

Voici un programme de calcul qui peut s'appliquer à n'importe quel nombre. Doubler Ajouter 3 Multiplier par 3 Ajouter le nombre de départ 1) À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour trouver 25,1 ? 2) À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour trouver 34 ?

Cette fois-ci, il n'est plus possible de « remonter le programme ». Si la méthode par essais-erreurs a bien été valorisée précédemment, les élèves pourront y avoir recours et répondre de façon exacte à la première question. Avec cette méthode, ils pourront aussi donner une solution approchée à la seconde question, même s'ils ne sont pas capables de recourir au calcul littéral pour aboutir complètement.
On pourra ainsi travailler avec tous sur un problème qui mènera certains seulement jusqu'à une modélisation algébrique.

c) Résoudre un problème, c'est raisonner puis communiquer

Apprendre à résoudre des problèmes, c'est d'abord et essentiellement ***apprendre à raisonner***. C'est bien en ayant très régulièrement des occasions de raisonner que tout élève parviendra à construire des compétences élaborées telles que « être capable d'identifier quand une situation se prête à un traitement mathématique et élaborer une stratégie pour y répondre » , capacités exigibles dans le cadre du socle commun.

Il est donc essentiel de solliciter, autant que faire se peut, la capacité à raisonner de chaque élève. Les problèmes dits « de recherche » sont tout à fait essentiels pour la développer. Cependant, ils n'occupent qu'un temps limité dans les apprentissages. Il est indispensable de permettre à l'élève d'exercer plus quotidiennement sa capacité à raisonner et de nombreuses occasions peuvent se présenter à chaque séance.

Un calcul réfléchi peut être l'occasion d'un véritable raisonnement.

Par exemple, dès la sixième, un élève qui doit calculer mentalement le produit 4×1,75 peut :

- avoir une vision globale de 1,75 sous la forme 1 unité et 3 quarts d'unité, utiliser en acte la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, transformer 12 quarts d'unité en cherchant, puisqu'il sait que 4 quarts d'unité font une unité, le nombre de fois 4 dans 12 et finir en ajoutant 4 unités et 3 unités.
- avoir une vision globale de 1,75 sous la forme 2 unités moins 1 quart d'unité, utiliser en acte la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction puis la vision fraction (4 quarts d'unité font une unité) et finir en soustrayant 1 unité à 8 unités.
- choisir d'effectuer deux multiplications successives par 2.

Dans tous les cas, l'intelligence du calcul est montrée. Dans ce contexte, en donnant le résultat puis en exprimant son raisonnement à l'oral, l'élève peut montrer, sans passage à l'écrit, qu'il a identifié le problème et a élaboré une stratégie pour le résoudre : le contrat est parfaitement rempli.

Outre le fait qu'un calcul réfléchi est pour tout élève une excellente occasion de raisonner, ***maîtriser la culture mathématique nécessaire au citoyen impose de façon très prioritaire la maîtrise du sens des opérations et du calcul*** (réfléchi c'est-à-dire calcul mental automatisé ou non ou bien instrumenté avec calculatrice ou tableur).
L'aptitude au croisement des différentes techniques de calcul, en particulier pour l'évaluation d'ordres de grandeurs, est essentielle dans la vie courante. Mais contrairement à l'attendu du citoyen de la société des années avant 1970, ***la priorité n'est plus la maîtrise du calcul posé.***

Apprendre à résoudre un problème c'est aussi ***apprendre à communiquer son raisonnement***, communication qui peut se faire par écrit mais aussi par oral. Apprendre à rédiger un raisonnement est bien un objectif de formation du programme mais ***la mise en forme écrite d'un raisonnement ne fait pas partie des exigibles du socle commun*** (voir l'en-tête des programmes).

Pour donner au raisonnement la place qu'il mérite il est essentiel de :

- ***dissocier les deux apprentissages*** (recherche et élaboration d'un raisonnement ou d'une preuve ; mise en forme du raisonnement ou de la preuve) car beaucoup d'élèves se croient incapables de faire des mathématiques alors que leur difficulté réside plutôt dans le fait de devoir produire un écrit conforme aux attendus du professeur. D'autres sont dans l'incapacité de montrer qu'ils raisonnent bien parce que l'évaluation d'un raisonnement passe le plus souvent par l'évaluation d'un écrit.
- ***valoriser toute expression écrite correcte d'un raisonnement*.**

Exemple : voir en annexe 3 quelques productions d'élèves.

- **développer les échanges oraux et écrits entre les élèves.**

Quand le professeur est le seul interlocuteur de l'élève dans un jeu de questions-réponses, l'élève peut difficilement se sentir en réelle situation d'argumentation. En effet, il sait très bien que le professeur connaît à l'avance les réponses aux questions qu'il pose et qu'il est capable de comprendre à mi-mot ce que disent les élèves. Dans ces circonstances, la motivation à plaider pour convaincre et à formuler son point de vue le plus clairement possible risque d'être minimale.
Au contraire, favoriser les échanges oraux et écrits entre élèves permet de les mettre plus facilement en véritable situation de communication. Les réactions des pairs poussent bien davantage l'élève à affiner ses arguments pour convaincre et à soigner ses formulations pour être compris des autres. Chaque objection d'un camarade est un défi qui mène souvent à développer une exigence plus grande dans les domaines du raisonnement et de la formulation.

Les échanges entre élèves peuvent se développer à l'oral comme à l'écrit. Bien des protocoles sont possibles. Par deux, ils peuvent échanger leurs productions écrites, annoter en donnant leur point de vue et renvoyer à l'auteur. En petits groupes de trois ou quatre, après une recherche individuelle, ils peuvent se mettre d'accord pour produire une argumentation collective.
Il est possible en classe entière d'animer des débats autour de l'examen de productions individuelles choisies ou de travaux de groupes, chaque élève pouvant dire ce qu'il ne comprend pas, les précisions qui manquent pour que l'écrit soit parfaitement clair, excellente ***façon de présenter aux élèves le travail de rédaction comme l'élaboration d'un écrit de communication se devant d'être compréhensible par tous ceux qui ont les mêmes savoirs***.

d) Résoudre un problème c'est aussi maîtriser des techniques

Un élève ne peut s'engager dans une résolution de problème s'il est freiné en permanence par des obstacles techniques. Développer et entretenir les automatismes en mathématiques, c'est donner à tout élève des outils fiables nécessaires pour être autonome dans la résolution de problèmes, c'est aussi libérer sa mémoire de travail et lui donner la possibilité d'exercer plus librement sa créativité.
En calcul, la maîtrise des quatre opérations, la connaissance de procédures de calcul mental rapides et efficaces, une bonne mémorisation des tables de multiplication sont nécessaires à la résolution de problèmes.
En géométrie, la mémorisation des propriétés de quelques figures de base (carré, losange,…) et une bonne habileté de construction de ces figures (à main levée, avec des instruments de dessin ou des logiciels de construction dynamique) facilitent la reconnaissance de figures de base dans une configuration donnée.

L'objectif de toute activité mathématique est bien la résolution de problèmes mais cet objectif ne peut être atteint sans un passage par un travail de « gammes », prélude à la mémorisation et à l'acquisition des automatismes indispensables. Ces automatismes, nécessaires à la résolution de problèmes s'acquièrent, s'affirment, s'entretiennent en effet par la pratique d'exercices référés à des tâches simples : calculs isolés, récitation de résultats mémorisés, construction de figures de base, …
Néanmoins, ce travail des automatismes, conduit dans une classe où il faut gérer la tension entre les objectifs du programme et la nécessité de l'acquisition du socle commun pour tous, ne saurait se réduire à une multiplication d'exercices techniques imposés à tous les élèves. Imaginer qu'une stratégie de calcul assimilée grâce à trois exercices techniques d'application par une majorité d'élèves puisse être finalement assimilée par les autres grâce à la répétition des mêmes exercices qui se sont révélés à un moment donné inefficaces pour eux est illusoire.
Adopter une pédagogie du détour est souvent beaucoup plus efficace et procéder ainsi peut prendre des formes très diverses.
Par exemple :

- Revenir souvent et par petites touches sur un entraînement.
- Aider les élèves à prendre conscience que c'est parce qu'ils maîtrisent mal telle ou telle technique qu'ils sont freinés à un moment donné dans telle résolution de problème est une bonne motivation pour lancer un entraînement (collectif ou individualisé, en classe ou à la maison) et donner, à cet entraînement aussi, du sens dans l'apprentissage. Un élève qui a compris que pour résoudre des problèmes, il faut savoir raisonner, mais aussi maîtriser des techniques, puis enfin communiquer ne verra sans doute plus l'entraînement technique comme une simple corvée. On peut par exemple dire aux élèves : « Aujourd'hui, vous avez été arrêtés dans votre recherche parce que vous ne saviez pas bien faire ceci ou cela :

je vous propose un entraînement… » ou « Tu as vu, tu es coincé là parce que tu ne sais pas bien faire ceci ou cela : je te propose de t'entraîner avec tel exercice ».

- Dans un souci de saisir toute occasion de solliciter une maîtrise technique et donc de faire acquérir des automatismes, on peut être tenté lors d'une résolution de problème en classe d'interdire l'usage de la calculatrice. Il peut se révéler plus efficace vis à vis de certains élèves de ne pas mélanger les deux objectifs. Dédouaner parfois les élèves d'une technique en leur permettant l'usage de la calculatrice peut permettre à tous de se centrer sur le problème. On reviendra sur la technique qui a fait défaut mais à un autre moment et en évitant tout acharnement.
- Inciter les élèves à mettre en place des éléments de contrôle pour s'auto-valider. Ce peut être, par exemple, le test d'égalité dans un calcul littéral, un calcul approché pour vérifier un calcul exact, une mesure pour contrôler une démonstration en géométrie.

e) Résoudre des problèmes, à la maison aussi !

Quand le professeur donne des problèmes à résoudre à la maison, il se heurte souvent à des difficultés : des élèves rendent une copie presque blanche en affirmant qu'ils n'ont pas compris, d'autres recopient la solution d'un camarade, d'autres encore rendent des travaux de qualité si médiocre que leurs erreurs sont difficiles à exploiter. On peut alors avoir parfois la tentation de réduire ses exigences en renonçant aux problèmes au profit d'un entraînement technique ou en réduisant ce travail à la rédaction de solutions de problèmes cherchés en classe. Entraînement technique et travail de rédaction sont bien sûr deux tâches qui doivent trouver toute leur place dans le travail fait à la maison et à rendre sur feuille. Mais, il ne faut pas pour autant renoncer aux bénéfices d'un travail de recherche en temps non limité. Il est en effet possible de trouver des moyens d'accompagner les élèves dans leur recherche à la maison.

Comment accompagner les élèves dans la résolution de problèmes à la maison ?
Voir en annexe 4 un exemple de protocole d'alternance maison-classe.

2. Quelles stratégies pédagogiques pour favoriser l'activité mathématique de tout élève à tout moment ?

Pour gérer la double exigence du programme et du socle commun, il est essentiel de respecter autant que faire se peut le rythme de chaque élève. Cela impose de laisser un temps suffisant à certains sans pour autant freiner les autres. Cela impose aussi de revenir souvent et par petites touches sur une notion afin de proposer souvent, d'éviter d'imposer et de laisser du temps au temps.
Pour autant la cohésion du groupe-classe reste fondamentale dans les apprentissages. ***Une différenciation réussie est une différenciation qui permet de maintenir le groupe-classe dans un même projet global.***

Il est possible d'y arriver, sans faire preuve de virtuosité pédagogique ou didactique, tout simplement en identifiant et en adoptant quelques gestes professionnels simples qui ont fait leur preuve et qui ne nécessitent qu'une solide organisation.

a) Quelques exemples de différenciation pédagogique

❖ ***Jouer sur les paramètres didactiques.***

Pour ne pas marginaliser certains élèves relativement à l'acquisition du programme, il est essentiel de proposer très régulièrement des situations d'apprentissage visant les mêmes objectifs de formation pour tous. Par exemple, en classe de sixième ou de cinquième, le puzzle de Brousseau ou sa variante proposée par R. Charnay offre une situation d'apprentissage permettant très efficacement de faire identifier aux élèves qu'agrandir chacune des pièces du puzzle ne revient pas à ajouter le même nombre à toutes les mesures mais à multiplier toutes les mesures par un même nombre. Toutefois, il est possible en jouant sur les données du problème de différencier l'exigence requise au niveau de la maîtrise technique. Proposer à certains élèves des agrandissements du type « le côté qui mesure 8 cm devra mesurer 16 cm sur le puzzle agrandi », à d'autres « le côté qui mesure 8 cm devra mesurer 12 cm sur le puzzle agrandi », à d'autres « le côté qui mesure 7 cm devra mesurer 12 cm sur le puzzle agrandi » ne nécessite pas le même degré de maîtrise au niveau des nombres. Le fait que les uns aient un coefficient d'agrandissement entier ou décimal, alors que les autres ont un coefficient d'agrandissement non décimal, ne nuit pas à l'objectif principal de formation tout en permettant de tenir compte de la maîtrise ou non de la notion de quotient.

À d'autres moments, modifier les paramètres didactiques d'un problème peut faciliter pour les uns la mise en œuvre de stratégie personnelle, inciter les autres à mettre en œuvre une stratégie experte.

- ***Prévoir des questions « défi »***

Le temps nécessaire à la résolution d'un problème est très variable d'un élève à l'autre. Or la gestion de la classe devient vite très compliquée quand la moitié des élèves n'ont pas achevé le travail de recherche à fournir sur les situations considérées comme incontournables tandis que l'autre moitié a déjà terminé les résolutions attendues et s'impatiente. Classiquement, on demande alors aux plus rapides de rédiger soigneusement leurs résolutions, on leur propose d'aider les autres ou encore on leur donne trois exercices du livre. Toutes ces solutions, qui ne se résument pas à permettre aux plus rapides d'avancer plus vite dans ce qui *in fine* sera attendu de tous (ce qui ne ferait qu'augmenter les écarts entre les élèves), peuvent bien sûr être mises en œuvre avec profit. Une autre pratique efficace consiste à exploiter ces temps pour permettre aux élèves les plus à l'aise de se confronter à des questions « défi » qui ne seront pas proposées à tous et sur lesquelles il n'y aura pas mise en commun.

Par exemple, en quatrième, on propose à chaque élève de résoudre les trois problèmes suivants :

Des histoires d'héritage …

1) Hélène hérite des deux septièmes de la fortune de sa tante qui s'élève à 56 000 €.
   Quelle somme d'argent reçoit Hélène ?

2) Pierre, Julie et Christine se partagent la fortune de leur père.
   Pierre reçoit le tiers de cette fortune, Julie les deux cinquièmes et Christine hérite du reste.
   Quelle fraction de la fortune de son père représente la part de Christine ?

3) Jean hérite des cinq septièmes de la fortune de sa grand-mère : il reçoit 20 000 €.
   À combien s'élève la fortune de sa grand-mère ?

Ces trois problèmes sont les trois versions possibles d'un problème de changement d'états. Dans le premier, l'état initial et le mode de changement d'état sont donnés. Dans le second, il s'agit de trouver le mode de changement d'état. Dans le troisième, le mode de changement d'état et l'état final sont connus. Un élève qui a bien travaillé ces trois problèmes a eu un temps d'apprentissage pertinent.

Il est possible de proposer à ceux qui ont résolu ces trois problèmes de chercher le suivant. Ce problème mobilise les mêmes savoirs mais sa résolution nécessite une maîtrise plus grande.

> 4) Georges, Michel et Claude se partagent la fortune de leur oncle.
> Georges reçoit les sept neuvièmes de la somme totale et Michel le sixième.
> La part de Claude est de 5 000 €.
> À combien s'élève la fortune de l'oncle ?

Pour les plus rapides on peut encore proposer la résolution du problème suivant :

> 5) Une enquête sur l'apprentissage de l'allemand et de l'anglais chez les élèves de quatrième fait ressortir que :
> - cinq douzièmes des élèves interrogés n'apprennent pas l'allemand ;
> - 500 élèves apprennent à la fois l'allemand et l'anglais ;
> - un quart des élèves interrogés n'apprennent pas l'anglais ;
> - un douzième des élèves interrogés n'apprennent ni l'allemand ni l'anglais.
>
> Combien d'élèves ont-ils été interrogés au cours de cette enquête ?

L'objectif étant de rester toujours disponible pour aider les élèves en difficulté, il est important de prévoir une aide écrite que l'on peut donner à des élèves rapides au cas où leur problème résiste trop.

Si, en cours de séance, on souhaite faire une mise en commun sur l'un ou l'autre des trois premiers problèmes, il va de soi que tous les élèves prennent part au débat. On peut aussi, à l'issue de la séance, choisir de demander aux uns de rédiger, à la maison, les solutions des trois premiers problèmes, aux autres celle du quatrième et enfin aux plus rapides celle du cinquième. La synthèse collective qui aura lieu la séance suivante ne portera bien sûr que sur les trois premiers problèmes. Les annotations du professeur seront donc plus importantes pour le 4) et le 5).

Quand on pratique une telle différenciation, il est bon de la présenter à la classe pour lui donner du sens. Il faut, en effet, éviter qu'elle soit ressentie comme porteuse de ségrégation : le professeur peut expliquer que ce protocole permet à chacun de travailler à son rythme et le rend, lui, plus disponible pour les élèves en difficulté.

On peut aussi parfois faire en sorte que les questions « défi » posées à certains soient quand même l'occasion d'une mise en commun collective, ce qui atténue beaucoup l'impression de clivage dans la classe (voir un exemple en annexe 5).
La force de cet exemple par rapport au premier est de maintenir davantage le groupe-classe dans un même projet global tout en faisant travailler chacun à sa mesure.

Dans les deux exemples présentés en annexe, ***les élèves en difficulté ont un vrai temps pour travailler des aptitudes du socle, même dans un apprentissage « hors socle »[3].***

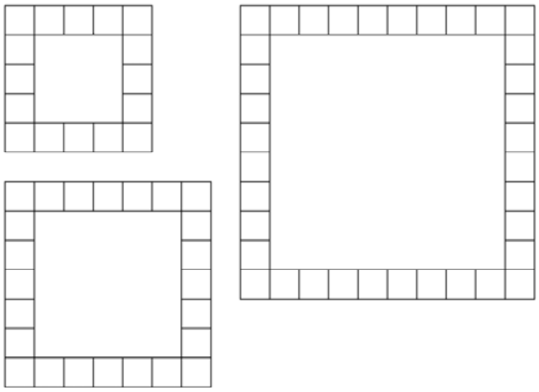
❖ *Différencier les attendus ou exigences*

Proposer des problèmes, sans induire *a priori* de réponse experte, permet souvent la coexistence de plusieurs niveaux ou plusieurs formes de réponses. Ce type de différenciation ne demande pas de protocoles ou de préparations très compliqués puisque

[3] Voir Annexe 5.

tous les élèves travaillent au même moment sur la même tâche. Il s'agit simplement d'ouvrir le questionnement pour que chacun soit capable, d'une manière ou d'une autre, de remplir le contrat et de sentir qu'il a comblé les attentes.

Par exemple, ce sera possible dans l'exercice de dénombrement ci-dessous, parce que les attentes sont d'emblée différenciées :

> Pierre joue avec des mosaïques de couleur.
> Il dispose ses mosaïques pour obtenir des « carrés ».
>
> 
>
> Il se demande en jouant s'il peut savoir à l'avance combien de mosaïques il lui faut pour fabriquer n'importe quel carré.
> Pouvez-vous l'aider ?

Dans l'énoncé, on ne dit pas « Appelons n le nombre de mosaïques sur un côté. Établir une formule qui donne le nombre de mosaïques sur un carré de côté n ». On attend, en effet, que certains utilisent une méthode discursive, que d'autres élaborent un modèle algébrique et que d'autres encore utilisent toutes sortes de formes intermédiaires.

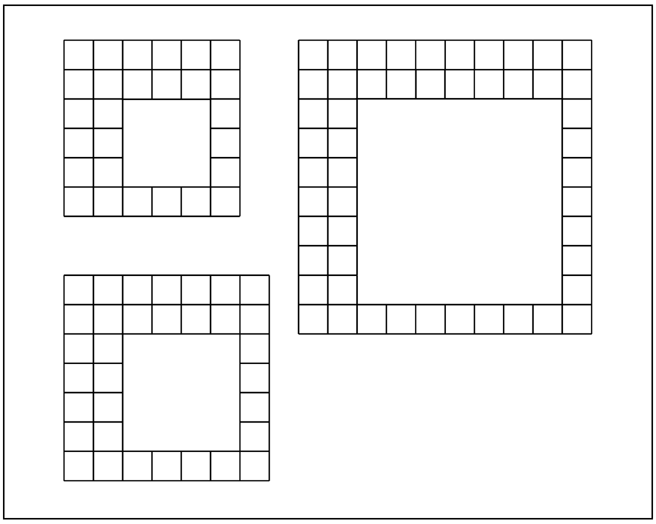
Voici quelques productions d'élèves :

<table>
<tr>
<td>1.
On prend le nombre des mosaïques d'un côte, puis on le multiple par 4 (car il y a 4 côtes égaux dans un carré) puis on enlève 4 à cause des angles droits.</td>
<td rowspan="2">2.
(nombre de carreaux par côté x 4) _4 = nombre de carreaux dont on aura besoins pour faire les côté

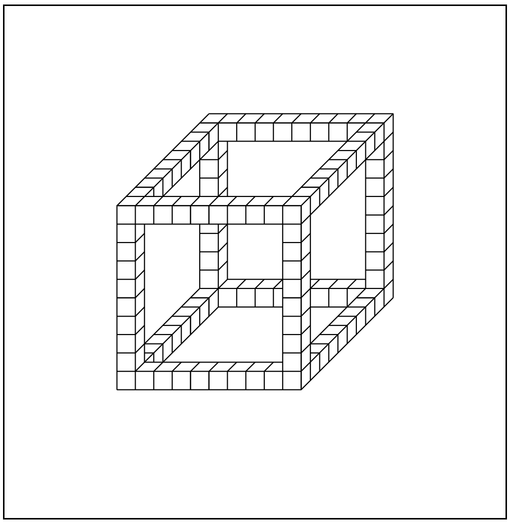
exemple : 40 carreaux de côte =
(40 x 4) - 4 = 156
Il aura besoine de 156 pour faire les 4 côtes

Explication : les 4 côtes du carrés.
(40 x 4) - 4 = 156 ← nombre de carreau dont ils auront besoins
nombre de carreau par côté
les carreaux comptés plusieurs fois.</td>
</tr>
<tr>
<td>3.
A = nombre de carreaux par coter
Ax4-4 = nombre total de carreaux sur les coter
ex. 10x4-4 = 36</td>
</tr>
</table>

Lors de la phase de synthèse, le professeur peut convenir que les trois productions sont bien la preuve que le contrat est rempli. La différenciation possible des attentes fait qu'à ce stade, tous les élèves sont en réussite. Pour autant, la classe n'en reste pas à ce constat. En effet, la comparaison des différents types de productions est un des éléments moteurs de l'apprentissage. Elle va enrichir les représentations de chacun et provoquer de l'émulation. La simultanéité de ces productions de natures différentes s'avère souvent extrêmement formatrice pour tous. On peut le mesurer, en proposant, à distance, une situation analogue :



ou



On constate alors que chacun a pioché dans les idées des autres pour faire évoluer sa seconde production : ceux qui avaient produit du discours la première fois proposent des embryons de formules, ceux qui avaient des pseudo-formules formalisent mieux, …

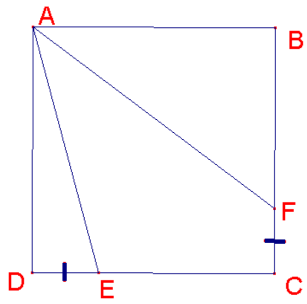
- ***Gérer des états d'avancement divers dans la réalisation d'une tâche complexe***

Gérer la double exigence du programme et du socle commun, maintenir la cohésion du groupe classe, faire acquérir solidement à tous les attendus du socle commun nécessitent de confronter régulièrement tous les élèves à des tâches complexes. Il faut alors prévoir des protocoles permettant de gérer des états d'avancement divers dans la réalisation de cette tâche complexe.

Toutefois faire vivre en classe une recherche de problème ouvert surtout si cette recherche nécessite de s'inscrire dans une certaine durée (une séance par exemple), ***peut générer des problèmes de gestion de classe*** qu'il est préférable d'anticiper.

Par exemple, imaginons de poser le problème suivant dans une classe de troisième.

Construis un carré ABCD de côté 10 cm.
Choisis un nombre compris entre 1 et 10 et place le point E sur le segment [DC] tel que la longueur du segment [DE] soit égale à ce nombre.
Construis le point F du segment [BC] tel que DE = FC.
Calcule l'aire du quadrilatère AECF.
Compare ton résultat avec celui de ton voisin.
Quelle conjecture peux-tu faire ?
Démontre cette conjecture.



Il ne va pas falloir beaucoup de temps à certains élèves pour faire la figure, calculer l'aire du quadrilatère, constater qu'ils obtiennent 50, comme d'autres camarades aussi rapides qu'eux, et se lancer dans l'élaboration d'une stratégie permettant de prouver que cette aire est bien toujours égale à 50 (stratégie qui peut se révéler être un passage à l'algèbre ou une comparaison des aires de deux triangles tels que AFC et ADE ou ….).
Pendant ce même laps de temps, certains élèves n'auront peut-être eu que la possibilité de faire la figure, de constater que AECF n'est pas une figure géométrique classique et qu'en conséquence aucune formule connue n'est opérante pour donner immédiatement cette aire.
Dans une première confrontation des productions individuelles, si on n'y prend pas garde, les premiers peuvent très vite enlever toute occasion aux seconds de revisiter des notions fondamentales exigibles dans le cadre du socle commun (aire d'un triangle rectangle, sens des opérations, calculs), d'élaborer un raisonnement (comment calculer l'aire de ce polygone ?), de construire des aptitudes importantes telles que faire preuve de logique et de rigueur et donc distinguer ce dont on est sûr de ce qu'il faut prouver.
En effet, dans une classe, les réponses se propagent vite et si certains élèves savent comment calculer l'aire du quadrilatère et sont persuadés que cette aire est toujours égale à 50, ils risquent fort d'aider leurs camarades de la pire façon à savoir en leur donnant simplement les réponses : « pour calculer l'aire tu fais comme ceci », « mais si, cette aire elle fait toujours 50 », « tu n'as qu'à poser DE = x » !

Obtenir que les bons élèves ne « mangent » pas les problèmes des plus lents, faire en sorte que tous les élèves s'impliquent dans une recherche, qu'ils aient véritablement le temps d'avancer sur leurs difficultés, sans que pour autant les plus rapides soient freinés dans leur activité, cela nécessite un peu d'anticipation et d'organisation.

Un exemple d'organisation possible :
On peut, dans un premier temps, éviter de donner le problème dans toute sa globalité. Si la question de la généralité n'est pas posée d'emblée, les élèves plus rapides risquent moins de bousculer les autres. En outre, il est tout à fait formateur de permettre aux élèves de poser eux-mêmes la question de la généralité.

Temps n° 1 : travail proposé aux élèves à la maison.

Construis un carré ABCD de côté 10 cm. Choisis un nombre compris entre 1 et 10 et place le point E sur le segment [DC] tel que la longueur du segment [DE] soit égale à ce nombre. Construis le point F du segment [BC] tel que DE = FC. Explique comment tu ferais pour calculer l'aire du quadrilatère AECF.

Temps n° 2 : mise en commun des difficultés rencontrées.
Les élèves sont invités à dire ce qui leur a posé problème par petits groupes ou en plénière. Les autres fournissent des aides pour trouver tout seul et surtout pas la réponse (avec l'habitude, les élèves savent de mieux en mieux trouver les aides adéquates, sans dévoiler la solution : ce travail est aussi très formateur). Le professeur n'intervient qu'en dernier lieu.

Temps n° 3 : travail à la maison.
Les élèves qui n'ont pas réussi la première fois reprennent le travail à la maison pour un autre nombre.

Temps n° 4 : mise en commun.
Une conjecture a peut-être déjà été exprimée en aparté par quelques élèves. La question de la généralité est enfin posée collectivement. Il convient d'accepter que certains élèves ne parviennent pas seuls à la preuve.

b) Une progression spiralée pour donner du temps à tous

L'organisation en spirale de la progression était déjà recommandée dans les programmes mais l'apparition du socle commun en renforce notablement les avantages.

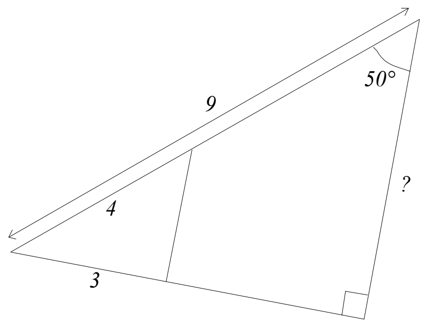
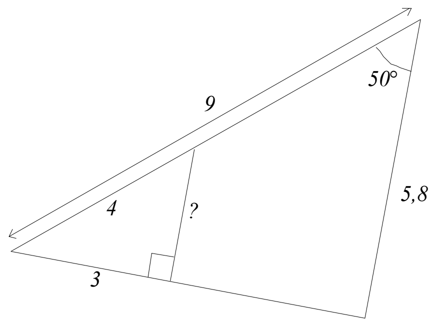
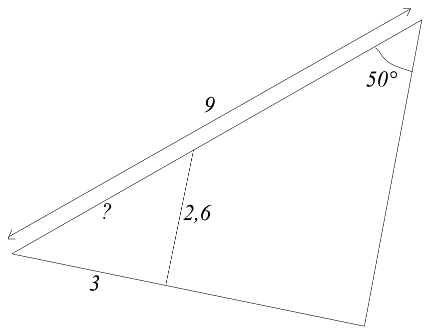
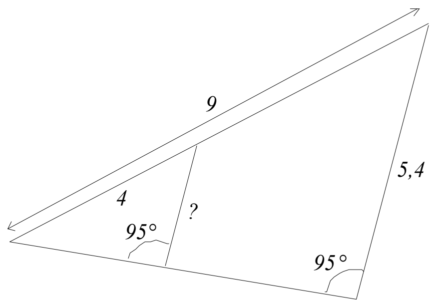
1. *Elle permet de gérer la priorité à donner aux aptitudes du socle sur celles du programme qui sont hors socle*. Une progression spiralée offre sur chaque thème des approfondissements successifs proposés à plusieurs reprises durant l'année. Le premier épisode de travail sur un thème donné peut viser en priorité les aptitudes du socle et réserver pour la suite les autres objectifs fixés par le programme sur ce thème. Une telle organisation appliquée à différents thèmes garantit la construction des aptitudes du socle dans le travail de l'année.
2. *Elle permet de mettre en place une évaluation, voire une validation, des aptitudes respectant les rythmes d'apprentissage individuels des élèves*. En multipliant les réinvestissements sur différents thèmes, elle favorise l'entretien et la consolidation dans la durée des aptitudes acquises. Mais elle permet aussi de multiplier et de renouveler au fil du temps les occasions d'évaluation d'aptitudes que certains élèves mettent plus de temps que d'autres à construire.

Quelques manifestations d'une progression en spirale.

❖ ***L'entraînement au quotidien, à petites touches.***

Une préconisation forte consiste à proposer, lors de toute séance, un temps consacré à des activités rapides. Une telle pratique permet de traiter certaines notions dans la durée (sans y consacrer au total plus de temps) ce qui facilite aussi une mobilisation fréquente de ces notions.
Exemple : quelques « activités mentales ».

Par exemple, pour poursuivre l'apprentissage de théorèmes de géométrie en entraînant tous les élèves à reconnaître leur champ d'application et à les utiliser en acte, on peut proposer, au début de plusieurs séances, éventuellement espacées :

<table>
<tr>
<td>Jour 1

</td>
<td>Jour 2

</td>
</tr>
<tr>
<td>Jour 3

</td>
<td>Jour 4

</td>
</tr>
</table>

Chaque activité se mène en deux temps brefs.
Temps 1 : comment calculer la longueur demandée ? (trois outils sont disponibles : Pythagore, Thalès, le cosinus)
Mise en commun argumentée.
Temps 2 : faire le calcul à 0,1 près.

Pour ces activités rapides, aucune rédaction n'est demandée. Les élèves produisent un résultat sur leur cahier de recherche. La correction est orale avec sollicitation des élèves (Untel ? Qui n'est pas d'accord ? Pourquoi ? Qui a fait autrement ? Qui peut redire comment ça marche ?) ou alors très magistrale, juste pour entraîner et entretenir un apprentissage, le professeur redonne éventuellement des conseils.

Ces activités rapides peuvent aussi être l'occasion d'une évaluation formative pour le professeur et formatrice pour les élèves.
Par exemple, lorsque les élèves viennent d'apprendre à additionner deux nombres décimaux relatifs en 5^{e} (voir annexe 6), chaque jour en début d'heure, avant de faire un autre travail – à caractère géométrique – on peut proposer :

> • **Jour 1 :** cinq sommes de deux termes.
> Les élèves se notent pour eux-mêmes. Ils mesurent ainsi l'avancée de leurs apprentissages et le professeur peut engager, anonymement, ceux qui ont moins de 4/5 à s'entraîner à la maison.

• **Jour 2 :** cinq sommes de deux termes.
Les élèves se notent à nouveau. Le professeur fait un sondage en comptant le nombre de notes supérieures ou égales à 4. Il réalise ainsi, en deux minutes une évaluation formative indispensable pour son pilotage. Là encore, il engage les élèves en difficulté à un travail personnel. Il peut aussi demander qui pense avoir progressé du jour 1 au jour 2 : c'est une façon de reconnaître les avancées des élèves et d'encourager les plus en difficulté à poursuivre leurs efforts à la maison.

• **Jour 3 :** des sommes à trous.
C'est encore l'occasion d'un entraînement pour l'addition, mais aussi une préparation pour l'apprentissage futur de la soustraction.

• **Jour 4 :** deux sommes de cinq termes avec des opposés.

❖ *Différer la phase d'institutionnalisation*

Institutionnaliser trop tôt a souvent pour effet de donner l'impression à l'élève qu'il s'agit ensuite d'appliquer une recette. Il faut en effet beaucoup se méfier des recettes, car une recette n'est pas pour un élève le moyen de comprendre plus vite. Cela devrait rester pour tout élève le moyen d'aller plus vite une fois qu'il a compris.
De plus, un objectif majeur consiste à mettre à tout moment tout élève en activité mathématique, alors qu'appliquer une technique non comprise ne peut être considéré comme une activité mathématique.

Voir en annexe 6 un exemple de protocole d'enseignement pour introduire l'addition de deux nombres relatifs en 5^{e}.

❖ *Le principe du « fil rouge » pour quelques concepts importants*

Exemple : la proportionnalité – pas de « chapitre » mais des « temps autour de la proportionnalité » en multipliant les occasions de travail sur ce thème.

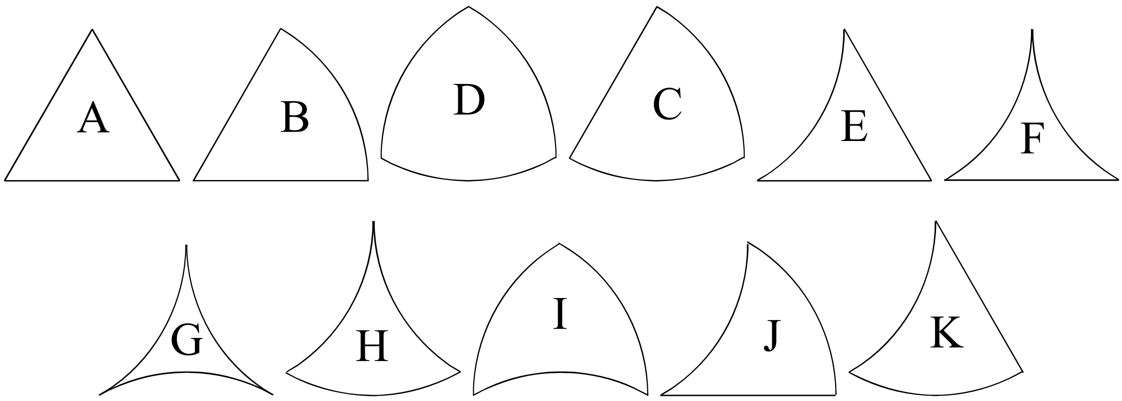
❖ *Préparer les apprentissages (évaluation diagnostique)*

Tout nouvel apprentissage nécessite que les élèves disposent d'un certain nombre d'acquis préalables. Quand le professeur fait travailler les élèves pour construire un nouveau savoir, si certains ne maîtrisent pas ces acquis nécessaires pour avancer, ils se heurtent à des obstacles qui n'ont rien à voir avec ceux dont le franchissement est susceptible de générer le nouvel apprentissage. La gestion simultanée des élèves qui sont vraiment sur la question du jour et de ceux qui ne peuvent pas encore l'envisager est alors quasiment impossible. Il est essentiel de veiller à n'être pas contraint soit d'arrêter tout le monde pour faire des rappels dont certains n'ont pas besoin, soit de poursuivre au risque que le nouvel apprentissage ne fasse pas sens pour ceux qui ne sont pas entrés dans la tâche. Pour ce faire, il faut anticiper et préparer l'avenir.
Par exemple, dans une introduction du théorème de Pythagore à l'aide d'un puzzle, les élèves ont besoin de maîtriser le concept d'aire et de le distinguer de celui de périmètre. Deux à trois semaines avant de travailler sur ce théorème, on peut donc envisager les activités mentales suivantes, pendant deux ou trois minutes au début de plusieurs séances :

- Représenter sur quadrillage deux figures qui ont même aire et des périmètres différents.
- Représenter sur quadrillage deux figures qui ont même périmètre et des aires différentes.
- Le périmètre d'un carré vaut 36 cm. Son côté vaut donc …
- L'aire d'un carré vaut 36 cm^2 Son côté vaut donc ...

On peut aussi donner un exercice à la maison :

Les pièces du Curvica Triangulaire s'obtiennent à partir d'un triangle équilatéral dont on peut choisir de creuser, bomber ou laisser en l'état chaque côté :



Classer ces pièces dans l'ordre croissant de leurs périmètres, puis dans l'ordre croissant de leurs aires.

Cette préparation aura un double intérêt : elle permettra de travailler sur les prérequis de l'apprentissage du théorème de Pythagore, mais aussi de faire progresser les élèves sur des aptitudes du socle.

Ces précautions rendront les élèves plus disponibles pour la nouveauté et s'il en reste quelques-uns en difficulté sur la notion d'aire, ils seront peu nombreux et le professeur pourra alors les accompagner de façon spécifique.

ANNEXES RELATIVES A LA PARTIE « FORMATION »

Annexe 1 : productions d'élèves

Productions d'élèves pour le problème 2

$a \times 2 + 3 = 2a + 3$, $(a-2) \times 5 + 8 = 5a - 10 + 8 = 5a - 2 =$ $2a + 3a - 2$. 2a+3 doit etre égale à 2a+3a-2. Cela est égale. le reste : 3 doit être égale à 3a-2. le 3a doit être egale a 5 car 5-2=3. Il faut faire $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ donc $a = \frac{5}{3}$.	a = n'importe quel nombre. $(a-2) \times 5 + 8 = 5a - 10 + 8$ $= \underline{5a} - 2$ $\boxed{5a} - 2$ $2a + \underline{3}$ $2a + \underline{3a - 2}$ $\underbrace{3a}_{5} - 2 = 3$ $\frac{5}{3} \approx 1,6666$ $2 \times \left(\frac{5}{3}\right) + 3 = 5 \times \frac{5}{3} - 2 \approx 6,333333333$ Donc "a" est $\frac{5}{3}$ pour pouvoir trouver le même nombre dans les 2 formules.

Un exemple de résolution « artisanale » de $5x + 5 = 7x + 3$ avant la présentation de la résolution experte par le professeur.

Walid
Elodie | On devellope les 2 operations en essayant de les simplifier, pour ça on soustrait le même nombre(s) des 2 côtés.

ex : $5x + 5$ devellopée → $5x + \overbrace{3 + 2}^{+5}$
$7x + 3$ devellopée → $\underbrace{5x + 2x}_{7x} + 3$

$\cancel{5x} \cancel{+3} + 2$
$\cancel{5x} + 2x \cancel{+3}$ = il reste $2x$ et 2

$2x = 2$ On applique l'opération à l'envers
$x = \frac{2}{2} = 1$
$2 \times 1 = 2$ Donc la valeur de x est $\boxed{1}$

On verifie

$5 \times 1 + 5 = 10$
$7 \times 1 + 3 = 10$

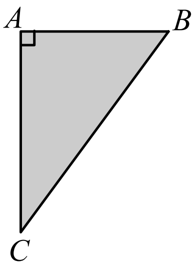
Annexe 2 : propriété de Pythagore

Un exemple de stratégie pédagogique élaborée dans le but de construire les acquis sur la propriété de Pythagore sans chercher à proposer une approche expérimentale (dans le document d'accompagnement de géométrie p. 14, il est expliqué qu'une telle approche n'est pas vraiment possible). Le but visé consiste aussi à laisser le plus de place possible pour une véritable activité mathématique de chaque élève.

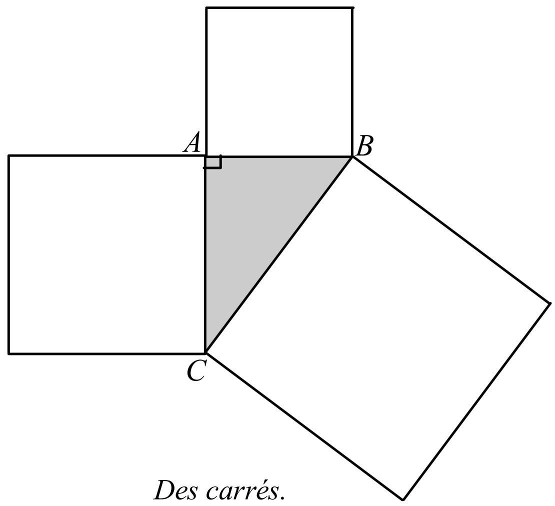
Durée de la séquence (temps indicatif : 100 min)

Phase 1 : récit du professeur (comme une histoire).

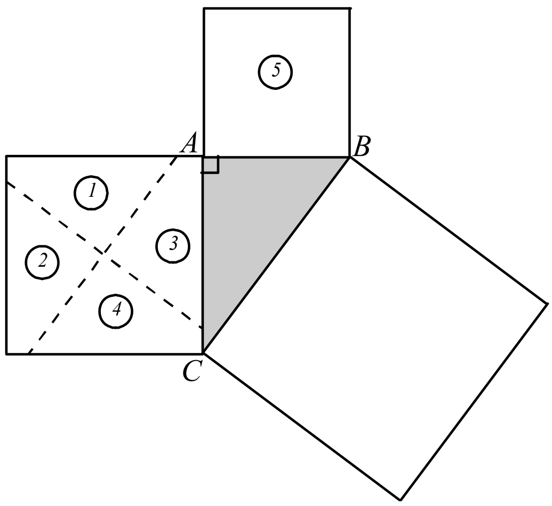
Une célèbre propriété des triangles rectangles



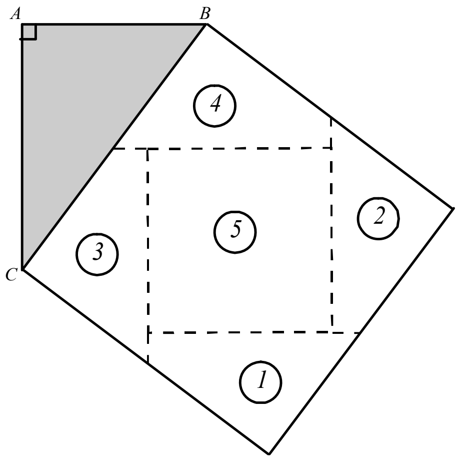
Un triangle rectangle quelconque.



Des carrés.



On partage le carré « moyen » en quatre parties.



Des mathématiciens ont prouvé que l'on peut « recouvrir » parfaitement le grand carré avec les deux autres carrés.
Ils en ont déduit une propriété concernant les côtés des triangles rectangles.

L'assemblage du puzzle est montré à l'aide d'un appareil de visualisation collective. Rien de plus n'est dit. L'exercice suivant est aussitôt proposé.

Phase 2 : les élèves s'emparent du récit pour construire un nouvel outil.

Exercice
ABC est un triangle rectangle en *A* tel que : *AB* = 3 cm et *AC* = 4 cm.
À quoi peut te servir la découverte des mathématiciens dans cette situation ?

Travail individuel strict + concertation-consensus en groupe + plénière.
Lors de la plénière, le triangle *ABC* et les trois carrés du puzzle sont dessinés au tableau, à main levée. Le lien entre l'idée de "recouvrement parfait" et l'égalité des aires est établi.
Les aires sont notées dans les deux plus petits carrés, leur somme dans le plus grand.
Le côté du grand carré est trouvé mentalement, bien sûr sans recourir à la calculatrice.
L'occasion de remédier à la confusion entre « aire et périmètre » se présente : la division de 25 par 4 et non pas la recherche d'un nombre dont le carré est 25.
Pour commencer le chemin vers $\sqrt{a}$, la formulation « quel est le nombre positif qui a pour carré 25 ? » est utilisée.

On reprend l'exercice avec
a) *AB* = 2,8 cm et *AC* = 9,6 cm
b) *AB* = 5 cm et *AC* = 12 cm
puis c) *BC* = 5,8 cm et *AC* = 4,2 cm.

Travail individuel avec entraide si nécessaire.
Les élèves font des croquis avec les carrés (souvent parce qu'ils l'ont vu faire lors de la plénière précédente). S'ils ne le font pas et restent en difficulté, on peut les engager à le faire. Certains se libèrent progressivement des croquis, d'autres pas.

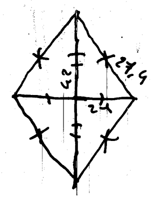
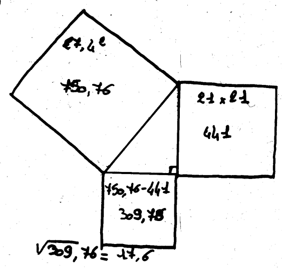
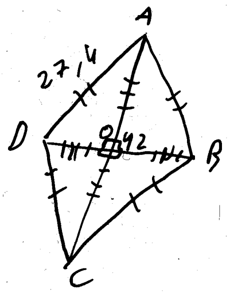
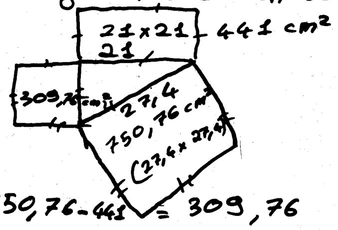
Ces croquis vont constituer des images mentales fortes pour la suite : l'élève est engagé à ne pas oublier d'où viennent les carrés des nombres, à tenir des raisonnement du type « on ne peut pas recouvrir le petit carré avec le moyen et le grand » et donc à consolider le sens de la soustraction.
Mobiliser la propriété ne repose pas de façon nécessaire sur l'application d'une identité qui peut se révéler trop abstraite et difficilement accessible à certains élèves. Aucun élève n'est donc bloqué dans son activité mathématique.
Aucune rédaction particulière n'est demandée à ce stade. Les élèves n'adhéreraient pas très bien et trouveraient artificielle – à juste titre – une rédaction détaillée dans ce genre de situation simple.

Remarque : Les élèves qui ont fini plus vite peuvent être dirigés vers des problèmes qui ne seront pas proposés à tous et qui peuvent ne pas du tout mobiliser ce nouveau savoir. En fin de séquence, est institutionnalisé ce que tout élève a compris, à savoir : les croquis et les calculs.

Annexe 3 : productions d'élèves en géométrie

Problème :
Le côté d'un losange mesure 27,4 cm et l'une de ses diagonales 42 cm.
Quelle est la longueur de sa seconde diagonale ?

Productions d'élèves :

- On sait que un côté du losange mesure 27,4 cm et l'une de ses diagonales mesure 42 cm - pour trouver la deuxième diagonale on fait : $42 \div 2 = 21$ cm conclusion : donc l'autre diagonale fait 21 cm  	Un losange est composé de 4 triangles rectangle.  $\sqrt{309,76} = 17,6$ Nous avons pris la moitié de la diagonale ce qui fait 17,6 pour trouver la longueur de la diagonale il faut multiplier par 2 : $17,6 \times 2 = 35,2$ La longueur de la diagonale est 35,2 cm.
 Dans le triangle AOD rectangle en O $AD^2 - AO^2 = DO^2$ $27,4^2 - 21^2 = 309,76$ $\sqrt{309,76} \simeq 17,6$ $17,6 \times 2 = 35,2$ Donc la seconde diagonale mesure 35,2 cm	Sachant que un losange a des diagonales perpendiculaires on peut trouver le côté d'une des diagonales comme avec un triangle rectangle en prenant la longueur d'une des diagonales et un côté  $750,76 - 441 = 309,76$ $17,6 \times 17,6 = 309,76$ donc le côté mesure 17,6 cm

Annexe 4 : un exemple de protocole d'alternance maison-classe

Remarque préalable :
Dans ce travail, les élèves les plus fragiles rencontrent des difficultés dès le moment où ils essaient de faire la figure. Les autres font la figure, conjecturent et prouvent assez facilement que le quadrilatère est un parallélogramme. Par contre, le fait que PIQA est un rectangle échappe à beaucoup. Le démontrer présente une véritable difficulté pour tous et les débats à ce stade sont très riches.
Le protocole qui suit permet d'accompagner les élèves de façon différenciée dans leurs difficultés (même précoces) pour que tous puissent être bien concernés par le débat centré sur l'argumentation qui mène au rectangle.

Au jour 1, on donne aux élèves l'énoncé suivant :

C est un cercle de centre I. M est un point de C. A est le symétrique de *I* par rapport à M. La médiatrice de [MI] coupe le cercle en deux points : soit P l'un d'eux. Q est le symétrique de P par rapport à M. Quelle est la nature du quadrilatère PIQA ? Justifier la réponse.

Pour le jour 2, ils doivent faire la figure et, en cas de difficulté, préparer des questions précises par écrit.
Au jour 2, en plénière, des questions sont posées aux élèves qui ont réussi, par les élèves qui ont eu des difficultés. Les premières fois où ce dispositif est utilisé, les élèves posent souvent des questions trop vagues. Mais petit à petit, ils apprennent à s'en emparer et leurs questions deviennent propices à une avancée.
Le professeur engage les élèves à rappeler la définition et la propriété caractéristique de la médiatrice, par exemple.
Pour le jour 3, chacun devra avoir une figure correcte et une conjecture de la réponse.
Au jour 3, les élèves échangent leurs cahiers pour contrôler les figures et énoncent leurs conjectures. Le professeur peut animer un débat sans se positionner lui-même.
Pour le jour 4, chacun doit mettre par écrit, sur le cahier de recherche, une argumentation pour prouver sa conjecture.
Au jour 4, les élèves débattent toujours sans que le professeur se positionne. En revanche, il demande à certains de reformuler définitions et théorèmes utiles.
Pour le jour 5, chaque élève écrit son argumentation personnelle ou rédige une démonstration complète sur une copie que le professeur relèvera.
À chaque séance, dix minutes sont consacrées à ce travail. Le reste de la séance est mené de façon ordinaire sur du numérique, par exemple.
Avec un tel protocole, on observe que les phénomènes négatifs décrits plus haut sont beaucoup moins fréquents. En effet, les élèves en difficulté se sentent épaulés et retrouvent de la motivation. En outre, ils constatent que leurs efforts sont récompensés puisque leur production est en général de qualité tout à fait correcte. Les erreurs et les maladresses que le professeur y trouve sont exploitables et lors de la synthèse, ils ont encore la possibilité de progresser.

Certains élèves sont en trop grande difficulté pour affronter seuls certains travaux à la maison : c'est une des raisons principales qui les poussent à les désinvestir. Dans ce dispositif, ils savent que, même s'ils sont bloqués à certains moments devant la tâche, ils vont quand même produire quelque chose d'utile, une question pour le lendemain, par exemple : ils ne seront pas des élèves en échec, mais des élèves qui cherchent.

Annexe 5 : exemple de questions « défi »

On donne un exemple de questions « défi » posées à certains qui peut être l'occasion d'une mise en commun collective (ce qui atténue beaucoup l'impression de clivage dans la classe).

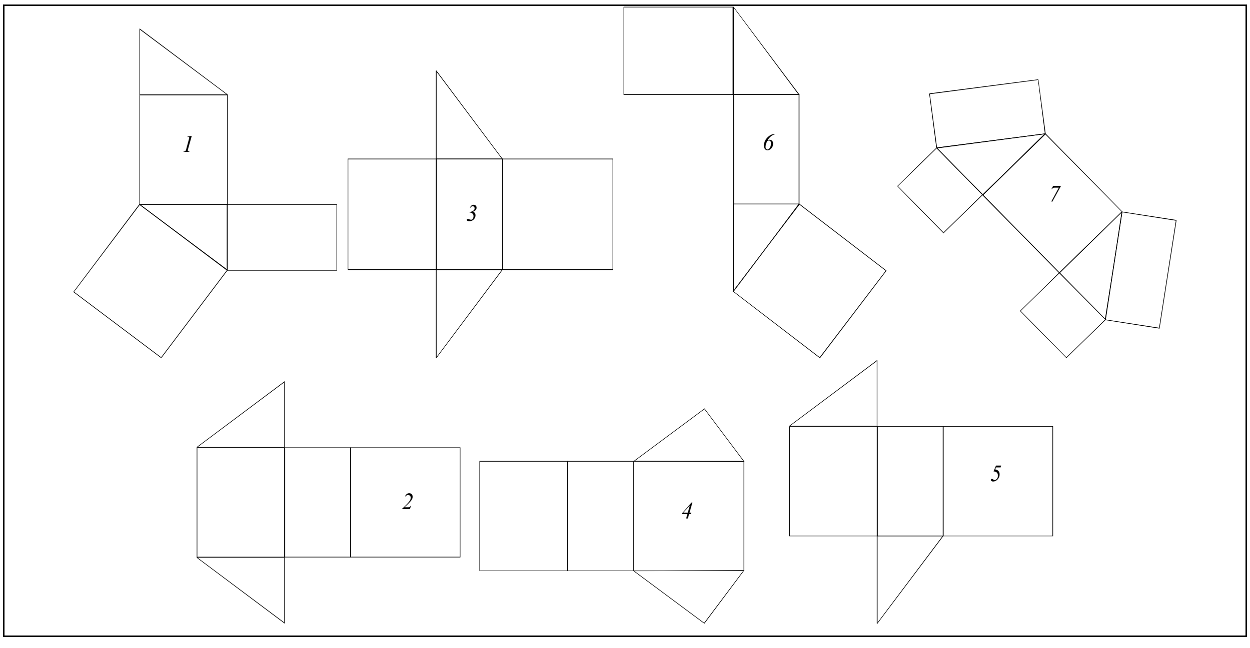
Exercice donné à tous :

Tu travailles dans une usine qui fabrique des bonbons. Ces bonbons ont la forme de petits triangles rectangles de 5 mm d'épaisseur et dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm et 4 cm. Tu dois concevoir des boîtes en carton qui permettent de ranger une pile de 10 bonbons. Dessine, à main levée, une représentation en perspective cavalière d'une de ces boîtes et prépare un patron qui permette de la fabriquer.

Très vite, on voit les écarts se creuser entre les élèves. On peut alors différencier le travail pour éviter que le groupe ne devienne ingérable et permettre à chacun de travailler à son niveau.
Par exemple, définir trois types de contrat :

1. Les élèves en difficulté ne feront que l'exercice. Certains vont bénéficier d'une aide importante : on peut leur montrer les boîtes construites, les leur laisser en manipulation éventuellement. Ils pourront prendre le temps de travailler sur les constructions élémentaires de géométrie plane.
2. Les élèves un peu plus à l'aise feront deux ou trois patrons non superposables. Cette seconde consigne peut leur être donnée à la fin du premier travail.
3. Les plus rapides essaieront de construire le patron le plus original : ce sera leur défi.

Au fil du travail, il est possible de glaner un nombre important de patrons non superposables, justes ou faux, des plus classiques aux plus originaux.
Voici les productions d'une classe :



À la fin de ce travail, on peut retrouver la classe unie sur une même activité : les patrons collectés et représentés sur transparents par le professeur sont-ils satisfaisants ? A quoi le voit-on ?

Les élèves en difficulté pourront manipuler les patrons sur papier pour conforter la classe dans la réponse proposée.
Dans cet exemple, les élèves en difficulté ont un véritable temps pour travailler des aptitudes du socle, même dans un apprentissage « hors socle » que constitue le travail sur les prismes.

Annexe 6 : Exemple de protocole d’enseignement pour l’addition des relatifs

Séance 1
Le professeur : *« Il y a quelques temps, nous avons découvert de nouveaux nombres : les nombres décimaux relatifs. On voudrait pouvoir les additionner en gardant toutes les règles de calcul qu’on utilise déjà avec les nombres positifs.*
Comment faire ? »
(–2) + 5 = ?
Recherche individuelle + concertation par 2 ou par petits groupes.
Plénière : échange + débat.
Sur les cahiers : (–2) + 2 = 0 (la somme de 2 nombres opposés est nulle).

Donc $\boxed{(-2)+5 = (-2)+2+3 = 3}$.

En travail individuel : 7 + (–3) = ; (–3,2) + 6 = .
Fin de séance : autre chose.

Séance 2
(–5) + 8,7 = ; (–3) + (–4) = .
Recherche individuelle + concertation par 2 ou par petits groupes.
Plénière : échange + débat.
Sur les cahiers : (–3)+(–4)+7 = (–3)+(–4)+3+4 = (–3)+3+(–4)+4 = 0 donc $\boxed{(-3)+(-4) = -7}$.
En travail individuel : (–2,5)+(–3) = ; 8,4+(–6) = ; (–3,2)+(–1,2) = .
Fin de séance : autre chose.

Séance 3
(–5)+(–6) = ; 9+(–3) = ; (–9)+2 =
Recherche individuelle + concertation par 2 ou par petits groupes.
Plénière : échange + débat.
Sur les cahiers : (–9)+2 = (–7)+(–2)+2 = –7 donc $\boxed{(-9)+2 = -7}$.
Calcul mental en travail individuel
(–3)+2 = ; (–2)+(–1) = ; 5+(–4) = .

Séance 4
Les élèves s’entraînent en autonomie par deux ou en petits groupes pour préparer une évaluation formative.
Pendant cet entraînement, ils ont consigne de s’entraider à progresser. Ils s’expliquent donc les uns aux autres. Certains commencent à recourir à des explications qui s’appuient bien sur le caractère générique des exemples étudiés. Progressivement, les élèves reviennent moins aux justifications initiales : des règles "élèves" émergent ici et là, sans être imposées à tous.

Par la suite, en plénière, les erreurs seront travaillées par recours aux justifications initiales.
Cependant, des élèves diront qu’ils ont remarqué que la somme de deux nombres relatifs négatifs est négative et que dans ce cas, ils ajoutent les distances à 0. Ces remarques seront valorisées sans être imposées à tous.
Ainsi, les uns peuvent avancer sans être retardés tandis que d’autres peuvent disposer d’un peu plus de temps pour expérimenter.

Un peu chaque jour : un ou deux calculs.