**Ministère de
l'enseignement supérieur
et de la recherche**

Secrétariat Général
Direction générale des ressources humaines

Rapport sur l'agrégation interne et le CAERPA de mathématiques

Année 2007

Ce rapport, rédigé par des membres du jury, est publié sous la responsabilité du président du jury

Table des matières

Composition du jury

1 Composition du jury

Président		
M. André GRAMAIN	Professeur des universités	Lyon
Vice-présidents		
Mme Brigitte BAJOU	Inspecteur général de l'éducation nationale	
M. Marc ROSSO	Professeur des universités	ENS, Paris
M. Georges SKANDALIS	Professeur des universités	Paris VII
M. Eric VAN DER OORD	Inspecteur général de l'éducation nationale	
Secrétaire général		
M. Jean-Marie CHEVALLIER	Maître de conférences	Orléans
Examinateurs		
M. Gilles ALDON	Professeur agrégé	INRP, Lyon
Mme Florence BANTEGNIES	Professeur de chaire supérieure	lycée Saint-Louis, Paris
M. Dominique BARBOLOSI	Maître de conférences	Aix-Marseille III
Mme Françoise BERQUIER	Maître de conférences	Lille
Mme Sylvie BONNET	Professeur de chaire supérieure	lycée Victor Hugo, Besançon
M. Hassan BOUALEM	Maître de conférences	Montpellier
Mme Anne BOUTTELOUP	Professeur de chaire supérieure	lycée Bellevue, Toulouse
M. Michel BOVANI	Inspecteur d'académie/insp. pédagogique régional	académie d'Orléans-Tours
M. Robert BROUZET	Maître de conférences	Montpellier
M. Joseph CESARO	Inspecteur d'académie/insp. pédagogique régional	académie de Nice
M. Rémi CHMURA	Professeur agrégé	lycée Roosevelt, Reims
M. René CORI	Maître de conférences	Paris VII
M. Gérard DEBEAUMARCHÉ	Professeur de chaire supérieure	lycée Clémenceau, Reims
M. Thierry DUGARDIN	Professeur de chaire supérieure	lycée Moissan, Meaux
M. Patrick FERRAND	Inspecteur d'académie/insp. pédagogique régional	académie de Grenoble
Mme Françoise FONTANEZ	Professeur de chaire supérieure	lycée Buffon, Paris
Mme Viviane GAGGIOLI	Professeur de chaire supérieure	lycée La Martinière, Lyon
Mme Michèle GRILLOT	Maître de conférences	Orléans
M. Christophe HENOCQ	Professeur de chaire supérieure	lycée Jacques Decour, Paris
Mme Michèle HENRI	Professeur de chaire supérieure	lycée Camille Guérin, Poitiers
Mme Marie-Emmanuelle JOINT	Professeur agrégé	lycée Brizeux, Quimper
M. Salim KOBEISSI	Professeur agrégé	université de Grenoble II
M. Thierry LAMBRE	Professeur des universités	Clermont-Ferrand
Mme Claire LE GOFF	Professeur agrégé	université de Paris VI
Mme Danièle LINO	Professeur de chaire supérieure	lycée Jacques Decour, Paris
Mme Geneviève LORIDON	Insp. d'académie/insp. pédagogique rég.	académie de Besançon
Mme Marie-Hélène MOURGUES	Maître de conférences	Créteil
Mme Claudine PICARONNY	Maître de conférences	ENS, Cachan
M. Marc POLZIN	maître de conférences	Bordeaux I
M. Hervé QUÉFFELEC	Professeur des universités	Lille I
Mme Françoise PRADIÉ	Professeur chaire supérieure	lycée Gustave Eiffel, Bordeaux
Mme Martine RAYNAL	Inspecteur d'académie/insp. pédagogique régional	académie d'Aix-Marseille
Mme Nicole RIGAL	Maître de conférences	Paris V
M. Claude ROUFF	Professeur de chaire supérieure	lycée Blaise Pascal, Clermont-Fd
M. Bernard SARAMITO	Professeur des universités	Clermont II
M. Eric SIGWARD	Inspecteur d'académie/insp. pédagogique régional	académie de Strasbourg
Mme Angélique SKANDALIS	Professeur de chaire supérieure	lycée Janson de Sailly, Paris
M. Jean-Pierre VIAL	Professeur de chaire supérieure	lycée Buffon, PARIS
M. Georges VINAVER	Professeur agrégé	univeristé d'Évry
M. Laurent VIVIER	Maître de conférences	Orléans-Tours

Statistiques

2 Statistiques

AGRÉGATION INTERNE ET CAERPA DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2007

RÉSULTATS STATISTIQUES

Les épreuves écrites ont eu lieu les 1er et 2 février 2007, la liste d'admissibilité a été signée le 26 mars 2007 :

Agrégation interne : 267 admissibles ; CAERPA : 11 admissibles.

Les épreuves orales se sont déroulées du 8 au 16 avril 2007, au lycée Janson de Sailly à Paris. La liste d'admission a été signée le 16 avril 2007 : Agrégation interne : 107 admis ; CAERPA : 5 admis.

Remarques : Comme on peut le constater sur les tableaux d'évolution des deux concours donnés ci-après, le nombre des candidats présents aux deux épreuves écrites est stable cette année, après une augmentation sensible en 2006. Le nombre de postes est stable au concours de l'enseignement privé, mais en légère diminution au concours d'agrégation. Tous les contrats proposés au concours de l'enseignement privé n'ont pu être pourvus.

Le calendrier prévu pour la session 2008 est le suivant :

Écrit : jeudi 24 et vendredi 25 janvier 2008.

Oral : entre le 20 avril et le 4 mai 2008 à Paris.

Évolution des concours

AGRÉGATION INTERNE

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1989	120	2951	1706	232	120+52*
1990	225	2386	1326	444	225+85*
1991	352	2575	1299	510	352+43*
1992	331	2538	1195	508	331+34*
1993	334	2446	1184	478	334+13*
1994	330	2520	1244	475	330+12*
1995	330	2211	1212	446	330
1996	246	2249	1150	441	246
1997	200	2113	1084	436	200
1998	200	2083	1071	432	200
1999	168	1690	1162	436	168
2000	130	1868	1257	327	130
2001	129	1944	1419	289	125
2002	129	1845	1400	288	129
2003	130	1842	1479	288	130
2004	130	1813	1382	287	130
2005	138	1897	1401	311	138
2006	110	2172	1599	273	110
2007	107	2198	1627	267	107

*liste supplémentaire

CAERPA

Année	Contrats	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1989					
1990					
1991	13				10
1992	20	269	102	22	14
1993	40	302	128	42	25
1994	36	331	156	57	36
1995	31	340	155	53	31
1996	39	375	176	64	39
1997	32	379	181	58	32
1998	28	372	169	61	28
1999	27	328	225	64	26
2000	27	359	246	46	24
2001	25	383	268	35	18
2002	23	326	229	22	10
2003	20	325	258	27	15
2004	24	311	241	21	9
2005	19	297	211	27	12
2006	19	329	240	18	13
2007	20	319	221	11	5

2.1 Statistiques de l'agrégation interne 2007

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites

Les candidats aux concours étrangers gérés par le jury ne sont pas comptabilisés

Les candidats étrangers aux concours français sont comptés normalement

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	2198	1627	267	107
Femmes	776	556	75	30
Français et U.E.	2198	1627	267	107
Union Européenne	0	0	0	0
Étrangers hors UE	0	0	0	0
Moins de 50 ans	2025	1500	260	101
Moins de 45 ans	1872	1394	251	96
Moins de 40 ans	1666	1249	241	91
Moins de 35 ans	1231	923	199	81
Moins de 30 ans	344	264	60	24

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	8	6	4	12	10	9	12	11	10
épreuve 2 (sur 20)	8	6	4	12	10	9	13	11	10
Total écrit (sur 200)	81	62	42	111	100	94	119	107	99

le total d'écrit est ramené sur 20

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écr it 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	2	2	1	2	2	2
17	2	2	2	2	2	1	2	2	2
16	2	2	2	4	4	3	5	5	5
15	4	4	4	11	11	7	12	12	10
14	10	10	9	23	23	16	22	22	18
13	14	14	12	36	36	24	37	37	27
12	33	33	25	72	66	39	71	70	45
11	71	71	47	124	108	58	133	126	66
10	142	142	79	204	170	80	233	187	87
9	256	256	105	319	220	95	382	232	97
8	429	267	107	506	258	105	562	259	104
7	637	267	107	738	264	106	761	265	106
6	870	267	107	957	267	107	942	267	107
5	1078	267	107	1134	267	107	1135	267	107
4	1258	267	107	1347	267	107	1288	267	107
3	1411	267	107	1476	267	107	1424	267	107
2	1530	267	107	1607	267	107	1529	267	107
1	1605	267	107	1647	267	107	1617	267	107
0	1627	267	107	1664	267	107	1641	267	107

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	13	10	7	15	13	10
épreuve 2 (sur 20)	12	9	7	14	13	10
Total général (sur 400)	223	199	179	251	230	214

le total général est ramené sur 20

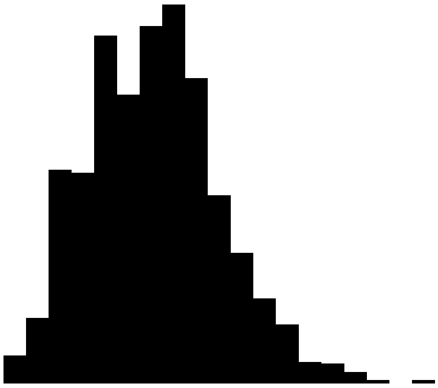
Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0
18	0	0	5	5	5	5
17	0	0	11	11	8	8
16	0	0	16	15	17	17
15	1	1	32	30	26	25
14	4	4	50	45	41	38
13	16	16	68	55	60	54
12	37	37	88	68	72	63
11	67	67	111	76	97	75
10	129	107	135	85	122	84
9	195	107	156	89	143	89
8	234	107	182	95	172	97
7	261	107	212	103	200	101
6	263	107	233	107	225	104
5	263	107	251	107	249	105
4	263	107	259	107	259	106
3	263	107	262	107	263	107
2	263	107	263	107	263	107
1	263	107	263	107	263	107
0	263	107	264	107	263	107

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	98	71	8	3
BESANCON	33	23	6	3
BORDEAUX	88	58	15	4
CAEN	41	29	3	1
CLERMONTFERRAND	38	33	5	2
DIJON	59	47	5	1
GRENOBLE	99	77	12	9
LILLE	171	133	15	5
LYON	98	69	18	8
MONTPELLIER	90	67	10	4
NANCY METZ	82	63	9	4
POITIERS	55	39	11	4
RENNES	45	38	5	1
STRASBOURG	69	53	10	5
TOULOUSE	82	57	9	6
NANTES	62	42	5	2
ORLEANS TOURS	67	43	3	0
REIMS	38	28	5	2
AMIENS	70	56	10	5
ROUEN	71	56	10	8
LIMOGES	24	20	3	2
NICE	96	77	13	6
CORSE	17	11	2	0
REUNION	76	51	9	1
MARTINIQUE	39	22	1	0
GUADELOUPE	36	25	0	0
GUYANNE	12	11	1	1
PARIS/CRET/VERS	442	328	64	20

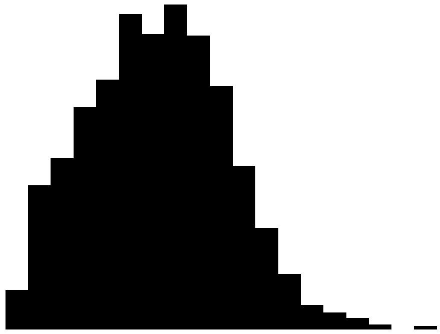
Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	28	20	0	0
ENSEIGNANT SUP	13	6	1	1
ENS.FPE.TIT	75	52	9	3
AG FPE	38	17	4	1
CERTIFIE	1898	1441	251	102
PLP	119	75	1	0
PROF ECOLES	27	16	1	0

catégories				
	I	P	a	A
DIVERS	4	2	0	0
ENS.TIT.MEN	2077	1553	254	103
AG.FONC.PUB.ETA	117	72	13	4

Centres d'écrit				
	I	P	a	A
DIVERS	2198	1627	267	107



Écrit 1



Écrit 2

Oral 1

Oral 2

2.2 Statistiques du CAERPA 2007

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites

Les candidats aux concours étrangers gérés par le jury ne sont pas comptabilisés

Les candidats étrangers aux concours français sont comptés normalement

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	319	221	11	5
Femmes	128	87	4	3
Moins de 50 ans	291	200	11	5
Moins de 45 ans	247	173	11	5
Moins de 40 ans	203	142	9	4
Moins de 35 ans	137	95	6	4
Moins de 30 ans	46	32	3	3

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	7	4	3	15	12	9	15	15	13
épreuve 2 (sur 20)	7	5	3	14	12	11	14	14	13
Total écrit (sur 200)	64	49	29	134	111	104	145	134	134

le total d'écrit est ramené sur 20

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écr it 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	2	2	2	0	0	0
14	1	1	1	2	2	2	2	2	2
13	3	3	3	3	3	3	4	4	3
12	3	3	3	5	5	4	5	5	4
11	5	5	4	9	7	4	8	8	5
10	9	9	5	13	7	4	15	11	5
9	11	11	5	21	8	4	22	11	5
8	23	11	5	32	10	5	38	11	5
7	39	11	5	59	11	5	57	11	5
6	69	11	5	79	11	5	88	11	5
5	107	11	5	109	11	5	114	11	5
4	139	11	5	150	11	5	142	11	5
3	163	11	5	174	11	5	174	11	5
2	194	11	5	205	11	5	196	11	5
1	215	11	5	216	11	5	216	11	5
0	221	11	5	223	11	5	222	11	5

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	13	8	5	16	13	8
épreuve 2 (sur 20)	12	11	7	13	11	11
Total général (sur 400)	232	205	180	282	232	224

le total général est ramené sur 20

Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0
16	0	0	1	1	0	0
15	0	0	1	1	0	0
14	1	1	1	1	0	0
13	1	1	2	2	1	1
12	1	1	2	2	2	1
11	3	3	2	2	5	3
10	5	5	2	2	6	4
9	8	5	2	2	6	4
8	8	5	5	5	7	4
7	10	5	6	5	9	5
6	11	5	7	5	10	5
5	11	5	8	5	11	5
4	11	5	8	5	11	5
3	11	5	9	5	11	5
2	11	5	11	5	11	5
1	11	5	11	5	11	5
0	11	5	11	5	11	5

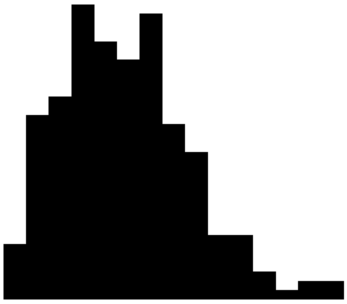
Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	19	14	1	1
BESANCON	3	3	0	0
BORDEAUX	9	6	1	1
CAEN	4	4	0	0
CLERMONTFERRAND	7	5	1	0
DIJON	10	8	1	0
GRENOBLE	11	6	1	1
LILLE	39	32	1	0
LYON	12	8	0	0
MONTPELLIER	9	5	0	0
NANCY METZ	10	8	1	0
POITIERS	5	3	1	1
RENNES	19	9	0	0
STRASBOURG	10	6	0	0
TOULOUSE	8	4	0	0
NANTES	36	26	1	1
ORLEANS TOURS	7	5	0	0
REIMS	9	4	0	0
AMIENS	7	5	0	0
ROUEN	5	3	0	0
LIMOGES	2	2	0	0
NICE	3	3	1	0
REUNION	2	1	0	0
MARTINIQUE	1	0	0	0
GUADELOUPE	4	2	0	0
GUYANNE	1	1	0	0
PARIS/CRET/VERS	67	48	1	0

Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	54	29	0	0
MAIT-DOC REM TI	265	192	11	5

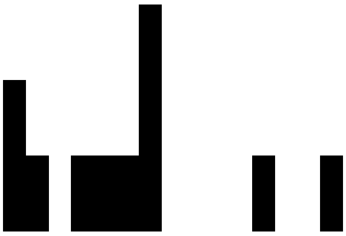
catégories				
	I	P	a	A
ENSEIGN PRIVE	319	221	11	5

Centres d'écrit				
	I	P	a	A
DIVERS	319	221	11	5

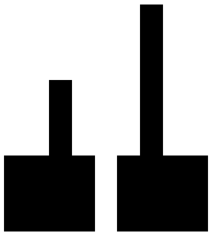
Écrit 1



Écrit 2



Oral 1



Oral 2

Programme

3 Programme du concours

3.1 Généralités

Avertissement : Le programme du concours est inchangé pour 2007, se reporter au BO n ° 3 du 29 avril 1999.

L'attention des candidats doit cependant être attirée sur l'évolution des programmes de l'enseignement secondaire, notamment en ce qui concerne des éléments de statistique inférentielle et de théorie des graphes.

Il est vraisemblable que le programme du concours sera modifié l'an prochain, pour préciser les contenus associés à cette évolution, ainsi qu'à l'évolution des programmes de BTS.

3.2 Programme

Programme de l'Agrégation Interne et CAERPA de Mathématiques

Un professeur de Mathématiques devrait avoir élaboré et intériorisé une vue globale, personnelle et cohérente de ses connaissances dans sa discipline à travers son histoire et ses liens avec les autres disciplines. La préparation à l'Agrégation Interne peut être l'occasion d'une fructueuse réflexion. C'est dans cet esprit qu'il a été procédé à cette mise à jour du programme complémentaire, la connaissance de ceux de toutes les sections de l'Enseignement Secondaire étant d'autre-part demandée aux candidats. Ce texte décrit un ensemble de connaissances souhaitable pour un professeur agrégé. Il sera périodiquement remis à jour. Il ne doit pas être interprété de façon rigide et formaliste. Son but est surtout d'aider les candidats dans leur réflexion et dans le nécessaire effort d'unification de leurs connaissances.
S'il est commode de présenter un programme en rubriques, ce découpage ne doit pas dégénérer en cloisonnement. C'est ainsi qu'il est proposé certains rapprochements qui peuvent être complétés par d'autres. Ce texte comporte aussi des répétitions quand une même notion intervient à plusieurs endroits. Ainsi, une même notion peut être d'abord approchée dans un cadre particulier, puis sous un aspect plus général.

A. PROGRAMME DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Ce programme comporte tous les programmes des classes de la seconde à la terminale incluses, dans toutes les sections.

B. PROGRAMME COMPLÉMENTAIRE

1. Ensembles

Vocabulaire de la théorie des ensembles. Produit d'un nombre fini d'ensembles. Application. Relation d'ordre.

Ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels. Ensemble dénombrable. Non dénombrabilité de $\mathbf{R}$.

Relation d'équivalence et ensemble quotient.

2. Algorithmique et informatique

Exemples d'algorithmes liés au programme.

Notion de variable, d'adresse. Instruction d'affectation, instructions conditionnelles, programmation itérative et récursive.

Fonctions et sous-programmes ; passage de paramètre. Rédaction en français ou en Pascal de programmes ne comportant qu'un petit nombre d'instructions pouvant utiliser des sous-programmes.

Aucun développement théorique n'est au programme.

3. Algèbre générale

a) Extensions successives de la notion de nombre

Anneau $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Division euclidienne. Sous-groupes additifs de $\mathbf{Z}$. Nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM). Théorème de Bézout. Algorithme d'Euclide. Congruences. Applications arithmétiques des anneaux quotients $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Théorème chinois. Groupe des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications à des problèmes de calendriers. Exemples de méthodes de codage et de cryptage. Équations diophantiennes $ax + by = c$.

Corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, $\mathbf{R}$ des nombres réels, $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Théorèmes de d'Alembert-Gauss. Non dénombrabilité de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.

Groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines n-ièmes de l'unité. Relations d'inclusion entre ces groupes. Polygones réguliers.

b) Anneaux et corps (Écrit seulement)

Définition (les anneaux sont unitaires par définition). Formule du binôme. Idéaux d'un anneau commutatif. Morphismes d'anneaux. Anneaux quotients. Anneaux commutatifs intègres. Anneaux principaux. Exemple des entiers de Gauss, applications (équation $x^2 + y^2 = z^2$ dans $\mathbf{Z}$).

Sous-corps. Corps premier. Caractéristique d'un corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Éléments algébriques sur un sous-corps. Dénombrabilité du corps des nombres algébriques sur $\mathbf{Q}$. Nombres transcendants.

c) Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif K

Algèbre $\mathbf{K}[X]$. Division euclidienne. Idéaux de $\mathbf{K}[X]$. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun mutiple (PPCM). Théorèmes de Bézout. Algorithme d'Euclide. Polynômes irréductibles. Décomposition en facteurs irréductibles.
Fonctions polynômes. Racines, ordre de multiplicité, polynômes scindés. Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes. Cas où $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, p étant un nombre premier. Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé.

Théorème de d'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.

Dérivation des polynômes. Identité de Taylor.

d) Fractions rationnelles sur un corps commutatif K

Corps $\mathbf{K}(X)$ des fractions rationnelles. Forme irréductible. Fonctions rationnelles, zéros, pôles, ordre de multiplicité.

Décomposition en éléments simples. Cas où le corps est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Exemples simples de problèmes d'élimination ; applications à la géométrie.

4. Groupes et géométrie

Les diverses notions sur les groupes devront être illustrées dans des situations géométriques (par exemple isométries d'un tétraèdre régulier, d'un cube).
Groupes, morphismes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques, ordre d'un élément. Théorème de Lagrange. Image et noyau.

Sous-groupe distingué (ou normal). Groupe quotient.

Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Stabilisateurs. Formule des classes. Éléments conjugués, classes de conjugaison, classes de sous-groupes conjugués. Signification géométrique des notions de conjugaison. Automorphismes intérieurs d'un groupe.

Polygones réguliers et groupes diédraux.

Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique ; cycles, génération par les transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné.

Groupes $GL(E)$ et $SL(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Groupes $O(E)$ et $SO(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien. Groupes $U(E)$ et $SU(E)$ où E est un espace hermitien. Groupe affine, groupe des homothéties et translations d'un espace affine. Groupe des isométries et des déplacements d'un espace affine euclidien. Formes réduites des isométries affines en dimension 2 et 3. Groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace. Groupe des similitudes directes et indirectes d'un plan affine euclidien.

5. Algèbre linéaire sur un sous-corps de $\mathbf{C}$

a) Espaces vectoriels

Définition. Applications linéaires. Espace vectoriel $L(E, F)$. Algèbre $L(E)$. Groupe linéaire $GL(E)$. Espace produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels. Image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Sous-espaces en somme directe. Sous-espaces supplémentaires. Projecteurs. Endomorphismes involutifs.

Familles libres, génératrices, bases.
Étant donné u de $L(E, F)$, isomorphisme entre $\mathrm{Im}(u)$ et tout supplémentaire de $\ker(u)$.

Dans la suite, les espaces vectoriels sont tous supposés de dimension finie.

b) Espaces vectoriels de dimension finie

Définition. Théorèmes de la dimension, de la base incomplète. Dimension d'un sous-espace. Rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires.
Formule liant dimensions de la somme et de l'intersection de deux sous-espaces. Rang d'une application linéaire. Formule du rang. Caractérisation des automorphismes.

c) Matrices

Espaces $M_{p,q}(\mathbf{K})$ des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$. Isomorphisme canonique avec $L(K^q, K^p)$. Produit matriciel. Matrices inversibles. Groupe $GL(n, K)$.

Matrice d'une application linéaire entre espaces vectoriels munis de bases. Matrice de passage. Rang d'une matrice. Matrices équivalentes et caractérisation par le rang. Utilisation de sous-matrices carrées pour la détermination du rang. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

Matrice d'un endomorphisme d'un espace rapporté à une base. Matrices semblables. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

Systèmes d'équations linéaires. Rang. Conditions de compatibilité. Systèmes de Cramer. Résolution par opérations élémentaires (pivot de Gauss). Applications à des problèmes de géométrie.

d) Opérations élémentaires sur les matrices

Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Application à la résolution de systèmes linéaires, aux calculs de déterminants, à l'inversion de matrices carrées et au calcul du rang.

Applications linéaires associées aux opérations élémentaires : dilatations et transvections. Génération de $GL(n, \mathbf{K})$ et $SL(n, \mathbf{K})$.

e) Déterminants

Formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n. Déterminant d'une famille de n vecteurs relativement à une base. Déterminant d'un endomorphisme, d'un composé d'endomorphismes. Caractérisation des automorphismes.
Déterminant d'une matrice carrée. Expression développée. Déterminant de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices. Mineurs, cofacteurs, développement relativement à une ligne ou une colonne. Calcul par opérations élémentaires.

Application à l'inversion d'une matrice carrée. Formules de Cramer. Orientation d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Exemples de calculs de volumes simples.

Groupes $SL(E)$ et $SL(n, \mathbf{K})$.

f) Dualité

Formes linéaires et hyperplans. Équation d'un hyperplan. Dual E^* d'un espace vectoriel E. Base duale d'une base. Application à la formule d'interpolation de Lagrange. Bijection entre les ensembles des sous-espaces de E et E^* par l'orthogonalité. Orthogonal d'une somme ou d'une intersection de deux sous-espaces. Dimension de l'orthogonal.

Transposée d'une application linéaire. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

g) Réduction des endomorphismes

Sous-espaces stables par un endomorphisme.

Algèbre $\mathbf{K}[u]$ des endomorphismes polynomiaux en un endomorphisme u de E. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme.

Triangulation d'un endomorphisme, d'une matrice carrée, si le polynôme caractéristique est scindé. Ordre de multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé. Théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème de décomposition des noyaux. Polynôme minimal. Sous-espaces caractéristiques.

Critères de diagonalisabilité : la dimension de tout sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée ; il existe un polynôme scindé annulateur à racines simples.

Diagonalisation simultanée d'un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant entre eux.

Diagonalisation par blocs. Sous-espaces caractéristiques. Décomposition de Dunford : existence et unicité de l'écriture $u = d + n$ où d est diagonalisable et n nilpotent avec $d \circ n = n \circ d$ si le polynôme caractéristique est scindé.

Application de la réduction des endomorphismes à l'analyse (suites récurrentes, systèmes différentiels, etc.).

h) Cas où le corps K est R ou C

Application du théorème d'équivalence des normes en dimension finie à la topologie de $L(E)$. Définition de $\exp(u)$, application aux systèmes différentiels.

Exemples de parties denses de $L(E)$: $GL(E)$ est un ouvert dense de $L(E)$; si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, l'ensemble des endomorphismes diagonalisables est dense dans $L(E)$.

i) Formes quadratiques

Formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques. Morphisme de E vers E^* canoniquement associé à une forme bilinéaire. Matrice relativement à une base. Matrices congruentes.

Bases orthogonales. Décomposition en carrés (méthode de Gauss). Loi d'inertie et signature dans le cas réel. Application aux coniques et quadriques. Application à l'analyse des données.

6. Géométrie affine en dimension finie

Le corps de base est $\mathbf{R}$.

Définition d'un espace affine. Espace vectoriel associé. Sous-espaces affines, direction d'un sous-espace affine. Droites, plans, hyperplans.

Repères. Orientation. Volume algébrique d'un parallélépipède orienté.

Applications affines. Projecteurs. Groupe affine. Isomorphisme du stabilisateur d'un point et du groupe linéaire. Symétries. Groupe des homothéties et translations. Effet d'une application affine sur les volumes.

Barycentres. Repères et coordonnées barycentriques. Isobarycentre.

Parties convexes. Intersection, images directe et réciproque par une application affine. Enveloppe convexe d'une partie. Exemples de problèmes d'optimisation.

7. Algèbre linéaire euclidienne et hermitienne

Les espaces vectoriels sont tous de dimension finie.

a) Espaces euclidiens

Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme euclidienne. Identité du parallélogramme. Isomorphisme canonique avec le dual. Orthogonalité. Bases orthonormales. Orthonormalisation de Schmidt. Projecteurs et symétries. Adjoint d'un endomorphisme et matrice associée dans une base orthonormale. Groupe orthogonal $O(E)$ et spécial orthogonal $SO(E)$.

Endomorphismes symétriques, réduction dans une base orthonormée. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles dont l'une est définie positive. Application aux axes de symétrie des coniques et quadriques dans un espace euclidien. Ellipsoïde d'inertie. Application à l'analyse des données.

Application à l'étude d'une surface au voisinage d'un point régulier.
Endomorphismes symétriques positifs et applications (norme d'un endomorphisme).

b) Angles

Matrice d'une rotation. Le groupe $SO(E)$ est commutatif en dimension 2. Angles dans le plan euclidien orienté. Sinus et cosinus d'un angle. Exponentielle complexe. Nombre π. Fonctions trigonométriques circulaires. Morphisme canonique de $\mathbf{R}$ vers $SO(2)$. Mesure des angles.

Angles orientés de droites en dimension 2.

Angles en dimension 3 : angle d'une rotation dont l'axe est orienté. Génération de $SO(E)$ par les demi-tours.

Similitudes vectorielles en dimension 2 et 3.

c) Calcul matriciel et normes euclidiennes

Projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace. Matrice de Gram. Distance d'un point à un sous-espace. Problème des moindres carrés.

d) Calculs vectoriels en dimension 3

Produit vectoriel. Produit mixte. Applications à la géométrie des trièdres.

e) Espaces hermitiens

Inégalités de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme hermitienne. Sommes directes orthogonales. Bases orthonormales. Adjoint d'un endomorphisme, matrice dans une base orthonormale. Endomorphismes hermitiens. Groupe unitaire $U(E)$ et spécial unitaire $SU(E)$.

Réduction d'un endomorphisme hermitien, endomorphismes hermitiens positifs, applications (norme d'un endomorphisme).

8. Géométrie affine euclidienne orientée

a) Généralités

Espaces affines euclidiens. Distance de deux points. Inégalité triangulaire.

Groupes des isométries et des déplacements. Génération du groupe des isométries par les réflexions, du groupe des déplacements par les demi-tours en dimension 3.

Décomposition canonique d'une isométrie en $u = t \circ f = f \circ t$ où t est une translation et f une isométrie admettant au moins un point fixe. Application à la classification des isométries en dimension 2 et 3.

Exemples de groupes d'isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers et groupes diédraux. Tétraèdres réguliers, cubes, octaèdres.

Groupe des similitudes.

b) Géométrie plane

Propriété angulaire du cercle et applications.
Faisceau harmonique de deux droites et de leurs bissectrices.

Géométrie du triangle, éléments remarquables. Exemples de relations métriques et trigonométriques dans le triangle.
Utilisation des nombres complexes : affixe d'un point dans un repère orthonormé direct. Exemples d'applications géométriques (polygones réguliers, géométrie des cercles).

Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical. Orthogonalité entre cercles.

c) Coniques

Définitions bifocale et par foyer et directrice. Classification par l'excentricité. Équations réduites. Image par une application affine et classification en les trois genres affines : ellipse, parabole, hyperbole. Exemples de propriétés géométriques communes ou spécifiques à chaque genre.

Section plane d'un cône de révolution.

Trajectoire parabolique d'un objet pesant. Mouvement à accélération centrale. Mouvement des planètes.

9. Propriétés affines et métriques

Pour toutes les situations géométriques, on réfléchira aux propriétés de caractère affine et à celles de nature métrique (ou euclidienne).

Groupes affines et groupes euclidiens.
Propriétés affines et euclidiennes des coniques.
Notions différentielles de caractère affine et métrique.
Exemples d'utilisation de repères pour traiter des problèmes de géométrie.

10. Analyse à une variable réelle

a) Nombres réels ou complexes

Corps **R** et **C** des réels et complexes. La construction de **R** étant admise. Suites convergentes, divergentes, sous-suites, valeurs d'adhérence. Opérations sur les limites. Toute partie non vide majorée de **R** possède une borne supérieure. Toute suite croissante majorée est convergente. Suites adjacentes. Droite numérique achevée.

Complétude de **R** : toute suite de Cauchy de **R** ou **C** converge. Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de **R** ou **C** on peut extraire une sous-suite convergente.

Développement décimal d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels.

Comportement asymptotique d'une suite. Relations de comparaison : domination, prépondérance (u est négligeable devant v), équivalence. Notations $u = O(v)$ et $u = o(v)$.

Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Récurrences linéaires et homographiques.

b) Séries de nombres réels ou complexes

Séries à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est bornée. Étude de la convergence par les relations de comparaison, comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence pour les séries convergentes et divergentes. Comparaison d'une série et d'une intégrale, cas des séries de Riemann.

Critères de Cauchy pour les séries à termes réels ou complexes. Convergence absolue. Convergence d'une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue, signe et majoration du reste. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemple d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.

Opérations sur les séries. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

c) Continuité

Fonctions définies sur une partie de **R**. Limite, continuité à droite et à gauche, continuité.

Théorème des valeurs intermédiaires. Continuité sur un segment, théorème des extrema. Théorème de Heine de continuité uniforme sur un segment. Fonction réciproque d'une fonction monotone f sur un intervalle ; propriétés de la fonction réciproque f^{-1}.

Fonctions continues par morceaux sur un segment, approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier, des fonctions affines par morceaux, des polynômes (théorème de Weierstrass admis).

d) Dérivabilité

Dérivée à droite et à gauche en un point. Comportement de la dérivation relativement aux opérations algébriques. Dérivation d'une fonction composée, d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes. Application au sens de variation et au caractère lipschitzien.

Dérivées successives. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. Formule de Leibniz pour la dérivée k-ième d'un produit.

Fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1$, convexité de l'épigraphe, croissance de la dérivée, position de la courbe relativement aux cordes et aux tangentes. Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Formules de Taylor avec reste intégral, de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Étude locale des fonctions. Conditions nécessaires d'extremum. Développements limités. Opérations sur les développements limités.

Série de Taylor.

e) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances. Équations fonctionnelles caractérisant ces fonctions. Fonctions hyperboliques directes et réciproques.

Fonctions circulaires directes et réciproques.

f) Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne, relation de Chasles. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Intégration par parties, changement de variable, calculs

de primitives et d'intégrales.
Convergences en moyenne et en moyenne quadratique pour les suites de fonctions. Comparaison avec la convergence uniforme.

g) Intégrales sur un segment d'une fonction dépendant d'un paramètre

Théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme. Formule de Fubini si le paramètre décrit un segment. Lien avec les intégrales doubles.

h) Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions considérées sont continues par morceaux sur tout segment contenu dans l'intervalle I de définition.

Intégrale d'une fonction positive. Emploi des relations de comparaison.

Une fonction définie sur I à valeurs complexes est dite intégrable si l'intégrale de son module est finie.

Les deux théorèmes suivants sont admis :

Théorème de convergence monotone : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions à valeurs positives intégrables convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I, et si la suite des intégrales des f_n est majorée, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des f_n.

Théorème de convergence dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I, et si la suite des modules des f_n est majorée par une fonction g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des f_n.

i) Intégrales impropres

Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy. Convergence absolue. Intégration par parties.

Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Intégration de relations de prépondérance et d'équivalence.

j) Intégrales sur un intervalle quelconque d'une fonction dépendant d'un paramètre

Les deux théorèmes suivants sont admis :

Théorème de continuité : Soit f une fonction continue de deux variables (x,t) définie sur un produit $X \times I$ d'intervalles, intégrable en t sur I pour tout x fixé dans X. Si le module de $f(x,t)$ est majoré par $g(t)$, où g est continue et intégrable sur I, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x,t)$ sur I est continue sur X.

Théorème de dérivation : Soit f une fonction continue de deux variables (x,t) définie sur un produit $X \times I$ d'intervalles, intégrable en t sur I pour tout x fixé dans X et admettant une dérivée partielle f'_x par rapport à x. Si le module de f'_x(x,t) est majoré par $h(t)$, où h est continue et intégrable sur I, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x,t)$ sur I est dérivable sur X et sa dérivée est l'intégrale de f'_x par rapport à t.

Exemples de fonctions définies par une intégrale (fonction Gamma d'Euler, transformée de Fourier).

k) Analyse numérique

Approximations d'un nombre par des suites : rapidité de convergence, ordre d'un algorithme. Accélération de la convergence, méthode de Richardson-Romberg.
Approximation d'une solution d'équation $f(x) = 0$. Méthode de dichotomie. Approximations successives, méthode de Newton. Estimation de l'erreur.
Valeurs approchées d'une intégrale : méthode du point milieu, des trapèzes, de Simpson. Estimation de l'erreur.
Évaluation asymptotique du reste d'une série convergente ; recherche d'une valeur approchée de la somme d'une telle série.

Solutions approchées d'une équation différentielle $x' = f(t,x)$ par la méthode d'Euler.

11. Analyse à une variable complexe

a) Séries entières

Rayon de convergence. Disque ouvert de convergence. Convergence normale sur tout compact du disque ouvert de convergence. Exemples de calcul du rayon de convergence. Rayon de convergence de la série dérivée.

Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence. Dérivation par rapport à la variable complexe sur ce disque ouvert.

b) Extension à C des fonctions usuelles

Exponentielle complexe, exponentielle d'une somme, nombre π, fonctions sinus et cosinus.
Application à la mesure des angles.

12. Analyse fonctionnelle et vocabulaire de la topologie

a) Topologie et espaces métriques

Distance, boules ouvertes et fermées. Parties ouvertes et fermées. Voisinages. Intérieur, adhérence et frontière d'une partie. Distance à une partie, diamètre d'une partie. Parties denses, points isolés, points d'accumulation. Produits finis d'espaces métriques.

Suites, limites, valeurs d'adhérence, sous-suites, suites de Cauchy. Caractérisation de l'adhérence par les suites.

Continuité d'une application en un point, caractérisation par les suites. Continuité sur l'espace entier, caractérisation par les images réciproques des ouverts et fermés. Homéomorphismes. Applications uniformément continues. Algèbre des fonctions numériques continues.

b) Espaces vectoriels normés sur R ou C

Normes. Distance associée à une norme. Normes équivalentes. Continuité des opérations. Applications linéaires continues, normes de ces applications.

c) Espaces métriques compacts

Définition séquentielle. Parties compactes d'un compact. Parties compactes de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Produit d'un nombre fini d'espaces métriques compacts. Parties compactes de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$.

Image continue d'un compact. Théorème de Heine de continuité uniforme des applications continues.

d) Espaces métriques connexes

Définitions. Parties connexes. Union de parties connexes d'intersection non vide. Parties connexes de $\mathbf{R}$. Image continue d'un connexe. Théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs : elle implique la connexité et lui équivaut sur un ouvert d'un espace vectoriel normé.

e) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème d'équivalence des normes. Les parties compactes sont les fermés bornés. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires en dimension finie.

Exponentielle d'un endomorphisme.

f) Espaces métriques complets

Définition. Parties complètes d'un espace complet. Exemples de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Théorème du point fixe pour les contractions d'un espace complet dans lui même. Application aux approximations successives.

Critère de Cauchy pour l'existence de la limite d'une application en un point.

g) Espaces de Banach

Définition. Critère de Cauchy pour les séries. L'absolue convergence d'une série implique la convergence. Sous-espaces de Banach.
Espaces de Banach usuels de suites et de fonctions. Espace de Banach des applications linéaires continues d'un espace de Banach vers un autre.

Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergences simple, uniforme, uniforme sur tout compact. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Critère de Cauchy uniforme. Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ simplement convergente et dont la suite des dérivées converge uniformément.

Séries d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergence simple et uniforme. Convergence normale. Critère de Cauchy uniforme. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel.

h) Espaces préhilbertiens

Produit scalaire. Inégalités de Cauchy-Schwarz. Norme associée. Théorème de Pythagore. Familles orthonormales. Procédé de Schmidt. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; distance à un tel sous-espace.

Exemples de produits scalaires ; exemples de suites de polynômes orthogonaux.

i) Séries de Fourier

Polynômes trigonométriques, orthogonalité des fonctions e^{inx}. Coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$, $c_n(f)$ d'une fonction 2π-périodique f continue par morceaux. Sommes partielles $S_n(f,x) = \sum_{-n\leqslant k\leqslant n} c_k(f)e^{ikx}$. Meilleure approximation en moyenne quadratique. Identité de Parseval et convergence en moyenne quadratique si f est continue par morceaux.

Théorèmes de convergence de Dirichlet et F é jer. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

13. Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert de R^n à valeurs dans R^p.

a) Topologie de $\mathbf{R^n}$.

Normes usuelles sur $\mathbf{R}^n$; elles sont équivalentes. Complétion. Parties compactes. Limites et applications continues.

b) Fonctions différentiables

Dérivée selon un vecteur. Développement limité à l'ordre 1. Différentiabilité en un point. Interprétation géométrique (plan tangent à une surface). Matrices jacobiennes, déterminant jacobien. Différentielle d'une fonction composée.

Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω : l'application associant à un point de Ω sa différentielle est continue.
Théorème admis : pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$, il faut et il suffit que les dérivées partielles soient continues sur Ω.

Composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Difféomorphismes. Caractérisation des difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe $\mathcal{C}^1$. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Caractérisation des constantes parmi les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert connexe.

Applications de classe $\mathcal{C}^k$. Théorème de Schwarz pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Gradient d'une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$. Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Extrema locaux d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de deux variables en un point où $rt - s^2 \neq 0$. Exemples de problèmes d'extrema issus de la géométrie.

Théorèmes (admis) d'inversion locale et des fonctions implicites. Application à la caractérisation des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe $\mathcal{C}^k$.

c) Équations différentielles

Systèmes linéaires $X' = A(t)X + B(t)$, où A (resp. B) est une application continue d'un intervalle I dans $M_n(\mathbf{C})$ (resp. $\mathcal{C}^n$).

Théorème (admis) d'existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.
Dimension de l'espace vectopriel des solutions. Méthode de la variation des constantes.

Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme, application au problème de Cauchy ; résolution du système $X' = AX$ par diagonalisation ou triangularisation de A ou emploi du théorème de Cayley-Hamilton. Équations linéaires scalaires à coeffients constants. Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène.

Équations linéaires scalaires $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où a, b, c sont continues sur un intervalle I et à valeurs complexes. Système du premier ordre associé, étude du problème de Cauchy ; solution de l'équation sans deuxième membre, méthode de variation des constantes. Résolution lorsqu'une solution de l'équation sans second membre ne s'annulant pas sur I est connue.

Notions sur les équations scalaires non linéaires (écrit seulement).

Solutions d'une équation $x' = f(t,x)$, ou $x'' = f(t,x,x')$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$; existence et unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy. Énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas $\mathcal{C}^1$.

Exemples d'études qualitatives.

Résolution d'équations à variables séparables et homogènes ; exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction en liaison avec des propriétés d'invariance.

Applications en physique et en géométrie différentielle.

14. Calcul intégral et probabilités

a) Intégrales multiples

Tous les théorèmes de ce paragraphe sont admis.

Intégrales curvilignes, longueur d'un arc de courbe, travail d'une force. Intégrales doubles et triples. Linéarité et additivité relativement aux ensembles.

Théorème de Fubini-Tonelli : Si f est une fonction de deux variables continue positive, on peut intervertir l'ordre des intégrations dans le calcul de l'intégrale double de f.
Extension au cas du produit d'une fonction de deux variables continue positive et d'une fonction indicatrice d'un ensemble géométriquement simple.

Théorème de Fubini : Si f est une fonction de deux variables continue de module intégrable, on peut intervertir l'ordre des intégrations dans le calcul de l'intégrale double de f.

Extension au cas du produit d'une fonction de deux variables continue et d'une fonction indicatrice d'un ensemble géométriquement simple.

Extension des théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini au cas de fonctions de n variables.

Applications à des calculs d'intégrales.

Théorème du changement de variables ; passage en coordonnées polaires.

Exemples de calculs d'aires et de volumes.

b) Modélisation d'une expérience aléatoire

Espace Ω des épreuves (ou des évènements élémentaires) ; tribu (ou ß-algèbre) des évènements ; mesure de probabilité sur cette tribu. Etude d'exemples dans le cas où Ω est fini ou infini dénombrable.

c) Espace probabilisé

Propriétés d'une probabilité. Probabilité conditionnelle $P_B[A]$ de A sachant B si $P[B]$ est positif. Formule des probabilités composées et formule de Bayes. Indépendance d'un nombre fini d'évènements.

d) Variables aléatoires réelles

Etant donné un espace probabilisé (Ω,f,P), on appelle *variable aléatoire réelle* (v.a.r. en abrégé), toute application X de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que l'image réciproque $\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{I})$ de tout intervalle I de $\mathbf{R}$ appartienne à la tribu f. On admettra que la somme, ou le produit, de v.a.r. est une v.a.r..

On se bornera à l'étude des deux familles suivantes de v.a.r. :

Variables aléatoires réelles discrètes. Une v.a.r. est dite *discrète* si elle prend un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs. Loi et fonction de répartition d'une v.a.r. discrète. Moments d'une v.a.r. discrète : espérance, variance et écart type. Espérance d'une somme de v.a.r. discrètes. Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbf{N}$. Lois discrètes usuelles : loi de Bernoulli ; loi binomiale ; loi géométrique et loi de Poisson.

Variables aléatoires réelles possèdant une loi avec densité. On appelle *densité de probabilité* sur $\mathbf{R}$, toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ intégrable sur $\mathbf{R}$ et d'intégrale égale à 1 (On se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe « Intégration sur un intervalle quelconque »).

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$. On dit qu'une v.a.r. X possède la loi de densité f, si pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$, $P[\{X \in I\}] = \displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Fonction de répartition et moments (espérance, variance et écart type) d'une v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance d'une somme de v.a.r. possédant une densité (résultat admis). Lois usuelles possédant une densité : loi uniforme sur un intervalle borné ; loi exponentielle ; loi normale.

Si X est une v.a.r. de loi de densité f et si Φ est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue par morceaux sur tout segment et telle que la fonction $|\Phi|f$ soit intégrable sur $\mathbf{R}$, alors on admettra que $\Phi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par : $\mathrm{E}[\Phi(X)] = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \Phi(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

e) Vecteurs aléatoires

On dira qu'une application $X = (X_1, \ldots, X_p)$ de Ω dans $\mathbf{R}^p$ est un *vecteur aléatoire* si chacune de ses composantes est une v.a.r.. On se limitera aux deux cas suivants :
Vecteurs aléatoires discrets. Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_p)$ de Ω dans $\mathbf{R}^p$ est dit discret si chacune de ses composantes est une v.a.r. discrète.

Loi d'un vecteur aléatoire X. Indépendance de p v.a.r. discrètes. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. discrètes. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. discrètes indépendantes.

Vecteurs aléatoires possédant une loi avec densité. On appelle *densité de probabilité sur* $\mathbf{R}^p$ toute fonction f de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}_+$, intégrable sur $\mathbf{R}^p$ et d'intégrale égale à 1 (On se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe « Intégrales multiples »). Soit f une densité de probabilité sur $\mathbf{R}^p$. On dit qu'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_p)$ possède la loi de densité f, si pour tous intervalles $I_1, ..., I_p$ de $\mathbf{R}$,

$$P[\{X_1 \in I_1\} \cap ... \cap \{X_p \in I_p\}] = \int_{I_1} \ldots \int_{I_p} f(x_1, ..., x_p)\,\mathrm{d}\,x_1 \ldots \mathrm{d}\,x_p.$$

Soit $X = (X_1, \ldots,\ X_p)$ un vecteur aléatoire de loi de densité f. Soit ψ un produit d'une fonction continue de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$ par une fonction indicatrice d'un domaine « géométriquement simple » de $\mathbf{R}^p$ et telle que la fonction $|\psi| f$ soit intégrable sur $\mathbf{R}^p$. On admettra que $\psi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par :

$$\mathrm{E}[\psi(X)] = \int_{\mathbf{R}} \ldots \int_{\mathbf{R}} \psi(x_1, x_2, \ldots, x_p) f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\,\mathrm{d}\,x_1 \ldots \mathrm{d}\,x_p.$$

Indépendance de p v.a.r. possédant une loi avec densité. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. indépendantes et possèdant une loi avec densité. Loi normale.

f) Théorèmes limites

Suites de v.a.r. indépendantes. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et loi faible des grands nombres.

Les résultats suivants sont admis : Loi forte des grands nombres pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées possèdant une espérance. Théorème central limite pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées et de variance finie.

Approximations de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi normale (loi de Gauss).

15. Géométrie différentielle

Les notions qui suivent doivent être illustrées par des exemples.

a) Courbes paramétrées en dimension 2 et 3

Étude locale d'une courbe paramétrée du plan. Changement birégulier de paramètre. Tangente, concavité, forme d'un arc au voisinage d'un point régulier ou singulier. Construction d'une courbe en coordonnées polaires.

Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace. plan osculateur.

b) Propriétés métriques des courbes

Longueur d'un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$. Abscisse curviligne.

En dimension 2, repère de Frenet. Courbure, centre de courbure.
En dimension 3, repère de Frenet, courbure, torsion.

c) Cinématique

Vitesse, accélération. Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, circulaires, à accélération centrale. Oscillateurs harmoniques. Exemples de problèmes de mécanique (pendule, chute des corps, mouvements des planètes).

Épreuves écrites

4 Rapport sur les épreuves écrites

4.1 Première épreuve écrite

4.1.1 Énoncé de la première épreuve écrite

Introduction et notations

On désigne par $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ l'anneau des nombres entiers relatifs, le corps des nombres rationnels, le corps des nombres réels et le corps des nombres complexes.

Soit A un anneau commutatif intègre. On dit que deux éléments α et β de A sont *premiers entre eux* s'ils n'ont pas d'autre diviseur commun que les éléments inversibles de A. Soit α un élément non nul, et non inversible de A ; on dit que α est un élément *irréductible* de A si une égalité $\alpha = \beta\gamma$ dans A implique que β ou γ est inversible dans A.

Rappelons que dans un anneau principal A, si un élément irréductible divise un produit, il divise un facteur. De plus, tout élément non nul et non inversible a de A est produit d'éléments irréductibles. L'écriture de a comme produit d'éléments irréductibles de A a la propriété suivante : si $a = p_1 p_2 \dots p_n$ et $a = q_1 q_2 \dots q_m$ sont deux écritures de a comme produit d'éléments irréductibles de A, alors $m = n$ et il existe une permutation σ de l'ensemble des entiers $\{1, \dots, n\}$, et des éléments inversibles ϵ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, de A tels que l'on ait $q_i = \epsilon_i p_{\sigma(i)}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

L'objectif de ce problème est d'étudier les solutions entières de quelques équations algébriques.

I . La relation $a^2 + b^2 = c^2$

1) Soit $\mathrm{M} = (x, y)$ un point de $\mathbf{R}^2$. On suppose que l'on a $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Soit $\theta \in [0, \pi/2]$ le nombre réel tel que

$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta.$$

On pose

$$t = \tan(\theta/2).$$

a) Exprimer x et y en fonction de t. En déduire que, si t est un nombre rationnel, x et y sont aussi des nombres rationnels.

b) Inversement, démontrer que, si x et y sont des nombres rationnels, t est aussi un nombre rationnel.

2) Soient a, b, c des nombres entiers > 0 et tels que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

On pose $x = a/c$, $y = b/c$; les nombres x et y sont rationnels et satisfont à l'égalité $x^2 + y^2 = 1$. Soit t le nombre défini dans la question (I.1). Le nombre t est rationnel et l'on a $0 < t < 1$.

a) On pose $t = v/u$, où u et v sont des nombres entiers positifs, premiers entre eux. Exprimer a/c et b/c en fonction de u et v.

b) Supposons que u et v aient des parités différentes. Démontrer que les nombres $2uv$, $u^2 + v^2$, $u^2 - v^2$ sont premiers entre eux deux à deux.

c) En déduire qu'il existe dans ce cas un entier w tel que

$$a = (u^2 - v^2)\,w, \qquad b = 2\,u\,v\,w, \qquad c = (u^2 + v^2)\,w.$$

d) Supposons maintenant que les nombres u et v soient tous deux impairs. Démontrer qu'il existe alors un entier w tel que

$$a = \frac{u^2 - v^2}{2}\,w, \qquad b = u\,v\,w, \qquad c = \frac{u^2 + v^2}{2}\,w.$$

e) En déduire qu'il existe dans ce cas des entiers u' et v', premiers entre eux et de parités dstinctes, tels que l'on ait

$$a = 2\,u'\,v'\,w, \qquad b = (u'^2 - v'^2)\,w, \qquad c = (u'^2 + v'^2)\,w.$$

3) Soient a, b, c des nombres entiers > 0 et tels que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

a) Démontrer que si les nombres a, b et c sont premiers entre eux dans leur ensemble, ils sont premiers entre eux deux à deux.

b) Supposons dans la suite que a et b sont premiers entre eux. Démontrer que a et b ne peuvent avoir la même parité. [On pourra remarquer que, si n est un entier impair, alors $n^2 \equiv 1 \pmod 4$].

c) Supposons toujours a et b premiers entre eux et supposons que b est pair. Démontrer qu'il existe des nombres entiers u et v, strictement positifs, premiers entre eux et de parités distinctes, satisfaisant aux relations

$$a = u^2 - v^2, \qquad b = 2\,u\,v, \qquad c = u^2 + v^2. \tag{A}$$

4) Dans cette question, on suppose donnés trois nombres entiers a, b, c, strictement positifs, premiers entre eux deux à deux et tels que

$$a^4 + b^4 = c^2.$$

Compte tenu de la question précédente, a et b ont des parités distinctes. De plus, en supposant que b est pair, il existe des nombres entiers u et v, strictement positifs, premiers entre eux et de parités distinctes, tels que

$$a^2 = u^2 - v^2, \qquad b^2 = 2uv, \qquad c = u^2 + v^2.$$

a) Démontrer que v est pair.

b) Démontrer l'existence de deux entiers x et y, strictement positifs, premiers entre eux, tels que $u = x^2$, $v = 2\,y^2$.

c) Établir la relation $a^2 + (2y^2)^2 = x^4$. En déduire l'existence de deux nombres entiers s et t strictement positifs, premiers entre eux, tels que $y^2 = st$, $x^2 = s^2 + t^2$.

d) Démontrer que s et t sont les carrés de nombres entiers > 0, $s = m^2$, $t = n^2$.

e) Vérifier que l'on a $m^4 + n^4 = x^2$ et $0 < x < c$.

f) En utilisant les résultats précédents, donner une démonstration de l'impossibilité de trouver trois nombres entiers a, b, c, strictement positifs, tels que $a^4 + b^4 = c^2$.

II . L'anneau $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$

On note $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ l'ensemble des nombres complexes $a+\mathrm{i}\,b\sqrt{2}$, où $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{Z}$.

Pour tout nombre complexe z, on pose $\mathrm{N}(z) = z\overline{z} = |z|^2$.

Pour tous z et $z' \in \mathbf{C}$, on a $\mathrm{N}(zz') = \mathrm{N}(z)\,\mathrm{N}(z')$.

1) Démontrer que $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbf{C}$, commutatif et intègre.

2) a) Vérifier que pour tout élément α de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$, le nombre $\mathrm{N}(\alpha)$ est entier.

b) Démontrer que les éléments inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ sont les éléments α tels que $\mathrm{N}(\alpha) = 1$.

c) Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$.

3) Étant donnés deux éléments α et β, $\beta \neq 0$, de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$, démontrer qu'il existe γ et $\delta \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ tels que

$$\alpha = \beta\,\gamma + \delta \quad \text{et} \quad |\delta| < |\beta|.$$

[On pourra prouver l'existence de $\gamma \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ tel que $|\gamma - \frac{\alpha}{\beta}| < 1$].

4) Démontrer que l'anneau $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ est principal.

5) Déterminer les diviseurs irréductibles de 2 dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$.

III . Somme et différence de deux carrés

Dans cette partie on utilise les résultats de la deuxième partie.

1) Soient m et n des entiers > 0 et *premiers entre eux* dans $\mathbf{Z}$. On suppose que m^2+n^2 et m^2-n^2 sont des carrés dans $\mathbf{Z}$. Soient p et q des entiers $\geqslant 0$ tels que

$$m^2+n^2 = p^2, \qquad m^2-n^2 = q^2. \tag{B}$$

On a donc

$$2\,m^2 = p^2+q^2, \qquad 2\,n^2 = p^2-q^2. \tag{C}$$

a) En utilisant la question (I.3), démontrer que les parités de m et n sont distinctes et que p et q sont des nombres impairs.

b) Démontrer que q et n sont premiers entre eux.

c) Démontrer que n est pair et que m est impair.

2) Dans l'anneau $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$, on a $p^2 = (q+\mathrm{i}\,n\sqrt{2})(q-\mathrm{i}\,n\sqrt{2})$. Dans cette question, on va démontrer que les deux facteurs sont premiers entre eux dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'un élément irréductible π de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ divise les deux facteurs.

a) Démontrer que π divise $2q$ et $2\mathrm{i}\,n\sqrt{2}$.

b) Démontrer que π ne peut être un diviseur commun à q et n dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$.

c) Démontrer que π ne divise pas 2 dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$. [On pourra utiliser la connaissance des diviseurs irréductibles de 2, question (II.5)].

d) Conclure.

3) a) Déduire de la question précédente que $q + \mathrm{i}\, n\sqrt{2}$ ou $-q + \mathrm{i}\, n\sqrt{2}$ est un carré dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$.

Dans le premier cas, on pose $q' = q$, dans le deuxième, on pose $q' = -q$.

b) On pose $q' + \mathrm{i}\, n\sqrt{2} = (f + \mathrm{i}\, g\sqrt{2})^2$, où f et g appartiennent à $\mathbf{Z}$. Démontrer que les entiers f et g sont premiers entre eux dans $\mathbf{Z}$ et que f est impair.

c) En remarquant que $m^2 = q^2 + n^2 = f^4 + 4\, g^4$, et en utilisant la question (I.3), démontrer l'existence de nombres entiers u et v, positifs, premiers entre eux, de parités distinctes, tels que

$$f^2 = u^2 - v^2, \qquad g^2 = uv.$$

d) Démontrer que u et v sont des carrés dans $\mathbf{Z}$.

e) Démontrer que $u + v$ et $u - v$ sont premiers entre eux dans $\mathbf{Z}$.

f) En posant $u = a^2$ et $v = b^2$, en déduire que $a^2 + b^2$ et $a^2 - b^2$ sont des carrés dans $\mathbf{Z}$.

g) Démontrer l'inégalité $a^2 + b^2 < m^2 + n^2$.

h) En utilisant ce qui précède, démontrer que la somme et la différence de deux carrés $\neq 0$ ne peuvent être toutes deux des carrés dans $\mathbf{Z}$.

5) Soit ABC un triangle rectangle en A dans un plan affine euclidien. On suppose que les longueurs de ses trois côtés sont des nombres entiers. Démontrer que l'aire du triangle ABC ne peut être égale au carré d'un nombre entier.

6) Démontrer que l'équation $x^4 - y^4 = z^2$ n'a pas de solution en nombres entiers tous $\neq 0$.

IV . La relation $x^3 - y^2 = 2$

On considère, dans le plan $\mathbf{R}^2$, la courbe C d'équation $x^3 - y^2 - 2 = 0$.

1) a) Soit $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ un point de C. Écrire des équations paramétriques de la tangente T_0 à C au point M_0.

b) Déterminer les coordonnées des points communs à T_0 et à C.

c) Déterminer les points d'inflexion de la courbe C.

d) Déterminer les symétries éventuelles de C, ses branches à l'infini et les points d'intersection avec les axes de coordonnées.

e) Dessiner la courbe C dans la bande $0 \leqslant x \leqslant 4$ (prendre pour unité le centimètre, ou deux carreaux si la copie est quadrillée).

2) Déterminer les points à coordonnées entières de C situés dans la bande $0 \leqslant x \leqslant 4$.

3) On se propose de démontrer que les points trouvés dans la question (IV.2) sont les seuls points à coordonnées entières de la courbe C. Pour cela, on raisonne dans l'anneau $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ introduit dans la partie II du problème.

On suppose que le point M, de coordonnées entières (x, y), appartient à la courbe C. On a donc

$$x^3 = (y - \mathrm{i}\,\sqrt{2})(y + \mathrm{i}\,\sqrt{2}).$$

a) Démontrer que les deux facteurs sont premiers entre eux dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$. [Procéder comme dans la question (III.2)].

b) En déduire que $y + \mathrm{i}\sqrt{2}$ est un cube dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$.

c) En écrivant $y + \mathrm{i}\sqrt{2} = (a + \mathrm{i}\, b\sqrt{2})^3$, discuter les valeurs possibles de a et b et conclure.

4) Soit P_0 l'un des points à coordonnées entières de la courbe C. On note P_1 le point où la tangente en P_0 à la courbe C recoupe la courbe C. Puis, pour tout entier $n \geqslant 1$, on note P_{n+1} le point où la tangente en P_n à la courbe C recoupe la courbe C.

a) Démontrer que les coordonnées x_n, y_n des points P_n sont rationnelles.

b) Démontrer que les points P_n sont tous distincts, de sorte que la courbe C possède une infinité de points à coordonnées rationnelles. [Pour cela, on pourra étudier l'exposant du facteur 2 dans la factorisation de l'un des nombres rationnels x_n ou y_n.]

V . L'équation $x^3 + y^3 = z^3$

On note j le nombre complexe $j = \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$.

On note $\mathbf{Z}[j]$ l'ensemble des nombres complexes $a + j\, b$, où a et b appartiennent à $\mathbf{Z}$.

On note π l'élément $1 - j$ de $\mathbf{Z}[j]$.

1) a) Démontrer que $\mathbf{Z}[j]$ est un sous-anneau de $\mathbf{C}$, commutatif et intègre.

b) Démontrer que, pour tout élément α de $\mathbf{Z}[j]$, le nombre $\mathrm{N}(\alpha)$ est entier.

c) Déterminer les éléments inversibles de $\mathbf{Z}[j]$.

d) Indiquer comment démontrer que $\mathbf{Z}[j]$ est un anneau principal.

e) Démontrer que l'élément $\pi = 1 - j$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[j]$.

2) Soit α un élément de $\mathbf{Z}[j]$. Démontrer que deux cas seulement peuvent se présenter :

- ou bien π divise α,
- ou bien l'on a $\alpha^3 \equiv \pm 1 \pmod{\pi^4}$.

[On utilisera la division euclidienne de α par π et on pourra s'aider d'un dessin].

3) Soient α, β et γ des éléments de $\mathbf{Z}[j]$ tels que

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 0.$$

Démontrer que π divise l'un des éléments α, β ou γ.

4) Soient maintenant α, β, γ et ϵ des éléments de $\mathbf{Z}[j]$. On suppose que ϵ est inversible, que α, β et γ sont premiers entre eux deux à deux dans $\mathbf{Z}[j]$ et que π divise γ. On suppose enfin satisfaite l'égalité

$$\alpha^3 + \beta^3 + \epsilon\,\gamma^3 = 0.$$

a) Démontrer que π^2 divise γ.

b) On définit l'entier n en supposant que π^n divise γ mais que π^{n+1} ne divise pas γ. On a donc $n \geqslant 2$ d'après a). En écrivant l'égalité

$$-\epsilon\,\gamma^3 = (\alpha + \beta)(\alpha + j\beta)(\alpha + j^2\beta),$$

démontrer que π divise les trois facteurs, mais qu'un seul est divisible par π^2 .

c) Démontrer que π est un PGCD des trois facteurs.

d) En déduire qu'il existe des éléments λ , μ , ν de $\mathbf{Z}[j]$, premiers entre eux deux à deux, non divisibles par π , et des éléments inversibles ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 tels que l'on ait

$$\alpha + \beta' = \epsilon_1 \, \pi \, \lambda^3, \qquad \alpha + j \, \beta' = \epsilon_2 \, \pi \, \mu^3, \qquad \alpha + j^2 \, \beta' = \epsilon_3 \, \pi^{3n-2} \, \nu^3,$$

où β' désigne l'une des racines cubiques de β^3 , c'est-à-dire β , $j\beta$ ou $j^2\beta$.

e) En déduire qu'il existe des éléments inversibles η_1 et η_2 de $\mathbf{Z}[j]$ tels que l'on ait

$$\lambda^3 + \eta_1 \, \mu^3 + \eta_2 \, \pi^{3n-3} \, \nu^3 = 0.$$

f) Démontrer l'égalité $\eta_1 = \pm 1$.

5) En utilisant la question précédente, rédiger une démonstration du fait que l'équation $x^3 + y^3 = z^3$, où x , y , z sont tous $\neq 0$, n'a pas de solution dans $\mathbf{Z}$.

4.1.2 Solution de la première épreuve écrite

Ce problème traite de résultats classiques en arithmétique. D'abord les triangles rectangles à côtés entiers, question connue depuis l'Antiquité. Ensuite l'équation de Fermat pour l'exposant 4 , abordée ici aussi en arithmétique réelle. La dernière partie traite l'exposant 3 , en se plaçant dans l'anneau $\mathbf{Z}[j]$. Cette question a été résolue par Euler. Rappelons cependant qu'une « erreur d'Euler » avait été d'appliquer la factorisation unique dans l'anneau $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$. Nous suivons ici la présentation de Landau exposée dans Hardy and Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*. Par le même type de méthodes, la quatrième partie étudie les points entiers d'une cubique plane.

I . La relation $a^2 + b^2 = c^2$

1) a) On a

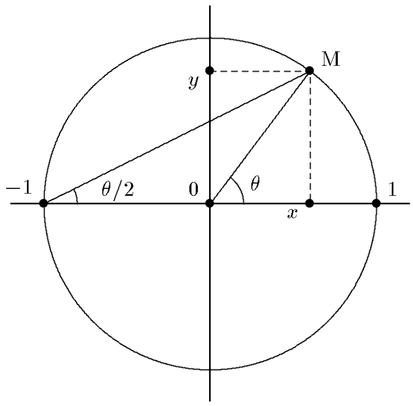
$$x = \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}\cdot$$

Si t est un nombre rationnel, les nombres x et y sont aussi rationnels.

b) On a $t = \dfrac{y}{1+x}\cdot$ On peut le voir à partir des deux relations

$$t^2(x+1) + x - 1 = 0, \qquad t^2 \, y - 2t + y = 0.$$

On peut aussi remarquer que t est la pente de la droite joignant le point $(-1, 0)$ au point M .



Par suite, si x et y sont rationnels, t l'est aussi.

2) a) Comme $0 < t < 1$, on a $0 < v < u$, et

$$\frac{a}{c} = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2uv}{u^2+v^2}.$$

b) Les diviseurs communs aux nombres u^2+v^2 et u^2-v^2 divisent leur somme $2u^2$ et leur différence $2v^2$. Comme les nombres u et v sont premiers entre eux, un diviseur premier commun à $2u^2$ et $2v^2$ ne peut être que ± 2. Mais on a supposé les parités de u et v différentes, de sorte que le nombre u^2+v^2 est impair. Par suite les nombres u^2+v^2 et u^2-v^2 n'ont pas de diviseur premier en commun ; ils sont premiers entre eux.

Un diviseur premier commun à $2uv$ et u^2+v^2 divise aussi u^2+v^2+2uv et u^2+v^2-2uv, c'est-à-dire $(u+v)^2$ et $(u-v)^2$. Comme il est premier, il divise aussi $u+v$ et $u-v$, et on raisonne comme ci-dessus.

c) Si les parités des nombres u et v sont différentes, les fractions $(u^2-v^2)/(u^2+v^2)$ et $2uv/(u^2+v^2)$ sont irréductibles d'après ce qui précède. Elles sont égales respectivement aux fractions a/c et b/c. Il existe donc un entier $w \neq 0$ tel que $a = (u^2-v^2)\,w$, $b = 2\,u\,v\,w$, $c = (u^2+v^2)\,w$.

d) Si les nombres u et v sont tous deux impairs, les nombres u^2+v^2, u^2-v^2 et $2uv$ sont pairs. Comme dans la question b) ci-dessus, un diviseur commun à $(u^2+v^2)/2$ et à $(u^2-v^2)/2$ divise les nombres u^2 et v^2 qui sont premiers entre eux. Il en résulte que les nombres $(u^2+v^2)/2$ et $(u^2-v^2)/2$ sont premiers entre eux.

De même, un diviseur premier commun à $(u^2+v^2)/2$ et à uv divise aussi $(u-v)^2/2$; comme le nombre uv est impair, ce diviseur premier ne peut être égal à ± 2. Comme ci-dessus, il divise $2u$ et $2v$, donc aussi u et v, ce qui est impossible. Par suite les nombres $(u^2+v^2)/2$ et uv sont premiers entre eux.

Il existe donc un entier $w \neq 0$ tel que

$$a = \frac{u^2-v^2}{2}\,w, \qquad b = u\,v\,w, \qquad c = \frac{u^2+v^2}{2}\,w.$$

e) Sous l'hypothèse que les nombres u et v sont impairs, les nombres $u+v$ et $u-v$ sont pairs. Posons

$$u' = \frac{u+v}{2}, \qquad v' = \frac{u-v}{2}.$$

On a alors $(u^2-v^2)/2 = 2\,u'\,v'$, $uv = u'^2 - v'^2$ et $(u^2+v^2)/2 = u'^2 + v'^2$. Les nombres u' et v' sont premiers entre eux car un diviseur commun diviserait aussi leur somme u et leur différence v. Leurs parités sont distinctes car u et v sont impairs.

3) a) Un diviseur premier commun à a et c divise $b^2 = c^2 - a^2$; il divise donc b. Par suite, si a, b et c sont premiers entre eux dans leur ensemble, les nombres a et c sont premiers entre eux. On démontrerait de façon analogue que les nombres a et b (resp. b et c) sont premiers entre eux.

Ainsi, si deux des entiers a, b et c sont premiers entre eux, ils sont tous premiers entre eux deux à deux.

b) Soit $n = 2k+1$ un entier impair. On a $n^2 = 4\,k^2 + 4\,k + 1$, d'où $n^2 \equiv 1 \pmod 4$. Comme a et b sont premiers entre eux, ils ne peuvent être tous deux pairs. Si a et b sont tous deux impairs, alors $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 4$. Selon la parité de c, on a $c^2 \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$, ce qui est contradictoire. Donc a et b n'ont pas la même parité.

c) Compte tenu des questions (I.2.c) et (I.2.e), il existe des entiers u, v et w tels que l'on ait les relations (I.2.c). Comme les entiers a, b et c sont premiers entre eux deux à deux, on a nécessairement $w = 1$, et les entiers u et v sont premiers entre eux. De plus u et v ont des parités différentes, sinon les entiers a, b et c seraient tous pairs.

4) a) Le nombre a est impair. On a $a^2 + v^2 = u^2$, ce qui est impossible si a et v sont impairs comme on l'a vu dans la question (I.3.b). Donc le nombre v est pair.

b) D'après la question précédente, on a $v = 2v'$, d'où $b^2 = 4uv'$. Dans l'écriture de b^2 comme produit de diviseurs premiers, chaque diviseur premier figure avec un exposant pair en raison de l'unicité de la factorisation. Pour la même raison d'unicité, la factorisation de b^2 est le produit des factorisations de 4, de u^2 et v'^2. Comme u et v' sont premiers entre eux, les diviseurs premiers de b^2 figurent avec un exposant pair dans chacun des facteurs 4, u^2 et v'^2. Ceci prouve que u et v' sont les carrés de nombres x et y premiers entre eux : $u = x^2$, $v' = y^2$, d'où $v = 2y^2$. Le nombre x est impair puisque le nombre u est impair.

c) On a $x^4 = u^2 = a^2 + v^2 = a^2 + (2y^2)^2$. Comme u et v sont premiers entre eux, a et v sont premiers entre eux. En remarquant que v est pair, et en appliquant à nouveau la question (I.3), on voit qu'il existe deux nombres entiers s et t strictement positifs, premiers entre eux, tels que $y^2 = st$, $x^2 = s^2 + t^2$.

d) Comme s et t sont premiers entre eux et que leur produit st est le carré y^2, par le même raisonnement que dans la question (I.4.b), on démontre que s et t sont des carrés.

e) On a bien $m^4 + n^4 = s^2 + t^2 = x^2$. Par ailleurs on a $0 < x \leqslant x^4 < x^4 + (2y^2)^2 = u^2 + v^2 = c$.

f) C'est pour cette démonstration que Fermat invoque le principe de *descente infinie*. Supposons donnés trois nombres entiers a, b, c, strictement positifs, tels que $a^4 + b^4 = c^2$. En raison de cette égalité, les diviseurs premiers communs de chaque couple (a, b), (b, c) et (c, a) sont les mêmes. En divisant a, b et c par leur PGCD, on est ramené à des nombres premiers entre eux deux à deux (question (I.3.a)). En échangeant les noms de a et b, on peut supposer que b est pair (question (I.3.b)). Les questions (I.4.a) à (I.4.e) montrent que l'on peut trouver un nouveau triplet (a, b, c) solution de $a^4 + b^4 = c^2$, où c est strictement plus petit que le c initial. Et Fermat conclut par l'impossibilité d'une descente infinie dans l'ensemble des entiers > 0.

En termes plus modernes, on peut présenter la démonstration par récurrence ou par l'absurde.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe des triplets (a, b, c) de nombres > 0 tels que $a^4 + b^4 = c^2$. On en choisit un pour lequel c est minimal. Alors a, b et c sont premiers entre eux deux à deux. Les questions (I.4.a) à (I.4.e) montrent que c n'est pas minimal, d'où la contradiction.

Par récurrence, on suppose l'impossibilité démontrée pour toute valeur de $c < \mathrm{C}$, et on démontre l'impossibilité pour $c = \mathrm{C}$. On raisonne comme ci-dessus pour trouver un $c < \mathrm{C}$ avec un raisonnement par l'absurde. Le raisonnement est initialisé pour $c = 1$ qui est évident.

La démonstration par l'absurde semble plus économique à rédiger que la démonstration par récurrence.

II . L'anneau $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$

1) L'ensemble $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ est stable par l'addition et la multiplication des nombres complexes :

$$(a+ib\sqrt{2})+(c+id\sqrt{2}) = (a+c)+i(b+d)\sqrt{2},$$
$$(a+ib\sqrt{2})(c+id\sqrt{2}) = ac-2bd+i(ad+bc)\sqrt{2}.$$

L'opposé $-a-ib\sqrt{2}$ d'un élément $a+ib\sqrt{2}$ de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ appartient à $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$.

Enfin l'élément 1 de $\mathbf{C}$ appartient à $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$.

Par suite $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbf{C}$. À ce titre, c'est un anneau commutatif intègre.

2) a) Si $a+ib\sqrt{2}$ est un élément de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$, $\mathrm{N}(a+ib\sqrt{2}) = a^2+2b^2$ est entier $\geqslant 0$.

b) Si un élément $\alpha = a+ib\sqrt{2}$ de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ est inversible dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$, alors $\mathrm{N}(\alpha)$ et $\mathrm{N}(\alpha^{-1})$ sont des entiers $\geqslant 0$ dont le produit est 1. Donc $\mathrm{N}(\alpha) = 1$.

Inversement, si $\mathrm{N}(\alpha) = 1$, alors α est $\neq 0$ et son inverse dans $\mathbf{C}$ est $\alpha^{-1} = \overline{\alpha}/\mathrm{N}(\alpha) = a-ib\sqrt{2}$ qui appartient à $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$.

c) Les éléments inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ sont ceux dont le module vaut 1, c'est-à-dire les seuls éléments 1 et -1.

3) Posons $\alpha/\beta = a+ib$, où a et b $\in \mathbf{R}$. Le couple (a,b) se trouve dans un rectangle $\mathrm{A} \leqslant x \leqslant \mathrm{A}+1$, $\mathrm{B}\sqrt{2} \leqslant y \leqslant (\mathrm{B}+1)\sqrt{2}$ du plan $\mathbf{R}^2$, où A et B sont les parties entières inférieures de a et $b/\sqrt{2}$. Les disques fermés, de rayon la demi-diagonale $\sqrt{3}/2$, centrés aux quatre sommets du rectangle, recouvrent le rectangle. Il y a donc un sommet du rectangle qui est à une distance < 1 du point (a,b). Les affixes des sommets du rectangle sont des éléments de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$. Il y a donc un élément γ de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ tel que $|\gamma - \frac{\alpha}{\beta}| < 1$. D'où le résultat.

4) La démonstration est analogue à celle que l'on donne pour $\mathbf{Z}$ en utilisant la division euclidienne.

Il s'agit de démontrer que tout idéal de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ est monogène. Soit I un idéal de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ non réduit à 0. Comme toute partie bornée de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ est finie, l'idéal I contient un élément $\beta \neq 0$ de plus petit module. Soit α un (autre) élément de I et soient γ et $\delta \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ tels que $\alpha = \beta\gamma + \delta$ et $|\delta| < |\beta|$. L'élément $\delta = \alpha - \beta\gamma$ appartient à I. Comme $|\delta| < |\beta|$ et puisque $|\beta|$ est minimal dans $\mathrm{I} - \{0\}$, c'est que $\delta = 0$, donc $\alpha = \beta\gamma$. On a ainsi prouvé que tout élément de I est un multiple de β dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$. Inversement, tout multiple de β dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ appartient à I. Donc l'idéal I est l'ensemble des multiples de β dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$.

5) Remarquons d'abord que 2 n'est pas irréductible dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ car $2 = -(i\sqrt{2})^2$.

Soit $\alpha \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ un diviseur de 2 dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$. On a donc $2 = \alpha\beta$, où $\beta \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$, d'où $\mathrm{N}(\alpha)\mathrm{N}(\beta) = 4$.

Comme $\mathrm{N}(\alpha)$ est entier et divise 4 dans $\mathbf{Z}$, les seules valeurs possibles pour $\mathrm{N}(\alpha)$ sont 1, 2 et 4.

Si $\mathrm{N}(\alpha) = 1$, on a vu (II.2.b) que α est inversible, ce qui est exclus.

Si $\mathrm{N}(\alpha) = 4$, alors $\beta = \pm 1$ est inversible, et $\alpha = \pm 2$ n'est pas irréductible.

Si $\mathrm{N}(\alpha) = 2$, alors α n'est pas inversible. De plus, si $\alpha = \gamma\delta$ dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$, on a $\mathrm{N}(\gamma)\mathrm{N}(\delta) = 2$, donc $\mathrm{N}(\gamma)$ ou $\mathrm{N}(\delta)$ est égal à 1 , et l'un des facteurs est inversible. Par suite α est irréductible dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$. Les éléments α de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ tels que $\mathrm{N}(\alpha) = 2$ sont $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

III . Somme et différence de deux carrés

1) a) Compte tenu de la première relation (B), on sait d'après (I.3) que les entiers m et n ont des parités distinctes. Il résulte alors des deux relations (B) que les nombres p et q sont impairs.

b) Comme m et n sont premiers entre eux, la relation $m^2 - n^2 = q^2$ entraîne que q et n sont premiers entre eux.

c) Comme dans a), la deuxième relation (B) entraîne que les entiers n et q ont des parités distinctes. D'après a), l'entier n est donc pair. Comme n est pair et p impair, les relations (B) montrent que l'entier m est impair.

On peut aussi dire que les carrés p^2 et q^2 sont $\equiv 1 \pmod 4$, donc $m^2 \equiv 1 \pmod 2$ et $n^2 \equiv 0 \pmod 2$ d'après les relations (C). Par suite m est impair et n est pair.

2) a) Si π divise $(q + in\sqrt{2})$ et $(q - in\sqrt{2})$ dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$, il divise leur somme $2q$ et leur différence $2in\sqrt{2}$.

b) Rappelons d'abord que $\mathrm{N}(\pi) = \pi\overline{\pi}$ est un nombre entier. Si π divisait q et n dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$, l'entier $\mathrm{N}(\pi)$ diviserait q^2 et n^2 dans $\mathbf{Z}$, ce qui est contradictoire avec (III.1.b).

c) D'après (II.5), les seuls diviseurs irréductibles de 2 dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ sont $\pm i\sqrt{2}$. Si $\pi = \pm i\sqrt{2}$ divise $(q + in\sqrt{2})$ dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$, alors π divise q dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$, et $\mathrm{N}(\pi) = 2$ divise q^2 dans $\mathbf{Z}$, ce qui est contradictoire avec (III.1.a).

d) D'après les trois questions précédentes, $(q + in\sqrt{2})$ et $(q - in\sqrt{2})$ sont premiers entre eux dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$.

3) a) Dans l'anneau principal $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$, on a $p^2 = (q + in\sqrt{2})(q - in\sqrt{2})$ et les deux facteurs sont premiers entre eux. Ce sont donc des carrés au signe près (i.e. multiplication par un élément inversible de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$).

b) On a $q' + in\sqrt{2} = (f + ig\sqrt{2})^2 = f^2 - 2g^2 + 2fgi\sqrt{2}$. Si les entiers f et g avaient un diviseur commun dans $\mathbf{Z}$, ce serait un diviseur commun à q et n . D'après la question (III.1.b), q et n sont premiers entre eux, donc f et g sont premiers entre eux.

Comme $q' = f^2 - 2g^2$ est impair, f est impair.

c) On a $m^2 = q^2 + n^2 = (f^2 - 2g^2)^2 + 4f^2g^2 = f^4 + 4\,g^4$. Les nombres f^2 et $2g^2$ sont premiers entre eux. D'après la question (I.3), il existe des nombres entiers u et v , premiers entre eux, de parités distinctes, tels que

$$f^2 = u^2 - v^2, \qquad 2g^2 = 2uv.$$

d) Puisque u et v sont premiers entre eux, positifs et que leur produit est un carré dans $\mathbf{Z}$, ce sont tous deux des carrés dans $\mathbf{Z}$.

e) On a $f^2 = u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$. D'après (III.4.b), le nombre f est impair, donc les nombres $u + v$ et $u - v$ sont impairs. Si $u + v$ et $u - v$ ont un diviseur commun p dans $\mathbf{Z}$, alors p est impair et divise leur somme $2u$ et leur différence $2v$. Comme u et v sont premiers entre eux, c'est impossible ; par suite les nombres $u+v$ et $u-v$ sont premiers entre eux dans $\mathbf{Z}$.

f) On a $f^2 = u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$; comme $u-v$ et $u+v$ sont premiers entre eux et positifs, ce sont des carrés dans $\mathbf{Z}$. Ainsi a^2+b^2 et a^2-b^2 sont des carrés dans $\mathbf{Z}$.

g) $a^2+b^2 \leqslant a^4+b^4 = u^2+v^2 < (u^2+v^2)^2 = m^2 < m^2+n^2$.

h) Pour deux entiers m et n strictement positifs, soit $\mathrm{P}(m,n)$ la propriété que m^2+n^2 et m^2-n^2 soient des carrés dans $\mathbf{Z}$. Procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe des couples (m,n) ayant la propriété $\mathrm{P}(m,n)$; il en existe alors un pour lequel m^2+n^2 est minimal.

Soit (m,n) un tel couple. Soit d le PGCD de m et n. En remplaçant m et n par m/d et n/d, on obtient des entiers premiers entre eux m' et n', et le couple (m',n') a la propriété $\mathrm{P}(m',n')$. En raison de la minimalité de m^2+n^2, m et n sont premiers entre eux.

Les questions (III.2) à (III.4) conduisent à un couple (a,b) d'entiers >0 ayant la propriété $\mathrm{P}(a,b)$ et tels que $a^2+b^2 < m^2+n^2$. C'est contradictoire avec la minimalité de m^2+n^2.

5) Soient a, b, c les longueurs des côtés BC, CA, AB du triangle. On a l'égalité $a^2 = b^2+c^2$ (théorème de Pythagore). L'aire du triangle est égale à $bc/2$. Raisonnons par l'absurde, et supposons que l'aire du triangle soit égale au carré d^2 d'un entier d. On a alors $bc = 2d^2$. Il en résulte

$$(b+c)^2 = b^2+2bc+c^2 = a^2+(2d)^2,$$
$$(b-c)^2 = b^2-2bc+c^2 = a^2-(2d)^2.$$

On obtient ainsi deux carrés dont la somme et la différence sont aussi des carrés, ce qui est impossible d'après la question (III.4).

6) Soient x, y et z des entiers >0 satisfaisant à l'égalité $x^4-y^4=z^2$.

Le produit $x^2y^2z^2 = x^2y^2(x^4-y^4)$ est l'aire du triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont x^4-y^4 et $2x^2y^2$, et le grand côté x^4+y^4. Ce n'est pas possible d'après la question (III.5).

IV . La relation $x^3 - y^2 = 2$

1) a) Le vecteur gradient $(3x_0^2, -2y_0)$ est normal à la courbe C au point de coordonnées (x_0,y_0). La tangente en M_0 à la courbe C a pour équation paramétriques

$$x = x_0 + 2y_0t, \qquad y = y_0 + 3x_0^2t.$$

b) L'équation aux t des points communs à la courbe C et à la droite T_0 est

$$8y_0t^3 + t^2(12x_0y_0^2 - 9x_0^4) = 0.$$

L'équation en t possède la racine double $t=0$ correspondant au point de contact M_0.

Pour $y_0 = 0$, $x_0 = \sqrt[3]{2}$, la tangente est verticale et ne recoupe pas la courbe C.

Pour $y_0 \neq 0$, L'équation en t possède une troisième racine t_1 correspondant à un point $\mathrm{M}_1 = (x_1,y_1)$. On obtient

$$t_1 = \frac{9x_0^4 - 12x_0y_0^2}{8y_0^3}, \qquad x_1 = \frac{x_0^4+16x_0}{4y_0^2}, \qquad y_1 = \frac{-x_0^6+40x_0^3+32}{8y_0^3}.$$

ou encore

$$x_1 = \frac{x_0^4+16\,x_0}{4\,(x_0^3-2)}, \qquad y_1 = \frac{-y_0^4+36\,y_0^2+108}{8y_0^3}.$$

c) Le point M_1 est distinct de M_0 lorsque $t_1 \neq 0$. La condition $t_1 = 0$ s'écrit $12x_0y_0^2 - 9x_0^4 = 0$; ce qui donne $3x_0^3 = 4y_0^2$, d'où $3x_0^3 = 4x_0^3 - 8$, et finalement

$$x_0 = 2, \qquad y_0 = \pm\sqrt{6}.$$

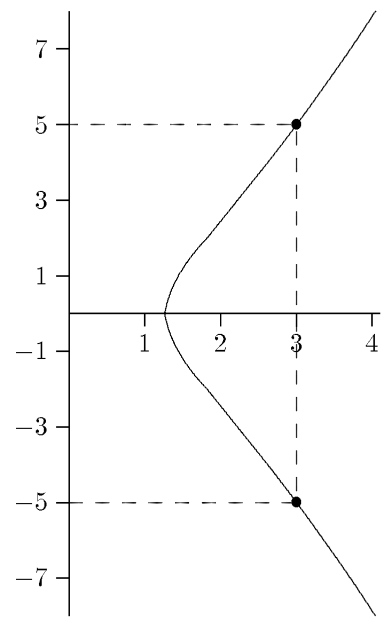
Lorsque $x_0 \neq 2$, la tangente en M_0 rencontre la courbe C en un point M_1 distinct de M_0 ; la courbe n'est pas convexe. Les point d'inflexion, points de changement de convexité, sont les points M_0 pour les quels le point M_1 est confondu avec M_0, c'est-à-dire $x_0 = 2$, $y_0 = \pm\sqrt{6}$.

d) La courbe C admet l'axe des abscisses comme axe de symétrie.

Elle le rencontre au point d'abscisse $x = \sqrt[3]{2}$.

Lorsque y tend vers $\pm\infty$, x tend vers $+\infty$ et $x \sim y^{2/3}$. C'est une branche parabolique dans la direction verticale.

e)



2) $x = 3$, $y = \pm 5$.

3) a) Soit π un élément irréductible de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ qui divise $(y - i\sqrt{2})$ et $(y + i\sqrt{2})$. Alors π divise $2i\sqrt{2} = -(i\sqrt{2})^3$. Par suite π divise $i\sqrt{2}$ donc, d'après (II.5), on a $\pi = \pm i\sqrt{2}$. Par suite π divise y, et $\pi\overline{\pi} = 2$ divise y^2 dans $\mathbf{Z}$. Comme y^2 est un carré, il est divisible par 4, et $y^2 + 2$ n'est pas divisible par 4. Donc x n'est pas divisible par 2, d'où une contradiction avec l'égalité $x^3 = (y - i\sqrt{2})(y + i\sqrt{2})$ et le fait que $i\sqrt{2}$ divise chaque facteur.

b) On en déduit que $y + i\sqrt{2}$ et $y - i\sqrt{2}$ sont des cubes dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ multipliés par un élément inversible. Mais les éléments inversibles de $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ sont 1 et -1 qui sont des cubes. Donc $y + i\sqrt{2}$ et $y - i\sqrt{2}$ sont des cubes.

c) Écrivons $y + i\sqrt{2} = (a + ib\sqrt{2})^3$, où a, $b \in \mathbf{Z}$. En développant, on obtient

$$y + i\sqrt{2} = (a^3 - 6ab^2) + i(3a^2b - 2b^3)\sqrt{2}.$$

De $b\,(3a^2 - 2b^2) = 1$, on déduit $b = 3a^2 - 2b^2 = \pm 1$, donc $b^2 = 1$, $3a^2 - 2 = 1$, $b = 1$, $a = \pm 1$.

Donc $y = a^3 - 6ab^2 = \pm 5$ et $x^3 = y^2 + 2 = 27$, $x = 3$.

Les seuls points à coordonnées entières de la courbe C sont les points $(3, 5)$ et $(3, -5)$.

4) a) Prenons pour P_0 le point $(3,\, 5)$ de la courbe C . Les coordonnées du point P_1 sont

$$x_1 = \frac{x_0^4 + 16\,x_0}{4\,(x_0^3 - 2)} = \frac{129}{100}, \qquad y_1 = \frac{-y_0^4 + 36\,y_0^2 + 108}{8y_0^3} = \frac{383}{1000}.$$

Les coordonnées de P_{n+1} sont données, à partir de celles de P_n , par les relations

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 16\,x_n}{4\,(x_n^3 - 2)}, \qquad y_{n+1} = \frac{-y_n^4 + 36\,y_n^2 + 108}{8y_n^3}.$$

On en déduit que les coordonnées des points P_n sont rationnelles.

b) Étant donné un nombre rationnel $x \neq 0$, notons $v_2(x)$ l'exposant de 2 dans la factorisation de x comme produit de puissances de nombres premiers, avec des exposants positifs ou négatifs.

Les relations ci-dessus permettent de voir que $v_2(x_n)$ est $\leqslant 0$ et que $v_2(x_{n+1}) = 4v_2(x_n) - 2$. Il en résulte que la suite des points P_n est injective et que la courbe C a une infinité de points dont les coordonnées sont rationnelles.

V . L'équation $x^3 + y^3 = z^3$

1) a) Résulte du fait que $j^2 = -1 - j$.

b) Comme pour l'anneau $\mathbf{Z}[\,\mathrm{i}\sqrt{2}]$, si $\alpha = a + jb$ est un élément de $\mathbf{Z}[j]$, le nombre

$$\mathrm{N}(\alpha) = (a + jb)(a + j^2 b) = a^2 - ab + b^2$$

est entier.

c) Les éléments inversibles de $\mathbf{Z}[j]$ sont les éléments dont le module est 1 . Ce sont ± 1 , $\pm j$ et $\pm j^2$.

d) L'anneau $\mathbf{Z}[j]$ est un anneau principal. La démonstration est analogue à celle donnée pour $\mathbf{Z}[\,\mathrm{i}\sqrt{2}]$. Les éléments de $\mathbf{Z}[j]$ sont les sommets d'un pavage du plan par des triangles équilatéraux dont le côté a pour longueur 1 . Tout point d'un tel triangle est à une distance $\leqslant \sqrt{3}/3$ de l'un des sommets. On a donc un théorème de division sans unicité dans $\mathbf{Z}[j]$

On procède alors comme pour $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}[\,\mathrm{i}\sqrt{2}]$ en utilisant cette division.

e) Comme $\mathrm{N}(\pi) = 3$ est un nombre premier, π est irréductible dans $\mathbf{Z}[j]$.

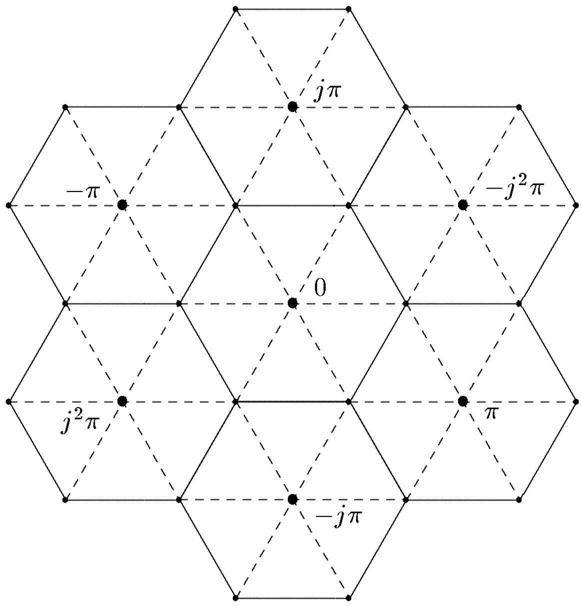
2) Soit α un élément de $\mathbf{Z}[j]$. Ecrivons la division euclidienne de α par π :

$$\alpha = \pi\,\gamma + \delta, \qquad \text{avec} \qquad |\delta| < \sqrt{3}.$$

On a donc $\delta = 0$ ou $|\delta| = 1$. Si $\delta = 0$, alors π divise α . Sinon, δ est un élément inversible et $\delta^3 = \pm 1$.

$$\begin{aligned} \alpha^3 - \delta^3 &= (\alpha - \delta)(\alpha - j\delta)(\alpha - j^2\delta), \\ &= \pi^3\gamma(\gamma + \delta)(\gamma - j^2\delta). \end{aligned}$$

Les trois derniers facteurs sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral dont le côté mesure 1 . L'un d'entre eux est donc divisible par π (voir figure). Il résulte de cela que $\alpha^3 \pm 1$ est divisible par π^4 dans $\mathbf{Z}[j]$.



3) Supposons, par l'absurde, que π ne divise aucun des éléments α, β ou γ ; alors chacun d'entre eux est congru à $\pm 1 \pmod{\pi^4}$ d'après la question (V.2). Par suite $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ est congru à ± 1 ou $\pm 3 \pmod{\pi^4}$. Or $|\pi^4| = 9$ et π^4 ne peut diviser ± 1 ni ± 3. D'où la contradiction.

4) a) Comme α, β et γ sont premiers entre eux dans $\mathbf{Z}[j]$, π ne divise ni α ni β. D'après la question (V.2), α et β sont $\equiv \pm 1 \pmod{\pi^4}$; donc $-\epsilon\gamma^3$ est congru à 0 ou $\pm 2 \pmod{\pi^4}$. Par hypothèse, π divise γ, mais π ne divise pas 2 car $|\pi| = \sqrt{3}$; donc γ^3 est divisible par π^4, et nécessairement π^2 divise γ.

b) Considérons les trois facteurs du second membre de l'égalité

$$-\epsilon\,\gamma^3 = (\alpha+\beta)(\alpha+j\beta)(\alpha+j^2\beta).$$

On a

$$(\alpha+\beta)-(\alpha+j\beta) = \pi\beta, \qquad (\alpha+\beta)-(\alpha+j^2\beta) = j\pi\beta. \tag{D}$$

L'élément irréductible π divise γ, il divise donc un des facteurs. D'après les relations (D), l'élément π divise les trois facteurs. Mais π^2 divise un seul facteur car π ne divise pas β.

c) Un autre diviseur irréductible commun aux trois facteurs doit diviser $\pi\beta$, donc β. Il doit aussi diviser $(\alpha+j\beta)-j(\alpha+j^2\beta) = \pi\alpha$ donc α. C'est impossible puisque α et β sont premiers entre eux.

Ainsi π est le seul diviseur commun aux trois facteurs.

d) Chacun des facteurs est donc égal à π multiplié par un élément inversible et par un cube. Autrement dit, il existe des éléments λ, μ, ν de $\mathbf{Z}[j]$, premiers entre eux deux à deux, non divisibles par π, et des éléments inversibles ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 tels que l'on ait

$$\alpha+\beta = \epsilon_1\,\pi\,\lambda^3, \qquad \alpha+j\,\beta = \epsilon_2\,\pi\,\mu^3, \qquad \alpha+j^2\,\beta = \epsilon_3\,\pi^{3n-2}\,\nu^3.$$

e) On a

$$(\alpha+\beta)+j(\alpha+j\beta)+j^2(\alpha+j^2\beta) = (1+j+j^2)(\alpha+\beta) = 0.$$

On en déduit, en posant $\eta_1 = \epsilon_1^{-1}\epsilon_2$, $\eta_2 = \epsilon_1^{-1}\epsilon_3$, et en divisant par π^3 :

$$\lambda^3 + \eta_1 \mu^3 + \eta_2 \pi^{3n-3} \nu^3 = 0. \tag{E}$$

f) Rappelons que n est $\geqslant 2$ (question a)) et que λ^3 et μ^3 sont congrus à $\pm 1 \pmod{\pi^4}$ (question (V.2)). En conséquence de l'égalité (E) , l'élément π^2 divise un élément ξ de la forme $\pm 1 \pm \eta_1$. Le module de $\pm 1 \pm \eta_1$ est au plus 2 et le module de π^2 est 3 . Nécessairement $\xi = 0$, donc $\eta_1 = \pm 1$.

5) On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe des éléments x , y , z de $\mathbf{Z}$, tous $\neq 0$, et tels que $x^3 + y^3 = z^3$. En divisant x , y et z par leur PGCD, on obtient de nouveaux éléments x , y , z de $\mathbf{Z}$, tous $\neq 0$, premiers entre eux deux à deux et tels que $x^3 + y^3 = z^3$.

Remarquons que les entiers x , y , z sont aussi premiers entre eux dans $\mathbf{Z}[j]$. En effet, si $\delta \in \mathbf{Z}[j]$ divise x et y dans $\mathbf{Z}[j]$, l'entier $\mathrm{N}(\delta)$ divise x^2 et y^2 ; par suite $\mathrm{N}(\delta) = 1$ et δ est un élément inversible de $\mathbf{Z}[j]$.

Enfin, d'après la question (V.3), l'un des éléments x , y ou z est divisible par π .

Considérons maintenant tous les triplets (α, β, γ) d'éléments de $\mathbf{Z}[j]$, premiers entre eux dans $\mathbf{Z}[j]$, tels que γ soit divisible par π et pour lesquels il existe un élément inversible ϵ de $\mathbf{Z}[j]$ tel que l'on ait la relation

$$\alpha^3 + \beta^3 + \epsilon\,\gamma^3 = 0.$$

Il y a bien de tels triplets puisque le triplet (x, y, z) , à permutation près, convient.

Pour un tel triplet (α, β, γ) , soit n le plus grand exposant tel que π^n divise γ . Choisissons un triplet (α, β, γ) pour lequel l'exposant n est minimal. D'après la question (4.a), n est $\geqslant 2$. D'après la question 4), on peut trouver un nouveau triplet pour lequel l'exposant est $n-1$. Ceci est contradictoire avec la minimalité de l'entier n . D'où le résultat par l'absurde.

On notera que la démonstration d'un énoncé sur les entiers a nécessité la démonstration d'un énoncé plus général (introduction de l'élément inversible ϵ) et dans un cadre plus général ($\mathbf{Z}[j]$ au lieu de $\mathbf{Z}$), afin que la descente puisse fonctionner.

4.1.3 Commentaires sur la première épreuve écrite

Cette épreuve appelle peu de commentaires. Les candidats ont suivi la progressivité du problème et les meilleures copies ont réussi à aborder significativement les dernières parties.

Un certain nombre de copies montrent que leurs auteurs ne sont pas à l'aise avec les notions de nombres premiers et de nombres premiers entre eux, ainsi qu'avec les théorèmes de divisibilité correspondant. Ces copies sont heureusement peu nombreuses, mais les correcteurs d'un concours interne s'étonnent que des candidats, professeurs en exercice, puissent laisser apparaître de telles lacunes dans leurs copies.

4.2 Deuxième épreuve écrite

4.2.1 Énoncé de la deuxième épreuve écrite

Objectif et conventions

Le but de ce problème est de construire une fonction strictement croissante sur $\mathbf{R}$, dérivable et dont la dérivée s'annule en tout point d'un ensemble dense dans $\mathbf{R}$. En fait, c'est la fonction F réciproque de celle-ci qui est construite.

On note $\overline{\mathbf{R}}$ l'ensemble $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Lorsque, dans certaines conditions, une suite ou une fonction tend vers $+\infty$, on dit qu'elle a $+\infty$ pour limite dans $\overline{\mathbf{R}}$. On fait la convention analogue pour $-\infty$.

Si A et B sont deux ensembles, on note $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ l'ensemble des points de A qui n'appartiennent pas à l'ensemble B.

Dans tout le problème, on désigne par f l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Autrement dit $f(x) = x^{1/3}$.

I . La fonction racine cubique

A. Dérivées au sens généralisé

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et a un point de I. Soit $g : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une fonction continue au point a. On dit que la fonction g est *dérivable au sens généralisé* au point a lorsque le rapport $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbf{R}}$ lorsque x tend vers a, avec $x \neq a$.

Même dans le cas d'une limite infinie, on écrit $g'(a) = \ell$.

1) Soient I et J des intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ et soit g une bijection croissante de I sur J. On suppose que la fonction g est dérivable au sens généralisé en tout point de I. Démontrer que la fonction g^{-1}, réciproque de g, est dérivable au sens généralisé en tout point de J, et que, pour tout $a \in \mathrm{J}$, on a

$$(g^{-1})'(a) = \frac{1}{g'(g^{-1}(a))},$$

avec les conventions $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

2) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

a) Soit c un point de I. On suppose que la fonction g est dérivable au sens généralisé au point c et qu'elle admet un maximum local en c. Démontrer que l'on a $g'(c) = 0$.

b) On suppose que la fonction g est dérivable au sens généralisé en tout point de l'intervalle I. Soient a, $b \in \mathrm{I}$ tels que $a < b$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

[on pourra examiner dans un premier temps le cas où $g(a) = g(b)$].

3) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Soit a un point de I. On suppose que la fonction g est dérivable en tout point de $\mathrm{I} - \{a\}$, et que la fonction $x \mapsto g'(x)$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbf{R}}$ lorsque x tend vers a, avec $x \neq a$.

a) Soit x un point de I distinct de a ; posons $\mathrm{J}_x =]a, x[$ si $x > a$ et $\mathrm{J}_x =]x, a[$ si $x < a$. Démontrer que l'on a

$$\inf\{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\} \leqslant \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leqslant \sup\{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\}.$$

b) Démontrer que la fonction g est dérivable au sens généralisé au point a et que l'on a $g'(a) = \ell$.

B. La fonction racine cubique

Rappelons que l'on désigne par f l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1) a) Démontrer que la fonction f est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbf{R}$ et que l'on a $f'(0) = +\infty$.

b) Soient s et t des nombres réels $\neq 0$. Démontrer l'équivalence

$$f'(s) \leqslant f'(t) \iff |s| \geqslant |t|.$$

c) Soit a un nombre réel > 0. Démontrer que la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mapsto f(x+a) - f(x-a)$ atteint son maximum en 0.

d) Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant 2 \left| f\left(\dfrac{x-y}{2}\right) \right|$.

e) Démontrer que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

2) a) Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on a $x^2 + xy + y^2 \geqslant \dfrac{3}{4}\, x^2$.

b) En déduire que, pour x et $x_0 \in \mathbf{R}$, tels que $x \neq x_0$ et $x_0 \neq 0$, on a

$$0 \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 4 f'(x_0).$$

C. Construction d'une suite dense

Notons g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(t) = t \cos t$. Rappelons que l'on désigne par f l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1) a) Démontrer que la fonction $g \circ f$ est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbf{R}$. Étudier en particulier $(g \circ f)'(0)$.

b) Démontrer que $(g \circ f)'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Dans les questions suivantes de cette partie, pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$a_n = g(f(n)) = n^{1/3} \cos(n^{1/3}).$$

2) Soient $x \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}$ tels que $k\pi \geqslant |x|$.

a) Démontrer qu'il existe un nombre réel $y(k, x)$ dans l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $g(y(k, x)) = x$.

b) On note n_k la partie entière de $y(k, x)^3$. Démontrer que la suite $(a_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ a pour limite x.

3) Démontrer que l'ensemble $\{a_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

4) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $\lambda_n = \dfrac{1}{n^2 + 1}\cdot$ Démontrer que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ sont convergentes.

II . Construction de la fonction F

Dans cette partie, on se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels *strictement positifs*. On suppose que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ sont convergentes.

1) a) Démontrer que la série de fonctions, dont le terme général est la fonction $x \mapsto \lambda_n f(x-a_n)$, est uniformément convergente sur toute partie compacte de $\mathbf{R}$.

Dans le suite de cette partie, on pose, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f(x-a_n).$$

b) Démontrer que la fonction F est continue et strictement croissante.

c) Démontrer que,

pour tout $x > a_0$, on a $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a_0) \geqslant \lambda_0\, f(x-a_0)$,

pour tout $x < a_0$, on a $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a_0) \leqslant \lambda_0\, f(x-a_0)$.

d) En déduire les limites de la fonction F en $+\infty$ et $-\infty$.

e) Démontrer que la fonction F est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

Nous allons démontrer, dans la suite de cette partie, que la fonction F *possède une dérivée au sens généralisé en tout point de* $\mathbf{R}$.

2) Démontrer que, pour x et $x_0 \in \mathbf{R}$, tels que $x \neq x_0$, et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \, \frac{f(x-a_k) - f(x_0-a_k)}{x-x_0} \leqslant \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x-x_0}.$$

3) Démontrer que la fonction F est dérivable au sens généralisé au point a_n et que l'on a $\mathrm{F}'(a_n) = +\infty$.

4) Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que x_0 n'est égal à aucun a_n , $n \in \mathbf{N}$, mais que la série de terme général $\lambda_n f'(x_0 - a_n)$ est divergente.

a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, si l'on a $0 < |x-x_0| < \varepsilon$, alors on a

$$1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \, \frac{f(x-a_k) - f(x_0-a_k)}{x-x_0} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \, f'(x_0-a_k).$$

b) En déduire que la fonction F est dérivable au sens généralisé au point x_0 et que l'on a $\mathrm{F}'(x_0) = +\infty$.

5) Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que x_0 n'est égal à aucun a_n , $n \in \mathbf{N}$, et que la série de terme général $\lambda_n f'(x_0 - a_n)$ est convergente.

a) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $x \neq x_0$, on a

$$\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x-x_0} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \, \frac{f(x-a_k) - f(x_0-a_k)}{x-x_0} + 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0-a_k).$$

b) En déduire que la fonction F est dérivable au point x_0 et que l'on a $\mathrm{F}'(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0-a_k)$.

6) Démontrer que la fonction F^{-1} , réciproque de F , est dérivable en tout point de $\mathbf{R}$.

III . Parties denses de $\mathbf{R}$

A. Intersections d'ensembles ouverts denses

Donnons-nous, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, un sous-ensemble ouvert V_n de $\mathbf{R}$, dense dans $\mathbf{R}$.

On pose $\mathrm{B} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{V}_n$.

1) Soit I un intervalle ouvert, non vide, de $\mathbf{R}$.

a) Démontrer qu'il existe des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n < v_n$;

(ii) $[u_0, v_0] \subset \mathrm{I} \cap \mathrm{V}_0$;

(iii) pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset]u_n, v_n[\cap \mathrm{V}_{n+1}$.

b) Démontrer que l'ensemble $\mathrm{I} \cap \mathrm{B}$ n'est pas vide.

2) Démontrer que l'ensemble B est dense dans $\mathbf{R}$.

3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de B. En considérant les ensembles ouverts $\mathrm{V}_n - \{x_n\}$, démontrer que l'ensemble $\mathrm{B}' = \mathrm{B} - \{x_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

B. Parties de $\mathbf{R}$ contenant de « gros » ensembles compacts

1) Soient a et $b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$, et soit $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de l'intervalle $[a, b]$. On suppose que l'ensemble $\mathrm{C} = \{c_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est compact. Soit ε un nombre réel > 0 et soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $2 \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \leqslant \varepsilon$.

a) Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, posons $\mathrm{I}_k =]c_k - \alpha_k, c_k + \alpha_k[$. Démontrer qu'il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que l'ensemble C soit contenu dans la réunion $\bigcup_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathrm{I}_k$.

b) Démontrer qu'il existe une fonction continue $g : [a, b] \to [0, 1]$ telle que l'on ait

$g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathrm{C}$;

$g(x) = 0$ pour tout $x \notin \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathrm{I}_k$.

c) Démontrer l'inégalité $\int_a^b g(t)\, dt \leqslant \varepsilon$.

2) Soit A une partie de $\mathbf{R}$. On suppose que, pour tous nombres réels a et b tels que $a < b$, il existe une partie compacte C de $\mathbf{R}$, contenue dans $\mathrm{A} \cap [a, b]$, et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tels que, pour toute fonction continue $g : [a, b] \to [0, 1]$, satisfaisant à $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathrm{C}$, on ait $\int_a^b g(t)\, dt \geqslant \varepsilon$.

a) Démontrer que, pour tous nombres réels a et b tels que $a < b$, l'ensemble $\mathrm{A} \cap [a, b]$ n'est pas dénombrable.

b) Démontrer que l'ensemble A est dense dans $\mathbf{R}$, et que, pour toute partie dénombrable D de A, l'ensemble $\mathrm{A} - \mathrm{D}$ est encore dense dans $\mathbf{R}$.

IV . Les points de pente infinie de F

On reprend les notations de la partie II. On se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels strictement positifs. On suppose que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ sont convergentes, et l'on pose $\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f(x-a_n)$. On suppose de plus que l'ensemble $\mathrm{D} = \{a_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

A. Densité de l'ensemble des points de pente infinie

1) Pour $x \in \mathbf{R}$ et $\mathrm{T} \in]0,+\infty[$, posons $g_{\mathrm{T}}(x) = \inf\{\mathrm{T}, f'(x)\}$.

a) Soit $\mathrm{T} \in]0,+\infty[$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n g_{\mathrm{T}}(x-a_n)$ est convergente.

b) Pour $x \in \mathbf{R}$, posons $\mathrm{G}_{\mathrm{T}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n g_{\mathrm{T}}(x-a_n)$. Démontrer que la fonction G_{T} est continue sur $\mathbf{R}$.

c) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\mathrm{F}'(x) = \sup\{\mathrm{G}_{\mathrm{T}}(x);\ \mathrm{T} \in]0,+\infty[\}$, où la borne supérieure est prise dans $\overline{\mathbf{R}}$.

2) Soit M un nombre réel > 0 . On pose $\mathrm{U}_{\mathrm{M}} = \{x \in \mathbf{R};\ \mathrm{F}'(x) > \mathrm{M}\}$.

a) Démontrer que l'ensemble U_{M} est la réunion des ensembles $\{x \in \mathbf{R}; \mathrm{G}_{\mathrm{T}}(x) > \mathrm{M}\}$ pour $\mathrm{T} \in]0,+\infty[$.

b) Démontrer que l'ensemble U_{M} est ouvert et dense dans $\mathbf{R}$.

3) Soit A l'ensemble $\{x \in \mathbf{R};\ \mathrm{F}'(x) = +\infty\}$. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{A} - \mathrm{D}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

B. Densité des points de pente finie

1) Soient a et $b \in \mathbf{R}$ et soit $\varepsilon > 0$ tels que $a+\varepsilon < b$. Soit M un nombre réel > 0 ; notons C l'ensemble $\{x \in [a,b];\ x \notin \mathrm{U}_{\mathrm{M}}\}$. Soit $g : [a,b] \to [0,1]$ une fonction continue telle que $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathrm{C}$.

Démontrer l'inégalité $\int_a^b \mathrm{M}\, g(t)\, dt + \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \geqslant \mathrm{M}(b-a)$.

2) Soit B l'ensemble $\{x \in \mathbf{R};\ \mathrm{F}'(x) \neq +\infty\}$. Démontrer que, pour toute partie dénombrable N de B , l'ensemble $\mathrm{B} - \mathrm{N}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

4.2.2 Solution de la deuxième épreuve écrite

On utilisera librement la remarque suivante :

Remarque. Soient I un intervalle ouvert $a \in \mathrm{I}$ et $g, h : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ des fonctions, et $\lambda \in \mathbf{R}^*$. On suppose que g est dérivable au sens généralisé en a et h est dérivable (vraiment) en a. Alors λg et $g+h$ sont dérivables au sens généralisé en a et l'on a

$$(\lambda g)'(a) = \lambda g'(a) \ \text{ et } \ (g+h)'(a) = g'(a) + h'(a)$$

avec les conventions

$$\lambda \pm \infty = \pm\infty \text{ si } \lambda > 0, \quad \lambda \pm \infty = \mp\infty \text{ si } \lambda < 0 \quad \text{et} \quad \pm\infty + x = \pm\infty \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

I. La fonction racine cubique

A. Dérivées au sens généralisé.

1. L'application g^{-1} est continue et strictement croissante comme réciproque d'une application continue strictement croissante. Soit $a \in \mathrm{J}$. Posons $b = g^{-1}(a)$. Pour $y \in \mathrm{I}$ distinct de b posons $h(y) = \dfrac{g(y)-g(b)}{y-b}\cdot$ Pour $x \in \mathrm{J}$ distinct de a, on a $\dfrac{g^{-1}(x)-g^{-1}(a)}{x-a} = \dfrac{1}{h \circ g^{-1}(x)}\cdot$
   Puisque g^{-1} est continue en a et h admet la limite $g'(b)$ en b, la fonction $h \circ g^{-1}$ admet en a la limite $g'(b)$. Comme la fonction g est strictement croissante, la fonction h prend ses valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{h \circ g^{-1}(x)} = \dfrac{1}{g'(b)}$ avec les conventions $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.
2. (a) Si g admet un maximum local en c, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$, on ait $x \in \mathrm{I}$ et $g(x) - g(c) \leq 0$. Alors, pour $x <\in]c-\varepsilon, c[$, on a $\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c} \geq 0$ et pour $x \in]c, c+\varepsilon[$, on a $\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c} \leq 0$. On a :
   $g'(c) = \lim\limits_{x\to c,\ x<c} \dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}$, donc $g'(c) \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$;
   $g'(c) = \lim\limits_{x\to c,\ x>c} \dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}$, donc $g'(c) \in \mathbf{R}_- \cup \{-\infty\}$.
   Il vient $g'(c) = 0$.

   (b) Posons $u = \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$ et, pour $x \in \mathrm{I}$, $h(x) = g(x) - ux$. La fonction h est dérivable au sens généralisé, pour $x \in \mathrm{I}$ on a on a $h'(x) = g'(x) - u$ (avec la convention $\pm\infty - u = \pm\infty$) et $h(a) = h(b)$. Nous devons démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $h'(c) = 0$.

   Comme la fonction h est continue sur le segment $[a, b]$ elle y est bornée et y atteint ses bornes. Posons $m = \inf\{h(x);\ x \in [a, b]\}$ et $\mathrm{M} = \sup\{h(x);\ x \in [a, b]\}$. Si $m = \mathrm{M}$, alors h est constante sur $[a, b]$, et on trouve $h'(c) = 0$ pour tout $c \in [a, b]$. Sinon, m et M ne peuvent être tous deux égaux à $h(a)$; quitte à changer g en $-g$, on peut supposer que $\mathrm{M} \neq h(a)$. Comme le « sup » est atteint, il existe $c \in [a, b]$ tel que $h(c) = \mathrm{M}$; comme $h(b) = h(a) < \mathrm{M}$, il vient $c \in]a, b[$. Alors h atteint un maximum local en c, donc $h'(c) = 0$ d'après (a).
3. (a) D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in \mathrm{J}_x$ tel que $g'(c) = \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot$
   Donc $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \in \{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\}$ et en particulier $\inf\{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\} \leq \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \leq \sup\{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\}$ (ces bornes étant bien sûr prises dans $\overline{\mathbf{R}}$).

(b) Pour $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, posons $\mathrm{V}_\alpha =]a-\alpha, a[\cup]a, a+\alpha[$. Par hypothèse, pour tout intervalle ouvert U de $\overline{\mathbf{R}}$ contenant ℓ, il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que, pour $y \in \mathrm{V}_\alpha$ on ait $f'(y) \in \mathrm{U}$; pour $x \in \mathrm{V}_\alpha$, on a $\mathrm{J}_x \subset \mathrm{V}_\alpha$; on a alors $\inf\{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\} \in \overline{\mathrm{U}}$ et $\sup\{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\} \in \overline{\mathrm{U}}$. Cela démontre que $\inf\{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\}$ et $\sup\{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\}$ tendent vers ℓ (dans $\overline{\mathbf{R}}$) lorsque x tend vers a. D'après (a) et en utilisant le théorème des « encadrements », on trouve $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = \ell$. Autrement dit g est dérivable au sens généralisé en a et $g'(a) = \ell$.

B. La fonction racine cubique

1. (a) Posons $g(x) = x^3$. La fonction g est strictement croissante, dérivable et bijective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. D'après 1.(a), sa fonction réciproque f est dérivable au sens généralisé. En particulier, on a $f'(0) = \dfrac{1}{g'(f(0))} = \dfrac{1}{0} = +\infty$.

(b) Pour $s \in \mathbf{R}^*$, on a $f'(s) = \dfrac{1}{g'(f(s))} = \dfrac{|s|^{-2/3}}{3}\cdot$ La fonction f' est paire et strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$, on a donc $f'(s) \le f'(t) \iff f'(|s|) \le f'(|t|) \iff |s| \ge |t|$.

(c) La fonction $g : x \mapsto f(x+a) - f(x-a)$ est continue sur $\mathbf{R}$, dérivable en tout point x distinct de $\pm a$, et l'on a $g'(x) = f'(x+a) - f'(x-a)$. Pour $x < 0$, on a $|x+a| < |x-a|$ donc $f'(x+a) > f'(x-a)$; donc g est croissante sur $]-\infty, -a[$ et sur $]-a, 0[$; pour $x > 0$, on a $|x+a| > |x-a|$ donc $f'(x+a) < f'(x-a)$; donc g est décroissante sur $]0, a[$ et sur $]a, +\infty[$. La fonction g atteint donc son maximum en 0.

(d) Si $x = y$ il n'y a rien à démontrer ; sinon, posons $a = \left|\dfrac{x-y}{2}\right|$ et $z = \dfrac{x+y}{2}$ de sorte que $x = z+a$ et $y = z-a$ ou $x = z-a$ et $y = z+a$; comme f est croissante, on a $|f(x) - f(y)| = |f(z+a) - f(z-a)| = f(z+a) - f(z-a)$; comme f est impaire on a $f(a) - f(-a) = 2\left|f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\right|$. La question (c) donne donc $|f(x) - f(y)| \le 2\left|f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\right|$.

(e) Soit $\varepsilon > 0$; comme f est continue en 0, il existe α tel que pour tout $z \in \mathbf{R}$ tel que $|z| < \alpha$ on ait $|f(z)| < \varepsilon$. D'après (d), on trouve que si $|x-y| < 2\alpha$, $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$. Donc f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

2. (a) Pour tout $x, y \in \mathbf{R}^2$, on a $\dfrac{1}{4}x^2 + xy + y^2 = \left(y + \dfrac{x}{2}\right)^2 \ge 0$, donc $x^2 + xy + y^2 \ge \dfrac{3}{4}x^2$.

(b) Soient $x_0, x \in \mathbf{R}$ tels que $x_0 \ne 0$ et $x \ne x_0$. Posons $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. On a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{y^3 - y_0^3} = \frac{1}{y_0^2 + y_0 y + y^2}\cdot$$

D'après (a), on a on a $y_0^2 + y_0 y + y^2 \ge \dfrac{3}{4}y_0^2 > 0$, donc $0 < \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le \dfrac{4}{3y_0^2}\cdot$ Or $f'(x_0) = \dfrac{1}{3y_0^2}$, donc $0 < \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 4f'(x_0)$.

C. Construction d'une suite dense.

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $g'(t) = \cos t - t\sin t$. Puisque f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, la fonction $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et pour $t \ne 0$, on a $(g \circ f)'(t) = f'(t)g'(f(t))$. Or $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0} g'(f(t)) = g'(f(0)) = 1$, donc $\lim\limits_{t\to 0}(g \circ f)'(t) = +\infty$. D'après A.3.(b), cela implique que $g \circ f$ est dérivable au sens généralisé en 0 et $(g \circ f)'(0) = +\infty$.

(b) Remarquons que pour $x \ne 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{3f(x)^2}$, de sorte que $(g \circ f)'(x) = h(f(x))$, où l'on a posé $h(t) = \dfrac{g'(t)}{3t^2} = \dfrac{\cos t}{3t^2} + \dfrac{\sin t}{t}\cdot$ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 0$, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty}(g \circ f)'(x) = 0$.

2. (a) Pour $k \in \mathbf{N}$, on a $g(k\pi) = (-1)^k k\pi$ et $g((k+1)\pi) = (-1)^{k+1}(k+1)\pi$. Si $x \in \mathbf{R}$ satisfait $k\pi \geq |x|$, alors x est dans le segment d'extrémités $g(k\pi)$ et $g((k+1)\pi)$. Puisque g est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre $y(k,x) \in [k\pi,(k+1)\pi]$ tel que $g(y(k,x)) = x$. Or $g((k+1)\pi) \neq x$, donc $y(k,x) \in [k\pi,(k+1)\pi[$

   (b) On a $a_{n_k} - x = (g \circ f)(n_k) - (g \circ f)(y(k,x)^3)$ de sorte qu'il existe $z_k \in [n_k, y(k,x)^3]$ tel que $a_{n_k} - x = (n_k - y(k,x)^3)(g\circ f)'(z_k)$. Lorsque $k \to +\infty$, puisque $y(k,x) \geq k\pi$ et $z_k \geq y(k,x)^3 - 1$, il vient $z_k \to +\infty$, donc $(g\circ f)'(z_k) \to 0$. Comme $|n_k - y(k,x)^3| < 1$, il vient $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} - x = 0$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$. Par la question précédente, il existe une suite (n_k) de nombres entiers naturels telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = x$; donc x est adhérent à $\{a_n;\ n \in \mathbf{N}\}$. Cela étant vrai pour tout x, l'adhérence de $\{a_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est $\mathbf{R}$, autrement dit $\{a_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

4. Rappelons que pour tout nombre réel $\alpha > 1$, la série de terme général $(n^{-\alpha})$ converge. Comme $0 < \lambda_n < n^{-2}$ la série de terme général (λ_n) converge. On a $|a_n| \leq n^{1/3}$, donc $|f(a_n)| \leq n^{1/9}$, donc $|\lambda_n f(a_n)| \leq n^{-\alpha}$ avec $\alpha = 2 - 1/9$. On en déduit que la série de terme général $(\lambda_n f(a_n))$ est absolument convergente donc convergente.

II. Construction de la fonction *F*

1. ***Construction.***

   (a) Remarquons d'abord que la série de terme général $\lambda_n f(-a_n) = -\lambda_n f(a_n)$ converge par hypothèse. Soit $\mathrm{M} \in \mathbf{R}_+$. Pour $|x| \leq \mathrm{M}$, on a $|f(x-a_n) - f(-a_n)| \leq 2|f(x/2)|$ d'après la question B.1.(d). Donc $|\lambda_n(f(x-a_n) - f(-a_n))| \leq 2^{2/3}\mathrm{M}^{1/3}\lambda_n$. Il s'ensuit que la série de fonctions de terme général $\lambda_n(f(x-a_n) - f(-a_n))$ converge normalement sur l'intervalle $[-\mathrm{M},\mathrm{M}]$. Il en résulte que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n f(x-a_n)$ converge uniformément sur $[-\mathrm{M},\mathrm{M}]$. Si K est un compact de $\mathbf{R}$, il est borné donc contenu dans un intervalle de la forme $[-\mathrm{M},\mathrm{M}]$. Il en résulte que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n f(x-a_n)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{R}$.

   (b) Soient $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x < y$. Alors $\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x)$ est somme des nombres strictement positifs $\lambda_n\big(f(y-a_n) - f(x-a_n)\big)$ (vu que f est strictement croissante et les λ_n sont strictement positifs) donc est strictement positif. Ainsi, la fonction F est strictement croissante. Sa restriction à chaque compact de $\mathbf{R}$ est continue comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues. Donc F est continue.

   (c) Posons $\mathrm{G}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda_n f(x-a_n)$. De même que F, la fonction G est strictement croissante. Pour $x > a_0$, on a $\mathrm{G}(x) > \mathrm{G}(a_0)$, donc $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a_0) = \lambda_0 f(x-a_0) + \mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(a_0) > \lambda_0 f(x-a_0)$; pour $x < a_0$, on trouve de même $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a_0) = \lambda_0 f(x-a_0) + \mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(a_0) < \lambda_0 f(x-a_0)$.

   (d) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x-a_0) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x-a_0) = -\infty$. Comme pour $x > a_0$ on a $\mathrm{F}(x) > \mathrm{F}(a_0) + \lambda_0 f(x-a_0)$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = +\infty$. De même $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{F}(x) = -\infty$

   (e) L'application F est strictement croissante donc injective ; comme elle est continue, son image est un intervalle ; par (d) elle n'est ni majorée ni minorée, donc son image est $\mathbf{R}$. En d'autres termes elle est surjective, donc bijective.

2. Pour $x, x_0 \in \mathbf{R}$ tels que $x \neq x_0$, on a $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda_k(f(x-a_k) - f(x_0-a_k))$, donc

$$\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \frac{f(x-a_k) - f(x_0-a_k)}{x - x_0}.$$

Or, comme f est croissante, cette série est à termes positifs, donc sa somme majore ses sommes partielles. Autrement dit, pour $n \in \mathbf{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \leq \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0}.$$

3. Comme $f'(0) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to a_n} \dfrac{f(x-a_n)}{x-a_n} = +\infty$. Or

$$\lambda_n \frac{f(x-a_n)}{x-a_n} \leq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k) - f(a_n - a_k)}{x - a_n} \leq \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a_n)}{x - a_n}.$$

Donc $\lim\limits_{x \to a_n} \dfrac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a_n)}{x - a_n} = +\infty$. Donc F est dérivable au sens généralisé en a_n et $\mathrm{F}'(a_n) = +\infty$.

4. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction $g : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f(x - a_k)$ est dérivable en x_0 et sa dérivée vaut $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x-a_k)$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, si $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, alors $\left|\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0)\right| \leq 1$ et en particulier $1 + \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \dfrac{f(x-a_k) - f(x_0-a_k)}{x - x_0} \geq \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x-a_k)$.

   (b) Soit $\mathrm{M} \in \mathbf{R}_+$. Comme la série de terme général (positif) $(\lambda_n f'(x_0 - a_n))$ est supposée divergente, il existe n tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x-a_k) \geq \mathrm{M} + 1$. Par (a), il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$ satisfaisant $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, on ait $1 + \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \dfrac{f(x-a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geq \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k)$; dans ce cas, on a

$$\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0} \geq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k) - f(x_0-a_k)}{x - x_0} \geq -1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x_0 - a_k) \geq \mathrm{M}.$$

   Cela démontre que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0} = +\infty$, autrement dit que F est dérivable au sens généralisé en x_0 et $\mathrm{F}'(x_0) = +\infty$.

5. (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $x \neq x_0$, on a d'après I.B.2.(b)

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k \frac{f(x-a_k) - f(x_0-a_k)}{x - x_0} \leq 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k),$$

   soit

$$\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0} \leq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k) - f(x_0-a_k)}{x - x_0} + 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k).$$

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série de terme général $\lambda_n f'(x_0 - a_n)$ est convergente, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k) < \varepsilon/4$. Posons $\beta = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k)$ et notons g l'application $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f(x - a_k)$. L'application g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x_0 - a_k)$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour $x \in \mathbf{R}$ satisfaisant $0 < |x - x_0| < \alpha$ on ait $\left|\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0)\right| \leq \varepsilon/4$. Alors d'après les questions 2. et 5.(a) on a

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + 4\beta.$$

Posons $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k) = g'(x_0) + \beta$. On a

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \geq g'(x_0) - \varepsilon/4 \geq \ell - \varepsilon/2,$$

et

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + 4\beta \leq g'(x_0) + \varepsilon/4 + 4\beta = \ell + \varepsilon/4 + 3\beta \leq \ell + \varepsilon.$$

Il vient $\ell - \varepsilon/2 \leq \dfrac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0} \leq \ell + \varepsilon$.

On a donc démontré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$ satisfaisant $0 < |x - x_0| < \alpha$, on ait

$$\Big|\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0} - \ell\Big| \leq \varepsilon.$$

Donc F est dérivable en x_0 et $\mathrm{F}'(x_0) = \ell$.

6. D'a près les questions 3, 4 et 5, la fonction F est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbf{R}$. D'après la question I.A.1. la fonction réciproque F^{-1} de F est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbf{R}$; de plus, pour $x \in \mathbf{R}$, si $\mathrm{F}'(x) \neq +\infty$, alors $\mathrm{F}'(x) \geq \lambda_0 f'(x - a_0) > 0$, donc F' ne s'annule pas. Donc $(\mathrm{F}^{-1})'$ est partout fini. En d'autres termes F^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbf{R}$.

III. Parties denses de R

A. Intersections d'ouverts denses.

1. (a) Démontrons l'existence de u_n et v_n par récurrence sur n . Comme V_0 est ouvert et dense et I est ouvert et non vide, l'ensemble $\mathrm{V}_0 \cap \mathrm{I}$ est ouvert dans $\mathbf{R}$ et non vide, donc il contient un segment $[u_0, v_0]$.

   Supposons u_n et v_n construits. Comme V_{n+1} est ouvert et dense et $]u_n, v_n[$ est ouvert et non vide, l'ensemble $\mathrm{V}_{n+1} \cap]u_n, v_n[$ est ouvert et non vide, donc il contient un segment $[u_{n+1}, v_{n+1}]$.

   (b) La suite u_n est croissante et la suite v_n est décroissante. Comme $u_n < v_n < v_0$ la suite u_n est majorée donc convergente. Soit u sa limite. De même la suite v_n est décroissante et minorée donc convergente. Soit v sa limite. Comme pour tout n on a $u_n < v_n$, il vient $u \leq v$. Comme u_n est croissante et v_n décroissante, on a $u_n \leq u \leq v \leq v_n$. Donc pour tout n , on a $u \in [u_n, v_n]$. En particulier $u \in [u_0, v_0]$ donc $u \in \mathrm{I}$ et $u \in [u_n, v_n] \subset \mathrm{V}_n$. Donc $u \in \mathrm{I} \cap \mathrm{B}$. Cela prouve que $\mathrm{I} \cap \mathrm{B}$ n'est pas vide.

2. Comme l'ensemble B rencontre tout ouvert non vide de $\mathbf{R}$, il est dense dans $\mathbf{R}$.

3. L'ensemble $\mathrm{V}'_n = \mathrm{V}_n \cap \mathbf{R} - \{x_n\}$ est ouvert et dense, donc $\mathrm{B}' = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{V}'_n$ est dense dans $\mathbf{R}$. Or $\mathrm{B}' = \mathrm{B} - \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$.

B. Parties contenant des « gros compacts »

1. (a) Comme $c_k \in \mathrm{I}_k$, les ouverts I_k recouvrent C . Comme C est compact, un nombre fini de I_k recouvrent C , donc il existe un nombre $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathrm{C} \subset \bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{I}_k$.

   (b) Pour $k \in \mathbf{N}$, notons $h_k : x \mapsto \max(0, \alpha_k - |x - c_k|)$; posons $h = \sum_{k=0}^{n} h_k$. La fonction h est continue et positive et l'ensemble des points en lesquels elle n'est pas nulle est $\bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{I}_k$. En particulier, elle ne s'annule pas sur C. Posons $m = \inf\{h(x);\ x \in C\}$. Comme C est compact, cet « inf » de la fonction h est atteint, donc $m > 0$. Posons alors $g(x) = \min\left(1, \dfrac{h(x)}{m}\right)$. La fonction g est continue et

– pour tout $x \in C$, on a $h(x) \geq m$, donc $g(x) = 1$;

– pour tout $x \notin \bigcup_{k=0}^{n} I_k$, on a $h(x) = 0$, donc $g(x) = 0$.

Notons χ_k la fonction qui vaut 1 sur I_k et 0 ailleurs et $\varphi = \sum_{k=0}^{n} \chi_k$. La fonction φ est en escalier ; pour $x \notin \bigcup_{k=0}^{n} I_k$ on a $g(x) = \varphi(x) = 0$; pour $x \in I_k$; on a $g(x) \leq 1 = \chi_k(x) \leq \varphi(x)$. Donc $g \leq \varphi$. Or $\int_a^b \chi_k(t)dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_k(t)dt = 2\alpha_k$. On trouve

$$\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b \varphi(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b \chi_k(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} 2\alpha_k < \varepsilon.$$

2. (a) Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$. Par hypothèse, il existe un compact $C \subset A \cap [a,b]$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour toute fonction continue $g : [a,b] \to [0,1]$ satisfaisant $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$ on ait $\int_a^b g(t)\,dt \geq \varepsilon$. D'après 1, C n'est pas dénombrable, donc $A \cap [a,b]$ non plus.

   (b) Soit D une partie dénombrable de A. Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{R}$; il contient un segment $[a,b]$ avec $a < b$. Comme $[a,b] \cap A$ n'est pas dénombrable, l'intersection $[a,b] \cap A$ n'est pas contenue dans D, donc $(A - D) \cap U \neq \emptyset$. Cela démontre que l'ensemble $A - D$ est encore dense dans $\mathbf{R}$.

IV. Les points de pente infinie

A. Densité des points de pente infinie.

1. (a) Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a $0 \leq \lambda_n g_T(x - a_n) \leq \lambda_n T$. Comme la série de terme général $\lambda_n T$ est convergente, la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n g_T(x - a_n)$ est normalement convergente. En particulier la série de terme général $\lambda_n g_T(x - a_n)$ converge.

   (b) On a $g_T(0) = T$ et, pour $x \in \mathbf{R}^*$, on a $g_T(x) = \inf\left(T, \dfrac{|x|^{-2/3}}{3}\right)$. La fonction g_T est continue sur $\mathbf{R}^*$ (comme « inf » de deux fonctions continues) et égale à T au voisinage de 0 : elle est continue sur $\mathbf{R}$. La fonction G_T est somme d'une série normalement convergente de fonctions continues : elle est continue.

   (c) On a vu que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $F'(x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda_n f'(x - a_n)$, au sens que si un des termes de la série vaut $+\infty$ ou si cette série à termes positifs diverge, on écrit $\sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda_n f'(x - a_n) = +\infty$.

   Comme pour tout x, tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $T \in \mathbf{R}_+^*$ on a $g_T(x - a_n) \leq f'(x - a_n)$, on a $\sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda_n g_T(x - a_n) \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda_n f'(x - a_n)$, soit $G_T(x) \leq F'(x)$. Comme cela a lieu pour tout T, on trouve $\sup\{G_T(x);\ T \in \mathbf{R}_+\} \leq F'(x)$.

   Soient $x \in \mathbf{R}$ et $M \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $M < F'(x)$. Alors M ne majore pas les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k)$, donc il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k) > M$. Si x est égal à un des a_k avec $0 \leq k \leq n$, alors, pour $T = \dfrac{M+1}{\lambda_k}$, on a $\lambda_k g_T(x - a_k) = M + 1$, donc $G_T(x) > M$; sinon, pour $\mathrm{T}=\max\{f'(x-a_k);\ 0\leq k\leq n\}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} g_{\mathrm{T}}(x-a_k)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f'(x-a_k)>\mathrm{M}$. Dans tous les cas, on a trouvé $\mathrm{T}\in\mathbf{R}_+$ tel que $\mathrm{G_T}(x)>\mathrm{M}$, donc $\sup\{\mathrm{G_T}(x);\ \mathrm{T}\in\mathbf{R}_+\}>\mathrm{M}$. Cela étant vrai pour tout $\mathrm{M}<\mathrm{F}'(x)$, on a $\sup\{\mathrm{G_T}(x);\ \mathrm{T}\in\mathbf{R}_+\}\geq\mathrm{F}'(x)$.

2. (a) Soit $x\in\mathbf{R}$. S'il existe $\mathrm{T}\in\mathbf{R}_+$ tel que $\mathrm{G_T}(x)>\mathrm{M}$, alors $\mathrm{F}'(x)\geq\mathrm{G_T}(x)>\mathrm{M}$, donc $x\in\mathrm{U_M}$. Si $x\in\mathrm{U_M}$, alors $\mathrm{F}'(x)>\mathrm{M}$, et comme $\mathrm{F}'(x)=\sup\{\mathrm{G_T}(x);\ \mathrm{T}\in\mathbf{R}_+\}$, M ne majore pas $\{\mathrm{G_T}(x);\ \mathrm{T}\in\mathbf{R}_+\}$, donc il existe $\mathrm{T}\in\mathbf{R}_+$ tel que $\mathrm{G_T}(x)>\mathrm{M}$.

   (b) Pour tout $\mathrm{T}\in\mathbf{R}_+$, la fonction $\mathrm{G_T}$ est continue, donc l'ensemble $\{x\in\mathbf{R};\ \mathrm{G_T}(x)>\mathrm{M}\}$ est ouvert ; la réunion $\mathrm{U_M}=\displaystyle\bigcup_{\mathrm{T}\in\mathbf{R}_+}\{x\in\mathbf{R};\ \mathrm{G_T}(x)>\mathrm{M}\}$ est donc ouverte. Or pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a $\mathrm{F}'(a_n)=+\infty$. Donc $\mathrm{D}\subset\mathrm{U_M}$ et $\mathrm{U_M}$ est dense.

3. On a $\mathrm{A}=\{x\in\mathbf{R};\ \mathrm{F}'(x)=+\infty\}=\{x\in\mathbf{R};\ \forall\mathrm{M}\in\mathbf{N},\ \mathrm{F}'(x)>\mathrm{M}\}=\displaystyle\bigcap_{\mathrm{M}\in\mathbf{N}}\mathrm{U_M}$. Comme pour tout $\mathrm{M}\in\mathbf{N}$, l'ensemble $\mathrm{U_M}$ est ouvert et dense, l'intersection A est dense dans $\mathbf{R}$, et comme D est dénombrable $\mathrm{A}-\mathrm{D}$ est encore dense dans $\mathbf{R}$ (d'après III.A).

B. Densité de l'ensemble des points de pente finie.

1. Soient $a,b\in\mathbf{R}$ tels que $a<b$. Soit $\mathrm{M}\in\mathbf{R}_+^*$. Posons $\mathrm{C}=\{x\in[a,b];\ x\notin\mathrm{U_M}\}$. Soit $g:[a,b]\to[0,1]$ une fonction continue telle que $g(t)=1$ pour tout $x\in\mathrm{C}$. Pour tout $x\in[a,b]$, on a $g(x)=1$ ou $\mathrm{F}'(x)>\mathrm{M}$, donc $\mathrm{M}g(x)+\mathrm{F}'(x)\geq\mathrm{M}$. Posons alors $\Phi(x)=\mathrm{M}\displaystyle\int_a^x g(t)dt+\mathrm{F}(x)$. La fonction Φ est continue sur $[a,b]$ dérivable au sens généralisé en tout point de $]a,b[$ et $\Phi'(x)=\mathrm{M}g(x)+\mathrm{F}'(x)\geq\mathrm{M}$; il vient $\Phi(b)-\Phi(a)\geq\mathrm{M}(b-a)$ (d'après I.A.2.(b)) soit $\displaystyle\int_a^b \mathrm{M}g(t)\,dt+\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)\geq\mathrm{M}(b-a)$.

2. Soient $a,b\in\mathbf{R}$ et $\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$ tels que $a+\varepsilon<b$. Posons $\mathrm{M}=\dfrac{\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)}{b-a-\varepsilon}$ et $\mathrm{C}=\{x\in[a,b];\ x\notin\mathrm{U_M}\}\subset\mathrm{B}\cap[a,b]$. D'après la question précédente, pour toute fonction continue $g:[a,b]\to[0,1]$ satisfaisant $g(x)=1$ pour tout $x\in\mathrm{C}$ on a
$\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt\geq b-a-\frac{\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)}{\mathrm{M}}=\varepsilon$. D'après III.B, pour toute partie dénombrable $\mathrm{N}\subset\mathbf{R}$, l'ensemble $\mathrm{B}-\mathrm{N}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

4.2.3 Commentaires sur la deuxième épreuve écrite

Objet du problème

Pour construire une fonction strictement croissante sur $\mathbf{R}$, dérivable et dont la dérivée s'annule en tout point d'un ensemble dense dans $\mathbf{R}$, le sujet faisait construire sa bijection réciproque. Cette bijection réciproque F devait avoir une « dérivée au sens généralisé » infinie sur une partie dense de $\mathbf{R}$. Cette « dérivabilité au sens généralisé » était définie par l'énoncé. La première partie demandait de redémontrer des résultats classiques d'analyse des fonctions réelles d'une variable réelle dans ce cadre élargi et traitait l'exemple de la fonction racine cubique. La deuxième partie construisait la fonction F. On démontrait dans la partie III des résultats sur les parties denses de $\mathbf{R}$, pour enfin dans la partie IV prouver que les ensembles des points de pente finie et de pente infinie de F étaient tous deux gros : on démontrait de fait que les points de pente infinie forment un G_δ dense, négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Partie I

Dans la partie A, il s'agissait de démontrer qu'en prenant comme fonction « dérivable au sens généralisé » en a une fonction continue en a et telle que le taux d'accroissement en a, a une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$, on pouvait retrouver des résultats classiques sur les fonctions bijectives dérivables, sur les extrema des fonctions dérivables, un théorème de Rolle et une formule des accroissements finis élargis, ainsi qu'un théorème de prolongement des applications dérivables.

Dans toute cette partie, il n'était pas suffisant de rappeler le théorème correspondant pour les fonctions dérivables et d'invoquer la convention $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ et $\dfrac{1}{0} = +\infty$ pour conclure hâtivement. Une convention ne peut servir qu'à alléger une écriture. Avant d'utiliser par exemple $\dfrac{1}{0} = +\infty$, il faut prouver que le dénominateur tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Pour prouver que la dérivée est nulle en un extremum, il faut écarter, en le justifiant, une éventuelle valeur infinie de la limite du taux d'accroissement. Le plus innocent des énoncés (par exemple : la somme de deux fonctions dérivables est dérivable) ne se laisse pas généraliser si facilement : la somme de deux fonctions admettant une dérivée généralisée n'admet pas forcément une dérivée généralisée, puisqu'il peut se présenter des formes indéterminées $(+\infty) + (-\infty)$.

On peut voir sur ces exemples non exhaustifs que cette première partie demandait un travail de précision que trop de candidats ont malheureusement mal évalué, soit parce qu'ils n'ont pas vu les difficultés posées par la définition de la dérivabilité généralisée, soit parce que les ayant vues, ils les ont traitées par généralisation hâtive des résultats correspondants sur les fonctions dérivables.

Signalons aussi que, dans la première question, il était nécessaire de remarquer immédiatement qu'une bijection croissante entre deux intervalles de la droite réelle est continue ainsi que la bijection réciproque.

Dans la partie B, il s'agissait d'appliquer les résultats du A à la fonction racine cubique, ce qu'ont convenablement réussi deux bons tiers des candidats. D'autres ont préféré réinvestir des connaissances sur les puissances à exposants fractionnaires, en oubliant trop souvent que les puissances à exposants fractionnaires ne sont définies que sur $]0, +\infty[$.

La partie C a été mieux réussie dans l'ensemble, si l'on excepte la question 2, qui demandait elle aussi une bonne précision dans l'énoncé des théorèmes utilisés et dans les encadrements menant au calcul de la limite de la suite $(a_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$.

Partie II

La fonction F était définie comme une somme de série de fonctions, uniformément convergente sur tout compact de $\mathbf{R}$, mais pas nécessairement normalement convergente sur tout compact. Quelques rares candidats ont vu dans la première question, qu'on pouvait l'écrire comme somme d'une série numérique dont on savait seulement qu'elle était convergente, et d'une série normalement convergente sur tout compact. Les autres candidats ayant abordé cette question ont mal usé des valeurs absolues, ou fait disparaitre la dépendance en x au détour d'une majoration de façon à obtenir la convergence normale.

La suite de cette partie, bien détaillée n'a pas posé de problèmes majeurs aux candidats.

Partie III

On démontrait dans le A le théorème de Baire (dans $\mathbf{R}$). Cette partie a attiré un petit nombre de candidats, plus à l'aise avec des techniques de topologie qu'avec les manipulations sur les dérivées et leur a permis de gagner des points. La construction du *premier terme* des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a été comprise par un nombre significatif de candidats. La construction du n-ième terme de ces suites n'est pas essentiellement différente. Mais il n'étonnera personne qu'on attend mieux qu'un : « et ainsi de suite » pour conclure une construction par récurrence.

La partie B, dans laquelle on étudiait des « gros compacts » (*i.e.* des compacts non négligeables pour la mesure de Lebesgue) n'a été abordée que par un nombre très faible de candidats qui l'ont alors traitée avec succès.

Partie IV

Il s'agissait ici d'appliquer les résultats prouvés dans la partie III à la fonction F. Cependant, peu de candidats l'ont atteinte.

Épreuves orales

5 Rapport sur les épreuves orales

5.1 Considérations générales

5.1.1 Session 2007

Le jury est, cette année encore, relativement satisfait de la prestation orale des candidats admissibles. Après les épreuves orales, la qualité des prestations a permis de pourvoir tous les postes offerts au concours d'agrégation. Pour le CAERPA, le nombre des admissibles continue à diminuer sensiblement depuis deux années et le nombre d'admis s'est effondré lors de la présente session, alors que le nombre de candidats inscrits reste stable. Il n'a été possible de pourvoir que le quart des contrats offerts au concours.

5.1.2 Déroulement des épreuves

Chacune des deux épreuves comporte un temps de préparation de trois heures. Les candidats reçoivent une convocation aux épreuves d'admission mentionnant l'heure du début de la préparation (se présenter un quart d'heure avant), ainsi que l'heure de passage devant la commission d'oral pour chacune des deux épreuves. En règle générale, les jours de passage sont deux jours consécutifs. Noter que le jury siège les dimanches et jours fériés.

Le premier jour, le candidat choisit une enveloppe qui contient un choix de deux sujets d'exposés. Ces deux sujets sont du même grand groupe, soit algèbre et géométrie, soit analyse et probabilités. Pendant la préparation, le candidat choisit le sujet qu'il va traiter ; il est peu stratégique d'hésiter trop longtemps entre les deux sujets.

Le deuxième jour (en général), le candidat choisit une enveloppe contenant un choix de deux sujets de l'épreuve d'exercices. Ces deux sujets sont du grand groupe que le candidat n'a pas tiré lors de l'épreuve d'exposé.

Le jury veille à ce que les sujets de chaque couplage soient suffisamment différenciés pour qu'il y ait un vrai choix.

5.1.3 Evolution du concours

Le rapport de la session 2005 avait annoncé une certaine évolution de la première épreuve orale. Depuis la session 2006, on a introduit dans la liste des titres d'exposés des sujets plus larges que les sujets habituellement posés. L'introduction des « leçons de synthèse » a entraîné bien entendu la suppression d'un certain nombre des leçons plus spécialisées qui étaient précédemment proposées.

Ces sujets plus larges sont facilement identifiables dans les listes qui suivent. Ils doivent être traités dans les mêmes conditions que les autres sujets, c'est-à-dire que l'épreuve comprend bien trois parties (plan, développement, questions des examinateurs) comme indiqué ci-dessous.

Le plan prendra plus la forme d'un exposé que d'une leçon. Ainsi, le candidat qui traite le sujet sur la trigonométrie pourra suivre cette notion dans les programmes de l'enseignement du second degré pour conclure sur les définitions rigoureuses utilisant les séries entières, ou bien suivre un processus inverse.

Il n'est aucunement demandé aux candidats un exposé exhaustif de ces questions larges en quinze minutes. L'objectif de ces sujets n'est pas de favoriser une préparation au concours par bachotage. Il s'agit au contraire de permettre aux professeurs en exercice de valoriser leur expérience et leur réflexion pédagogique.

Le développement doit répondre aux critères généraux indiqués ci-dessous. Ce doit être un développement rigoureux et significatif d'un point particulier cohérent avec le sujet.

Les thèmes de la seconde épreuve ne sont pas changés. Mais là encore, l'expérience et la compétence pédagogique doivent se valoriser dans la présentation d'une séance d'exercice.

5.1.4 Préparation aux épreuves et documents

Pendant la préparation, tout document personnel est interdit. Seuls sont autorisés les livres et revues en vente libre dans le commerce. Les candidats peuvent utiliser les livres de la bibliothèque qui est mise à leur disposition, et dont l'inventaire figure en fin de ce rapport. Ils peuvent aussi utiliser leurs livres personnels à condition que ces livres ne soient pas annotés. Lors des trois heures de préparation, les candidats sont libres, à tout moment, de consulter ou d'emprunter des livres à la bibliothèque ou de prendre dans leurs bagages les livres qu'ils ont apportés.

Les calculatrices de poches sont considérées comme des document personnels et sont, à ce titre, interdites. Cependant, selon le sujet traité, l'usage d'une calculatrice peut être autorisé par le président du jury, ou son représentant, à condition que le candidat justifie de son utilisation lors de la présentation de l'exposé ou des exercices devant la commission d'oral.

5.2 La première épreuve orale

Cette épreuve comprend trois parties : le plan, le développement, puis les questions du jury. Chacune dure un quart d'heure. Elle est précédée d'une préparation de trois heures. Avant de faire des commentaires spécifiques à chacune des phases de l'épreuve, commençons par des remarques d'ordre général.

Il est conseillé de bien lire et comprendre le sujet. Il vaut mieux éviter de se disperser en cherchant dans un trop grand nombre d'ouvrages. Il faut bien sûr maîtriser les résultats du programme de l'agrégation correspondant au sujet traité, mais si un candidat, pour une application ou une comparaison de méthodes, évoque d'autres outils du programme, il est nécessaire qu'il les connaisse aussi.

Les deux premières parties de l'épreuve (plan et exposé) se déroulent sans interruption ; les questions ne débutent qu'ensuite et portent en premier lieu sur ce qui vient d'être présenté. Ce mode de fonctionnement impose au candidat de faire tenir l'intégralité de son plan et de son développement sur le tableau (recto verso si le tableau le permet). Il y a bien assez de place à condition de gérer correctement le tableau.

Le plan

En voici le principe : en quinze minutes, il s'agit de faire un exposé structuré sur le sujet choisi : définitions, énoncés clairs et précis, exemples, contre exemples, applications. . .Cela doit ressembler à un cours magistral dans lequel on ne présente toutefois aucune démonstration. Il doit être conforme au programme de l'agrégation interne.

Le candidat n'est pas obligé d'être exhaustif sur le sujet, mais il est souhaitable qu'il puisse expliquer ses choix. Le jury attend avant tout un exposé logique avec des énoncés complets et exacts, des définitions et théorèmes (qu'il ne faut pas confondre) et une présentation rendue attrayante par l'intérêt porté par le candidat au sujet, par de nombreux exemples et quelques figures. Mais il est important aussi de montrer que l'on a compris l'utilité et la portée du chapitre en donnant des applications, surtout si le titre de la leçon le demande explicitement.

Le candidat doit gérer l'espace, le tableau, et la durée de quinze minutes. Beaucoup de candidats restent dix minutes sur des généralités avant de « bâcler au sprint » les résultats importants ou les applications. Les abréviations sont tolérées, on peut s'abstenir d'écrire quelques résultats proches d'autres résultats déjà mentionnés, mais les propositions et les définitions doivent être intégralement écrites au tableau « prêtes à être apprises par des élèves ». L'énoncé oral des prérequis est possible : en modérer la longueur.

Le candidat peut consulter ses notes personnelles en cours d'exposé, mais ne peut se contenter de les recopier !

Il termine son exposé en indiquant le point qu'il se propose de développer dans la deuxième partie. Il est déconseillé d'attendre ce moment pour prendre une décision et de montrer aux examinateurs des hésitations sur ce choix

Le plan, comme le développement, ne peuvent se limiter à un compte rendu de lecture d'un ouvrage, si bon que soit cet ouvrage. C'est ainsi qu'il est fortement déconseillé aux candidats de se servir d'ouvrages se présentant comme des recueils de leçons modèles à l'usage des concours. Les examinateurs sont rarement dupes et arrivent, notamment lors des questions au candidat, à vérifier les connaissances du candidat et sa compréhension réelle du sujet.

Par ailleurs, le jury est plus indulgent pour un plan de niveau mathématique modeste, mais bien maîtrisé, que pour un exposé plus ambitieux que le candidat récite par cœur sans en avoir compris les articulations. Cela dit, l'exposé ne peut pas non plus se cantonner au niveau de conceptualisation d'une séance de collège. Un exposé sur le cercle ne peut rester au niveau de la classe de sixième. Un exposé sur les congruences ne peut se limiter à la divisiblité des nombres entiers traitée au niveau du collège.

L'exposé des prérequis et des notations est indispensable dans la plupart des leçons. Parfois, le choix de prérequis trop forts vide la leçon de son sens. Ainsi, un candidat qui traite une leçon *Trigonométrie* ne peut admettre en prérequis les formules d'Euler et se contenter d'en déduire les relations d'addition de la trigonométrie réelle. Les candidats doivent aussi prendre garde que le sujet choisi peut être traité dans certains manuels au long de plusieurs chapitres. Ainsi, dans la leçon sur la dimension des espaces vectoriels, admettre en prérequis que si l'espace vectoriel est engendré par n vecteurs, toute famille libre compte au plus n vecteurs, c'est évacuer un point faisant partie intégrante de la leçon.

Le développement

Le candidat a le choix de développer une démonstration, un exemple ou une application. Ce choix doit être consistant, cohérent avec le niveau de l'exposé et pouvoir être présenté en quinze minutes. Il doit porter sur une partie significative de l'exposé : un même développement, bien préparé pendant l'année, peut servir dans plusieurs leçons, mais pas dans toutes. Ainsi, les intégrales de Wallis ne constituent pas le développement souhaité dans la leçon sur le calcul d'aires et de volumes. Le théorème sur l'uniforme continuité des fonctions définies et continues sur un espace compact s'applique évidemment aux fonctions continues sur une partie compacte de $\mathbf{R}^n$, mais ce n'est sans doute pas le cœur de la leçon.

Pendant cette phase le candidat doit mettre en valeur ses qualités pédagogiques, il doit travailler sans notes ; il a compris ce qu'il expose et le rend compréhensible à son auditoire :

- il commence par expliquer les idées importantes de la démonstration avant de rentrer dans les détails techniques,
- il s'appuie le plus possible sur des figures, et pas seulement en géométrie,
- il insiste sur les points difficiles,
- il montre qu'il a bien compris le rôle de chacune des hypothèses

Nous conseillons aux candidats de préparer soigneusement cette partie.

Les questions du jury

Le candidat doit avoir conscience que, par ses questions, le jury ne cherche qu'à

- corriger une erreur commise, rectifier une imprécision dans le plan ou une démonstration,
- contrôler si la démonstration est comprise ou seulement récitée, par exemple en variant les hypothèses,
- vérifier que le candidat a une maîtrise suffisante des sujets abordés : par exemple un candidat qui a énoncé le théorème de Heine ne devrait pas avoir de difficulté à démontrer que la fonction *sinus* est uniformément continue sur toute la droite,
- donner au candidat l'occasion de montrer ses connaissances sur d'autres aspects du sujet ou des applications, en restant dans le cadre du programme.

On ne demande pas à un candidat qui vient de passer déjà plus de trente minutes d'épreuve devant un jury d'improviser la résolution d'un exercice.

Ainsi, le candidat ne doit pas se laisser démonter par ces questions, leur seul but est de lui permettre de se valoriser.

Choix des leçons

Cette année, un plus grand nombre de candidats que l'an dernier ont choisi les sujets des leçons de synthèse. Les candidats qui ont choisi l'un de ces sujets ont eu des prestations de niveau varié, certaines très bonnes, mais, dans beaucoup de cas, médiocres faute d'une structuration pertinente du plan et faute aussi, sans doute, de l'habitude de présenter un ensemble bien articulé de savoirs.

Comme les années précédentes, le jury a constaté une réticence de la part d'un bon nombre de candidats à choisir une leçon de géométrie ou de calcul des probabilités. C'est regrettable car la préparation au concours interne d'agrégation pourrait être l'occasion pour les professeurs de mettre à jour leurs connaissances dans ces deux domaines qui ont une place importante dans les programmes actuels de l'enseignement secondaire.

5.3 La seconde épreuve orale

Déroulement de l'épreuve

Cette épreuve, comme la précédente, dure 45 minutes au maximum et elle est précédée de trois heures de préparation.

A son arrivée, le candidat tire au sort une enveloppe comportant deux thèmes d'exercices et choisit l'un d'entre eux. Il dispose alors de trois heures pendant lesquelles il peut librement consulter les ouvrages mis à sa disposition par la bibliothèque de l'agrégation, ou bien ceux qu'il aura pris soin d'apporter avec lui.

Pendant sa préparation, le candidat sélectionne trois à six exercices correspondant au thème retenu et rédige un document comportant la liste des énoncés, ainsi que les motivations et remarques correspondantes. A l'issue de la préparation, des photocopies de ce document sont réalisées par les appariteurs ; ces photocopies sont remises aux examinateurs et l'épreuve orale proprement dite peut alors commencer.

L'épreuve se déroule alors en trois temps :

1) Présentation motivée de l'ensemble des exercices sélectionnés par le candidat (durée maximale de 15 minutes).

2) Résolution commentée d'un des exercices au choix du candidat parmi ceux qu'il vient de présenter (durée maximale de 15 minutes).

3) Questions du jury (durée minimale de 15 minutes).

Présentation motivée des exercices

Il s'agit d'expliquer les raisons qui ont conduit au choix des exercices. Celles-ci peuvent être d'ordre pédagogique ou d'ordre mathématique, l'un n'excluant évidemment pas l'autre. Voici quelques suggestions quant aux motivations possibles :

Objectif : Il est important d'indiquer à quel public s'adressent les exercices et ce qu'ils supposent connu de ce public. Il faut également décrire quel est l'objectif de chaque exercice : illustration ou complément d'un résultat de cours, entraînement à une technique de calcul particulière, mise en évidence d'une propriété remarquable, ... On peut préciser la nature du travail de l'élève (exercice d'entraînement, de réinvestissement, d'évaluation, de recherche...) ainsi que les apprentissages visés.

Niveau : Les difficultés éventuelles d'un énoncé doivent être soulignées. Le souci de graduer ces difficultés ou d'aider à les surmonter par des indications appropriées constitue un aspect possible de la présentation des exercices.

Cohérence : Les énoncés ne doivent pas constituer une collection hétéroclite : leur ensemble doit posséder un certain degré de cohérence, variable selon les sujets. Indiquer les connexions pouvant relier certains énoncés est une démarche appréciée. Penser à indiquer la place de ces exercices dans une séquence d'enseignement.

Intérêt : Un exercice peut apporter un éclairage particulier sur une notion, ou laisser entrevoir un développement de celle-ci ou encore en donner une application pertinente. De tels critères peuvent être mis en avant pour justifier du choix d'un exercice. Lorsqu'il existe diverses méthodes pour résoudre un problème donné, un exercice peut avoir pour objectif d'en comparer certaines, ne serait-ce que sur des exemples. Ceci peut également constituer une motivation intéressante.

Bien souvent, les candidats n'ont pas pris la peine de réfléchir à cette première partie de leur oral et se contentent de donner lecture de leurs énoncés en quelques minutes. D'autres encore, pratiquent avec plus ou moins de conviction la stratégie du « remplissage », qui consiste à occuper au mieux les quinze minutes dont ils disposent, en diluant la présentation de leurs exercices à grands coups de phrases creuses comme « J'ai choisi de vous proposer tel exercice parce que je le trouvais intéressant », ou bien « Tel exercice conduit à la démonstration de tel résultat, ce qui est bien pratique ». D'autres enfin, se contentent d'énoncer quelques théorèmes en rapport avec les exercices : ce n'est pas cela non plus qui est attendu.

Une autre erreur à éviter est le hors sujet : le candidat doit veiller à ce que les exercices qu'il propose entrent bien dans le cadre délimité par le titre du sujet. De plus, si l'intitulé est du type « Exercices faisant intervenir telle notion ... », il faut bien comprendre qu'on ne demande pas de simples exercices d'entraînement sur la notion en question. A titre d'exemple, si l'intitulé est « Exercices faisant intervenir des déterminants », on ne saurait se limiter au calcul de quelques déterminants. On attend en revanche des exercices montrant diverses utilisations de cette notion (à titre indicatif : résolution des systèmes de Cramer, calcul des valeurs propres d'un endomorphisme à l'aide du polynôme caractéristique, déterminants de Gram, calcul de la distance d'un point à un sous-espace de dimension finie, jacobien et caractérisation des difféomorphimes, caractérisation de la positivité des matrices symétriques réelles et application à la convexité d'une fonction numérique de plusieurs variables réelles par sa matrice Hessienne, etc.).

Motiver le choix d'une liste d'exercices, c'est expliquer la pertinence de ce choix, préciser les prérequis, situer les exercices dans leur contexte, commenter leur apport sur le plan pédagogique ... tout ceci doit faire l'objet d'une réflexion personnelle et d'un réel questionnement.

Certains candidats présentent très honorablement cette première partie de l'épreuve, et mettent ainsi en valeur leurs compétences pédagogiques et leurs acquis professionnels. Il va de soi qu'il en est tenu compte dans la notation de l'épreuve.

Résolution détaillée d'un exercice

À l'issue de la présentation des exercices, le candidat désigne un exercice qu'il se propose de résoudre en détail. Insistons sur le fait que ce choix revient au candidat et non aux examinateurs. Au cours de cette phase, tout comme pour la précédente, les examinateurs n'interviennent pas et le candidat doit faire preuve d'autonomie.

Tout d'abord, la pertinence du choix de l'exercice sera un élément important d'appréciation. Il s'agit de trouver un juste équilibre entre deux situations extrêmes : on voit parfois des candidats énumérer quatre énoncés d'exercices plutôt consistants pour finalement proposer la résolution d'un premier exercice très élémentaire. Ceci est bien sûr à éviter, mais il ne faut pas non plus tomber dans l'excès inverse : on voit aussi des candidats s'engager dans la résolution d'un exercice dont ils n'avaient visiblement pas mesuré la complexité. Présenter un exercice difficile impose qu'on en maîtrise les différents aspects, et cela ne s'improvise pas le jour de l'oral.

Bref : ni trop rudimentaire, ni trop ambitieux !

On doit par ailleurs bien comprendre qu'un exercice ne peut consister en la démonstration d'un théorème du cours. Par exemple, le fait que les seuls idéaux de l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers en sont les sous-groupes $n\mathbf{Z}$ doit raisonnablement faire partie d'un plan de cours sur la divisibilité dans $\mathbf{Z}$, mais ne saurait être proposé en exercice de la seconde épreuve.

Ajoutons encore que certains candidats s'avèrent incapables de fournir un énoncé correct des théorèmes qu'ils utilisent lors de la résolution de leurs exercices. Par exemple, le théorème du changement de variables pour les intégrales multiples est le plus souvent utilisé de manière « formelle », les candidats se trouvant la plupart du temps dans l'incapacité de formuler la moindre hypothèse de validité, y compris dans un cas particulier usuel comme celui des coordonnées polaires. Une telle situation est évidemment dommageable pour le candidat.

Enfin, le jury va évaluer la prestation du candidat en tenant compte de critères mathématiques (clarté de la démonstration, précision des arguments), mais aussi de critères non mathématiques, comme la fluidité de l'élocution et la gestion du tableau. Sur ce dernier point, il est regrettable que certains candidats (heureusement peu nombreux) présentent leurs calculs au tableau de façon véritablement chaotique ; ceci est du plus mauvais effet surtout de la part d'un professeur déjà en fonction. Une écriture lisible, des calculs correctement organisés, un certain équilibre entre les explications données oralement et celles écrites au tableau : ce sont des compétences professionnelles que les épreuves orales évaluent.

Questions du jury

Ces questions peuvent être de plusieurs sortes. Tout d'abord, il est bien souvent demandé au candidat de donner des précisions sur la résolution de l'exercice qu'il a proposé. Ceci permet de corriger d'éventuels lapsus (ou de mettre en évidence une faille dans la démonstration) et de s'assurer que le candidat a réellement saisi les divers aspects de la résolution (en examinant par exemple l'impact d'une modification des hypothèses sur le résultat annoncé). Ensuite, le candidat pourra être questionné sur un autre exercice figurant dans sa liste, ou sur un prolongement de l'un de ces exercices.

Par ailleurs, les examinateurs cherchent à déterminer si les notions apparaissant dans tel ou tel énoncé sont effectivement connues du candidat. En ce sens, le candidat, par un choix d'exercices trop ambitieux, risque d'élever le niveau des questions qui peuvent lui être posées. Il n'est pas recommandé d'évoquer des questions à propos desquelles on n'a aucun recul. Du reste, il n'est pas nécessaire de prendre un tel risque, puisqu'un choix bien équilibré d'exercices de niveau moyen, suivi d'un exposé correctement maîtrisé permettent d'obtenir une bonne note à l'épreuve.

Pour terminer, soulignons clairement que les questions du jury n'ont en aucun cas pour but de déstabiliser le candidat. Elles visent simplement à cerner au mieux l'étendue de ses connaissances afin de le classer, le plus justement possible, par rapport aux autres candidats.

5.4 Liste des sujets de la session 2007

5.4.1 Leçons d'algèbre et géométrie

101 Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.

102 Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.

103 Congruences dans $\mathbf{Z}$, anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

104 Nombres premiers.

105 PGCD, PPCM dans $\mathbf{Z}$, théorème de Bézout. Applications.

106 PGCD dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$, où K est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.

107 Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels.

108 Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang.

109 Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples.

110 Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, polynômes d'endomorphisme.

111 Changements de bases en algèbre linéaire. Applications.

112 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications.

113 Déterminants. Applications.

116 Homothéties-translations. Applications.

118 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.

120 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien (dimension finie). Applications.

122 Formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien (dimension finie). Les généralités sur les formes quadratiques seront supposées connues. Applications géométriques.

123 Nombres complexes et géométrie.

125 Isométries du plan affine euclidien, formes réduites. Applications.

126 Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, formes réduites.

127 Géométrie du triangle.

128 Barycentres. Applications.

130 Droites et plans dans l'espace.

131 Projecteurs et symétries dans un espace affine de dimension finie.

137 Cercles et droites dans le plan affine euclidien.

139 Cinématique du point : vitesse, accélération. Exemples de mouvements. On pourra se limiter aux mouvements plans.

140 Division euclidienne.

142 Utilisation de groupes en géométrie.

143 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.

144 Rang en algèbre linéaire.

145 Utilisation de transformations en géométrie.

146 Coniques.

147 Courbes planes paramétrées.

148 Diverses notions d'angle et leurs utilisations.

149 Équations et géométrie.

150 Matrices symétriques réelles.

151 Formes réduites d'endomorphismes. Applications.

154 Trigonométrie.

155 Systèmes linéaires.

156 Valeurs propres.

5.4.2 Leçons d'analyse et probabilités

201 Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications.

202 Séries à termes réels positifs. Applications.

203 Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi–convergence (les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs étant supposés connus).

204 Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes.

205 Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation des fonctions.

206 Parties compactes de $\mathbf{R}^n$. Fonctions continues sur une telle partie. Exemples.

207 Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.

208 Théorème du point fixe. Applications.

209 Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.

210 Séries entières. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.

212 Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés. Exemples.

213 Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques, nombre π .

215 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.

216 Théorème de Rolle et égalité des accroissements finis. Applications.

217 Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.

218 Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.

219 Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples.

220 Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration de l'erreur.

221 Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$ (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples.

222 Intégrale d'une fonction numérique continue sur un intervalle compact. Propriétés.

223 Intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications.

224 Équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a , b , c sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes.

225 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants ; écriture matricielle. Exemples.

227 Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Fonctions composées.

228 Fonctions différentiables définies sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$. Inégalité des accroissements finis. Applications

229 Suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variable aléatoire de loi binomiale. Approximations de cette loi.

230 Probabilité conditionnelle et indépendance. Couples de variables aléatoires. Exemples.

231 Espérance, variance ; loi faible des grands nombres.

232 Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.

233 Approximation d'un nombre réel. Théorie et méthodes.

234 Équations différentielles.

235 Exponentielles et logarithmes

236 Continuité, dérivabilité pour les fonctions d'une variable réelle.

237 Intégrales et primitives.

238 Le nombre π.

240 Problèmes d'extremums pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.

241 Diverses notions de convergence (on pourra se placer dans des contextes variés). Exemples.

242 Suites de nombres réels.

243 Fonctions numériques de deux variables réelles ; courbes de niveau, gradient.

244 Égalités et inégalités (on pourra s'intéresser aux inégalités de Cauchy-Schwarz, de Parseval...).

245 Équations fonctionnelles.

246 Applications de l'analyse au calcul des grandeurs (aires, volumes...).

247 Limites à l'infini.

5.4.3 Exercices d'algèbre et géométrie

301 Exercices sur les groupes.

302 Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans $\mathbf{Z}$.

303 Exercices faisant intervenir la division euclidienne.

304 Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.

305 Exercices faisant intervenir les nombres premiers.

306 Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM et mettant en œuvre des algorithmes associés.

307 Exercices faisant intervenir des dénombrements.

308 Exercices faisant intervenir les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.

309 Exercices faisant intervenir polynômes et fractions rationnelles sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

310 Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.

311 Exercices faisant intervenir la notion de rang.

312 Exercices faisant intervenir des matrices inversibles.

313 Exercices faisant intervenir des systèmes linéaires.

314 Exercices faisant intervenir des déterminants.

315 Exemples de recherche et d'emploi de vecteurs propres et valeurs propres.

316 Exercices faisant intervenir la réduction des endomorphismes.

317 Exercices sur les endomorphismes diagonalisables.

318 Exercices faisant intervenir des projecteurs ou des symétries.

319 Exemples de méthodes et d'algorithmes de calcul en algèbre linéaire.

320 Exercices sur les isométries vectorielles dans les espaces euclidiens en dimension 2 et en dimension 3.

321 Exercices faisant intervenir la réduction des matrices réelles symétriques.

322 Exercices sur les formes quadratiques.

323 Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.

324 Exercices faisant intervenir des similitudes planes directes ou indirectes.

325 Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimension 2 et en dimension 3.

326 Exercices faisant intervenir la notion de barycentre.

327 Exercices faisant intervenir des applications affines.

329 Exercices sur les aires et les volumes.

330 Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimension 2 et en dimension 3.

331 Exercices sur la cocyclicité.

332 Exercices sur les cercles.

333 Exercices de géométrie plane faisant intervenir des triangles isométriques ou semblables.

334 Exercices sur les coniques.

335 Exemples d'étude de courbes planes.

337 Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).

338 Exercices sur les propriétés métriques des courbes de l'espace.

339 Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.

340 Exemples de groupes en géométrie.

341 Exercices de construction en géométrie plane.

342 Exercices de géométrie faisant intervenir le choix d'un repère.

343 Exercices de cinématique du point.

345 Exercices sur les triangles.

346 Exemples de résolution de problèmes modélisés par des graphes.

5.4.4 Exercices d'analyse et probabilités

401 Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes.

402 Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.

403 Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.

404 Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.

405 Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.

406 Exemples de comportement asymptotique de suites ; rapidité de convergence ou de divergence.

407 Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.

408 Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.

409 Exercices sur les suites de polynômes orthogonaux.

410 Comparaison sur des exemples de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions d'une variable réelle.

411 Exemples d'étude de fonctions définies par une série.

412 Exemples de développements en série entière. Applications.

413 Exemples d'emploi de séries entières ou trigonométriques pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

414 Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.

415 Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une variable réelle.

417 Exemples d'approximations de fonctions numériques ; utilisations.

418 Exemples d'utilisation de développements limités.

419 Exemples d'utilisation d'intégrales pour l'étude de suites et de séries.

420 Exemples d'utilisation de suites ou de séries pour l'étude d'intégrales.

421 Exemples de calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

422 Exemples d'étude d'intégrales impropres.

423 Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.

425 Exemples de calculs d'aires et de volumes.

426 Exemples de calculs d'intégrales multiples.

427 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.

428 Exemples de résolution d'équations différentielles scalaires, linéaires ou non linéaires.

429 Exemples de résolution de systèmes différentiels linéaires.

430 Exemples d'équations différentielles issues des sciences expérimentales ou de l'économie.

431 Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une variable, d'une fonction numérique de deux variables.

432 Exemples d'approximations d'un nombre réel.

433 Approximations du nombre π .

434 Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.

435 Exemples d'étude probabiliste de situations concrètes.

436 Exemples de calculs de primitives.

437 Exemples de variables aléatoires et applications.

438 Exemples de problèmes de dénombrement.

439 Exemples de calculs de la norme d'une application linéaire continue.

440 Exemples de calculs de la longueur d'un arc de classe $\mathcal{C}^1$.

441 Exemples de systèmes différentiels linéaires $\mathrm{Y}' = \mathrm{AY}$ à coefficients réels constants en dimension 2. Allure des trajectoires.

Bibliothèque de l'agrégation

6 Bibliothèque de l'agrégation de mathématiques

AABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs (# 1)	MIT Press
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices (# 2)	Masson
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique (# 1)	Vuibert
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie (# 1)	Dunod
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations (# 1)	Cambridge
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe (# 2)	Cassini
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques – Tome 1A - Topologie (# 5) – Tome 1B - Fonctions numériques (# 6) – Tome 2 - Suites et séries numériques (# 7) – Tome 3 - Analyse fonctionnelle (# 6) – Tome 5 - Algèbre générale, polynômes (# 4) – Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie (# 6) – Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie (# 6)	Ellipses
ANDREWS G.	Number Theory (# 1)	Dover
APPLE A.W.	Modern compiler implementation – in C (# 1) – in Java (# 1) – in ML (# 1)	Cambrigde
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG (# 1)	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie – Tome I (# 2) – Tome II (# 1)	Ellipses
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse (# 9)	Dunod
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4 (# 1)	Dunod

ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques – 1. Algèbre (# 9) – 2. Analyse (# 7) – 3. Compléments d'analyse (# 8) – 4. Algèbre bilinéaire et géométrie (# 6)	DUNOD
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires (# 2)	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires (# 3)	MIR
ARTIN E.	Algèbre géométrique (# 5)	GAUTHIER-VILLARS
ARTIN E.	Algèbre géométrique (# 1)	GABAY
ARTIN M.	Algebra (# 2)	PRENTICE HALL
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée – Tome 1 (# 1) – Tome 2 (# 1)	PUF
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité (# 1)	MASSON
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates (# 1)	MASSON
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation (# 2)	BELIN
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle (# 1)	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel (# 3)	MASSON
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms Introduction to design & analysis (# 1)	ADDISON WESLEY
BADOUEL E., BOUCHERON S. **DICKY A., PETIT A.** **SANTHA M., WEIL P.,** **ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale (# 1)	SPRINGER

BAKHVALOV N.	Méthodes numériques (# 2)	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique (# 1)	HERMANN
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation) (# 1)	BELIN
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires (# 1)	DUNOD
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre (# 1)	DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES
BASS J.	Cours de Mathématiques – Tome 1 (# 2) – Tome 2 (# 2)	MASSON
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology (# 1)	SPRINGER
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers (# 3)	MC GRAW HILL
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle (# 3)	ARMAND COLIN
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés (# 3)	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie – Index (# 3) – 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs (# 3) – 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères (# 1) – 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes (# 3) – 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques (# 2) – 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères (# 3)	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie tome 2 (# 1)	NATHAN
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics (# 1)	PRENTICE HALL

BIDEGARAY B. **MOISAN L.**	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation (# 1)	Springer
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics (# 1)	Oxford Science Publications
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs (# 5)	PUF
BOAS R.	A primer of real functions (# 1)	Mathematical association of America
BON J.L.	Fiabilité des systèmes (# 1)	Masson
BONNANS J.F. **GILBERT J.C.** **LEMARECHAL C.** **SAGASTIZABAL C.**	Optimisation numérique (# 2)	Springer
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique – Topologie générale, chapitres V à X (# 2) – Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII (# 2) – Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III (# 2) – Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV (# 2)	Hermann
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes (# 3)	Hermann
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités (# 1)	Springer
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications (# 4)	Masson
BRIANE M. **PAGES G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition (# 1)	Vuibert
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'. (# 2)	Armand Colin
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics (# 1)	Cambridge
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire – 1. Espaces vectoriels , Polynômes (# 4) – 2. Matrices et réduction (# 2)	Ellipses

CABANNES H.	Cours de Mécanique générale (# 2)	Dunod
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux (# 1)	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes (# 2)	PUF
CARREGA J.C.	Théorie des corps (# 1)	Hermann
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971) (# 4)	Hermann
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977) (# 1)	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles (# 4)	Hermann
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques (# 6)	Hermann
CARTIER P. **KAHANE J.P.** **ARNOLD V. et al.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui (# 1)	Cassini
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing (# 1)	Prentice Hall
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée) (# 3)	Masson
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation – Analyse 2 (# 2) – Analyse 3 (# 3)	Masson
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices (# 1)	Masson
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra (# 2)	Springer Verlag
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie (# 6)	Masson
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie (# 5)	Hermann

CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	– Algèbre 1 (# 1) – Algèbre 2 (# 2)	Ellipses
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation (# 3)	Masson
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes (# 1)	Vuibert
COHN P.M.	Algebra Volume 1 (# 1)	John Wiley
COLLET P.	Modeling binary data (# 1)	Chapman and Hall
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques (# 1)	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique – 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats (# 1) – 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles (# 1)	Dunod
CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique (# 1)	Dunod
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités (# 3)	Cassini
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics – Volume 1 (# 1) – Volume 2 (# 1)	John Wiley
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	Ediscience
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry (# 1)	John Wiley
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos (# 1)	Institute of Physics Publishing
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	– Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe (# 3) – Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe (# 2)	Masson

DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités (# 2)	Masson
DARTE A. **VAUDENAY S.**	Algorithmique et optimisation (# 1)	Dunod
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique Théorie de la démonstration (# 1)	Dunod
DEHEUVELS P.	L'intégrale (# 2)	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale (# 2)	Que-sais-je ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques (# 3)	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique (# 2 ?)	Dunod
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité (# 2)	Springer
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments (# 2)	Jacques Gabay
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles (# 2 (1 de 1991 + 1 de 1996))	PU Grenoble
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations (# 1)	Ellipses
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes (# 2)	Cassini
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications (# 1)	Springer
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres (# 2)	PUF
DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN, RUAUD** **MIQUEL, SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés – 1ère année MPSI, PCSI, PTSI (# 3) – 2ème année MP, PC, PSI (# 3)	Dunod

DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2 (# 2)	ELLIPSES
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire (# 4)	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal (# 3)	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques (# 1)	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. – Fondements de l'analyse moderne (# 5) – Éléments d'Analyse Tome 2. (# 5)	GAUTHIER-VILLARS
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle – Première année (# 3) – Deuxième année (# 3)	GAUTHIER-VILLARS
DUBUC S.	Géométrie plane (# 4)	PUF
DUCROCQ A. **WARUSFEL A.**	Les Mathématiques, plaisir et nécessité Un parcours guidé dans l'univers des mathématiques (# 1)	VUIBERT
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages (# 1)	VUIBERT
DYM H. **Mac KEAN H.P.**	Fouriers series and integrals (# 2)	ACADEMICS PRESS
EBBINGHAUS, HERMES **HIRZEBRUCH, KOECHER** **LAMOTKE, MAINZER** **NEUKIRSCH, PRESTEL, REMMERT**	Les Nombres (# 2)	VUIBERT
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions (# 1)	DUNOD
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles (# 3)	ELLIPSES

EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes – Analyse. Volume 1 (# 1) – Algèbre. (# 3)	Cédic/Nathan
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques – Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles (# 3) – Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse (# 3) – Analyse 2 : Éléments de topologie générale (# 3)	Hatier
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure (# 3)	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X (# 7)	Ellipses
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie (# 1)	Calvage et Mounet
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur (# 1)	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications – Volume 1 (# 2+1 mal relié) – Volume 2 (# 2)	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence (# 2)	Masson
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions – Tome 1 - Topologie (# 3 (1ère) + 7 (2ème)) – Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle (# 1 (1ère) + 5 (2ème)) – Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples (# 7) – Tome 4 - Séries, équations différentielles (# 1+7)	Vuibert
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales – Algèbre (# 1) – Analyse 1 (# 1) – Analyse 2 (# 1)	Ellipses
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1 (# 2)	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1 (# 1)	Masson

FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur (# 1)	HERMANN
FRESNEL J.	Géométrie algébrique (# 3)	UFR MATHS BORDEAUX
FRESNEL J.	Géométrie (# 3)	IREM DE BORDEAUX
FRESNEL J.	Anneaux (# 1)	HERMANN
FRESNEL J.	Groupes (# 1)	HERMANN
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie (# 1)	HERMANN
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra (# 1)	SPRINGER
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire (# 3)	CASSINI
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices – Tome 1 (# 1) – Tome 2 (# 1)	DUNOD
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus (# 2)	VUIBERT
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse (# 2)	SPRINGER
GOBLOT R.	Algèbre commutative (# 2)	MASSON
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie (# 1)	MASSON
GODEMENT R.	Analyse – Tome 1 (# 2) – Tome 2 (# 2) – Tome 3 (# 1)	SPRINGER
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre (# 4)	HERMANN
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations (# 1)	WILEY

GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation – Topologie et Analyse fonctionnelle (# 2) – Calcul différentiel (# 1)	Ellipses
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales – Tome 1 - Algèbre (# 1) – Tome 2 - Topologie et analyse réelle (# 1) – Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel (# 1) – Tome 4 - Géométrie affine et métrique (# 1) – Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes (# 1)	PUF
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' – Algèbre (# 2) – Analyse (# 2)	Ellipses
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire (# 2)	Hermann
GRAMAIN A.	Intégration (# 1)	Hermann
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction) (# 1)	Oxford
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics (# 1)	Wiley
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse (# 7)	Ellipses
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands (# 1)	Cassini
HAMMAD P.	Cours de probabilités (# 3)	Cujas
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités (# 3)	Cujas
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing (# 1)	Springer
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers (# 2)	Oxford
HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do (# 1)	Oxford

HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing (# 1)	Addison Wesley
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications (# 2)	Masson
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis – Volume 1 (# 1) – Volume 2 (# 1) – Volume 3 (# 2)	Wiley-Interscience
HERVE M.	Les fonctions analytiques (# 4)	PUF
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle (# 2)	Masson
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation (# 1)	Addison Wesley
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices (# 1)	Belin
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory (# 2)	Springer Verlag
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy) (# 1)	Vuibert-Springer
ITARD J.	Les nombres premiers (# 1)	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra – Tome I (# 2) – Tome II (# 2)	Freeman and Co
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes (# 4)	Cassini
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis (# 1)	Dover
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces (# 3)	Hermann
KNUTH D.E.	The art of computer programming – Volume 1 : Fundamental algorithms (# 1) – Volume 2 : Seminumerical algorithms (# 1) – Volume 3 : Sorting and Searching (# 1)	Addison-Wesley

KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle (# 1)	Ellipses
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres (# 1)	Modulo
KÖRNER T.W.	Fourier analysis (# 2)	Cambridge
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis (# 1)	Cambridge
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2 (# 1)	Dunod
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens (# 1)	Casssini
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles (# 2)	PUF
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles (# 1)	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution (# 1)	Masson
LANG S.	Algèbre linéaire – Tome 1 (# 2) – Tome 2 (# 2)	InterEditions
LANG S.	Algebra (# 1 (1ère) + 5 (7ème))	Addison-Wesley
LANG S.	Linear Algebra (# 3)	Addison-Wesley
LAVILLE G.	Courbes et surfaces (# 1)	Ellipses
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation (# 2)	Ellipses
LAX P. D.	Linear Algebra (# 1)	Wiley
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie (# 3)	PUF

LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques (# 1)	Jacques Gabay
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation (# 8)	Masson
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales – Tome 1 : Topologie (# 8) – Tome 3 : Intégration et sommation (# 5) – Tome 4 : Analyse en dimension finie (# 8) – Tome 5 : Analyse fonctionnelle (# 5)	Masson
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS – Tome I - Algèbre 1 (# 2) – Tome 2 - Algèbre et géométrie (# 6) – Tome 3 - Analyse 1 (# 6) – Tome 4 - Analyse 2 (# 9)	Ellipses
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques – Tome 1 pour M-M' : Algèbre (# 4) – Tome 1 pour A-A' : Algèbre (# 4) – Tome 2 : Analyse (# 11) – Tome 3 : Géométrie et cinématique (# 5) – Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples (# 4)	Dunod
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle (# 3)	Masson
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie (# 4)	PUF
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie (# 1)	Armand Colin
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition) (# 1)	Vuibert
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus (# 1)	Vuibert
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words (# 1)	Cambridge
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre – 1 : Structures fondamentales (# 4) – 2 : Les grands théorèmes (# 4)	Gauthier-Villars

MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory (# 1)	SPRINGER
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices (# 1)	MASSON
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes (# 2)	MASSON
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque (# 2)	HERMANN
Manuels Matlab	– Using Matlab version 5 (# 3) – Using Matlab version 6 (# 2-3 ?) – Statistics Toolbox (# 1-3 ?)	
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI (# 1)	ELLIPSES
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle – Tome 2 : Exercices et corrigés (# 1) – Tome 3 : Exercices et corrigés (# 1) – Tome 4 : Exercices et corrigés (# 1)	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions (# 2)	DE BOECK UNIVERSITÉ
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation (# 1)	ELLIPSES
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability (# 1)	SPRINGER
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités (# 1)	DUNOD
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique (# 3)	ELLIPSES
MEUNIER	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés – Tome 2 (# 1)	PUF
MIGNOTTE M.	Algèbre concrète, cours et exercices (# 1)	ELLIPSES
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel (# 2)	PUF

MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages (# 1)	Cambridge
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes (# 3)	Cassini
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes (# 1)	Calvage et Mounet
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques (# 5)	Hermann
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions (# 2)	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries (# 4)	Ellipses
MONIER J.M.	Cours de mathématiques – Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI (# 1) – Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI (# 2) – Analyse 3 MP, PSI, PC, PT (# 1) – Analyse 4 MP, PSI, PC, PT (# 1) – Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI (# 3) – Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT (# 4) – Exercices d'analyse MPSI (# 1) – Exercices d'analyse MP (# 2) – Exercice d'algèbre et géométrie MP (# 3)	Dunod
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique – Tome 1 (# 3) – Tome 2 (# 3)	Vuibert
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel (# 1)	Seuil
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés (# 1)	Masson
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités (# 1)	Masson
NIVEN I.	Irrational numbers (# 2)	Mathematical Association of America
NORRIS J.R.	Markov chains (# 1)	Cambridge

OPREA J.	Differential geometry (# 1)	Prentice hall
OUVRARD J.Y.	– Probabilités 1 (capes, agrégation) (# 2) – Probabilités 2 (maîtrise, agrégation) (# 3)	Cassini
PAGES G. **BOUZITAT C.**	En passant par hasard . . . ? Les probabilités de tous les jours (# 1)	Vuibert
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs (# 2)	Springer
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course (# 1)	Dover
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems (# 1)	Springer
PERRIN D.	Cours d'Algèbre (# 3)	Ellipses
PERRIN D.	Cours d'Algèbre (# 5)	ENSJF
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE (# 3)	Cassini
PETAZZZONI B.	Seize problèmes d'informatique (# 1)	Springer
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis – Volume I (# 3) – Volume II (# 3)	Springer Verlag
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse (# 1)	Ellipses
QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse (# 1)	Dunod
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis (# 1)	Internatinal Student Edition
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales – 1- Algèbre (# 10) – 2- Algèbre et applications à la géométrie (# 11) – 3- Topologie et éléments d'analyse (# 14) – 4- Séries et équations différentielles (# 8) – 5- Applications de l'analyse à la géométrie (# 8)	Masson

RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions – Algèbre (# 1) – Analyse 1 (# 5) – Analyse 2 (# 7)	MASSON
RAMIS J.- P., WARUSFEL A. **BUFF X., GARNIER J.** **HALBERSTADT E.** **LACHAND-ROBERT T.** **MOULIN F., SAULOY J.**	Mathématiques Tout-en-un pour la licence Cours complet avec 270 exercices corrigés – niveau L1 (# 2)	DUNOD
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application (# 1)	WILEY
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques (# 1)	LIVRE DE POCHE
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel (# 2)	HERMANN
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants (# 2)	SPRINGER
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple (# 1)	VUIBERT
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières (# 1)	CÉDIC/NATHAN
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques (# 2)	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle (# 2)	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Interpolation, approximation Analyse pour l'agrégation (# 2)	VUIBERT
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3 (# 2)	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe (# 3)	MASSON
RUDIN W.	Functional analysis (# 3)	MC GRAW HILL
RUDIN W.	Real and complex analysis (# 4)	MC GRAW HILL

SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques (# 2)	MASSON
SAMUEL P.	Géométrie projective (# 2)	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres (# 2)	HERMANN
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1 (# 1)	ELLIPSES
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre (# 1)	SPRINGER
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux (# 1)	ELLIPSES
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices (# 1)	VUIBERT
SCHWARTZ L.	Analyse – I Topologie générale et analyse fonctionnelle (# 5) – II Calcul différentiel et équations différentielles (# 1)	HERMANN
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse (# 6)	HERMANN
SEDGEWICK R.	Algorithms (# 2)	ADDISON WESLEY
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java (# 1)	PEARSON EDUCATION
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C (# 1)	DUNOD
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes (# 1)	SPRINGER
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique (# 3)	PUF
SERVIEN Cl.	– Analyse 3 (# 1) – Analyse 4 (# 1)	ELLIPSES

SIDLER J.C.	Géométrie Projective (# 1)	Dunod
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation (# 1)	Thomson C. T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse (# 1)	Dunod
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I (# 1)	Waddworth and Brooks
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre (# 1)	Cassini
TAUVEL P.	Cours de Géométrie (# 1)	Dunod
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation (# 2)	Masson
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2 (# 1)	Masson
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2 (# 2)	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1 (# 1)	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres (# 2)	Institut Elie Cartan
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers (# 2)	Que sais-je ? PUF
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne (# 1)	Hermann
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions (# 4)	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions (# 2)	Oxford
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires (# 1)	Masson

TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables (# 1)	VUIBERT
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires (# 1)	IREM DES PAYS DE LOIRE
TURING A **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing (# 1)	SEUIL
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique – I Théorie des fonctions (# 3) – II Équations fonctionnelles - Applications (# 3)	MASSON
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités (# 1)	HERMANN
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation (# 2)	MASSON
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes Équations différentielles (# 1)	HERMANN
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies (# 2)	CLASSIQUES HACHETTE
WARUSFEL, ATTALI COLLET, GAUTIER, NICOLAS	Mathématiques – Analyse (# 1) – Arithmétique (# 1) – Géométrie (# 1) – Probabilités (# 1)	VUIBERT
WEST D. B.	Introduction to graph theory (# 1)	PRENTICE HELL
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis (# 3)	CAMBRIDGE
WILF H.	Generatingfunctionology (# 1)	ACADEMIC PRESS
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire (# 2)	CASSINI
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages (# 1)	MIT PRESS
YALE P.B.	Geometry and Symmetry (# 1)	DOVER

YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics (# 1)	Dover
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie (# 3)	Cassini
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation (# 1)	Masson