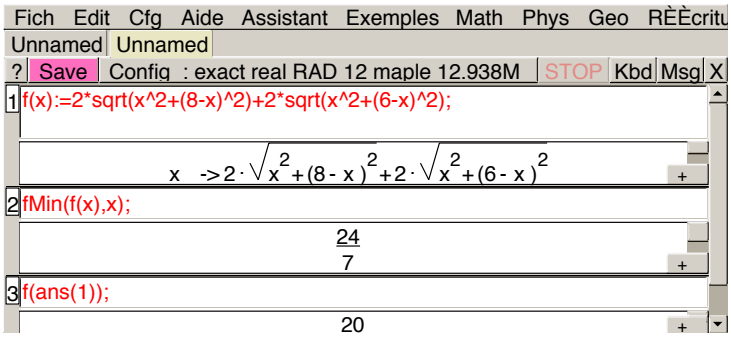
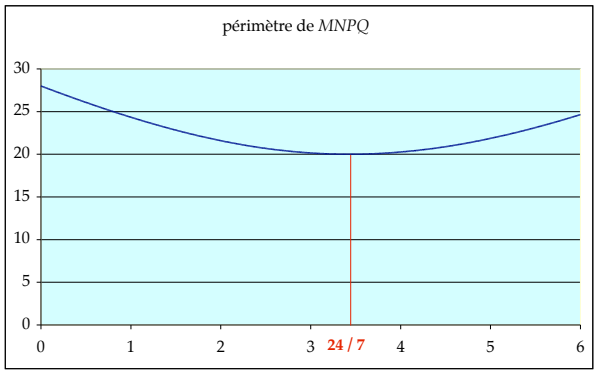
Activités possibles des élèves :

- À l'aide d'un logiciel, représenter les courbes donnant l'aire et le périmètre en fonction de AM.
  Déterminer expérimentalement les valeurs minimales et maximales de l'aire et du périmètre.
- Calculer l'aire, le périmètre.
- Déterminer le maximum et le minimum de l'aire.
- À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer le minimum du périmètre ou à l'aide d'un logiciel de calcul numérique, en déterminer une valeur approchée.

Le travail relatif à l'aire étant classique, nous nous concentrons dans la suite sur le périmètre. En utilisant le logiciel de calcul formel Xcas, on obtient les valeurs exactes, étayées par la représentation graphique :





Le calcul qui suit a pour but de montrer comment pourrait être justifié, dans le cadre du programme de seconde, le résultat trouvé. Ce calcul est évidemment hors de portée d'un élève de seconde, mais peut être mené par le professeur avec l'aide d'un logiciel de calcul formel. Celui-ci ne pourra être utile que si l'on voit *a priori* les calculs qui doivent être faits, consistant essentiellement à « chasser les racines carrées du numérateur » en multipliant numérateur et dénominateur par des « quantités conjuguées » bien choisies. C'est une illustration de ce que peut être un travail sur l'intelligence du calcul.

$$\begin{aligned}
\frac{\text{per}(MNPQ)-20}{2} &= \sqrt{2x^2-16x+64}+\sqrt{2x^2-12x+36}-10\\
&= \frac{4x^2-28x+2\sqrt{(2x^2-16x+64)(2x^2-12x+36)}}{\sqrt{2x^2-16x+64}+\sqrt{2x^2-12x+36}+10}\\
&= \frac{4(2x^2-16x+64)(2x^2-12x+36)-(4x^2-28x)^2}{D}\\
&= 16\frac{(x^2-8x+32)(x^2-6x+18)-(x^2-7x)^2}{D}\\
&= 16\frac{x^4-14x^3+98x^2-336x+576-x^4+14x^3-49x^2}{D}\\
&= 16\frac{49x^2-336x+576}{D} = 16\frac{(7x-24)^2}{D} \geqslant 0, \text{ nul pour } x=\frac{24}{7}.
\end{aligned}$$

On a posé :

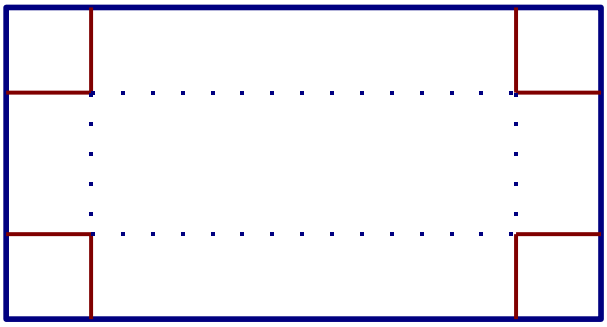
$$D=\left(\sqrt{2x^2-16x+64}+\sqrt{2x^2-12x+36}+10\right)\left(2\sqrt{(2x^2-16x+64)(2x^2-12x+36)}+28x-4x^2\right)>0$$

puisque $28x-4x^2=4x(7-x)>0$ pour $x\in]0;6]$.

3. Situation n°3 : Patrons de récipients

Dans le document ressource du collège « du numérique au littéral », figure le problème classique de la plaque carrée dans laquelle on découpe 4 carrés identiques dans chaque coin pour former une boîte en forme de parallélépipède rectangle. En fonction du côté de l'encoche, on peut calculer l'aire et le volume de la boîte. On peut aussi chercher le maximum du volume de la boîte.
Sur ce thème de la construction du patron d'un récipient dans une figure donnée, on peut varier les approches, en changeant la figure initiale ou en changeant la forme du récipient. Nous proposons ci-dessous trois exemples de difficultés variées pour la construction de récipients ouverts [3].

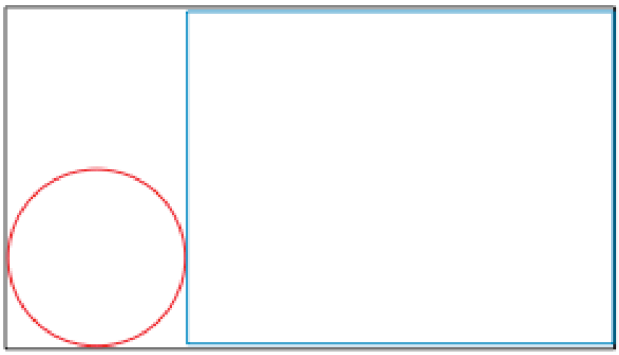
a) Patron d'un parallélépipède rectangle ouvert dans un rectangle



Pour certains élèves, on se limitera à des valeurs numériques de la largeur et de la longueur du rectangle. Pour ceux qui sont plus à l'aise avec le calcul littéral, il est possible de prendre les dimensions du rectangle comme paramètres.

b) Patron d'un cylindre ouvert dans une plaque rectangulaire

Exemple de configuration possible :



Dans cette configuration, une des difficultés pour les élèves réside dans le rapport π qui doit exister entre une des dimensions du rectangle et le diamètre du cercle. Les valeurs numériques de la longueur et de la largeur du rectangle initial sont données.

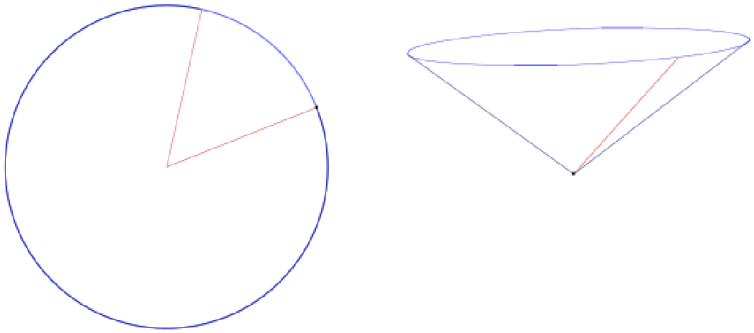
Questionnements possibles

- Comment peut-on découper dans un rectangle un disque et un rectangle pour constituer le patron d'un cylindre ouvert ?
- Quelles valeurs peuvent prendre le diamètre, la hauteur, le volume de ce cylindre ?
- Comment faire que le cylindre ait le volume le plus grand possible ?

3. Le qualificatif « ouvert » signifie que les récipients sont sans couvercle.

c) Patron d'un cône de révolution ouvert (cornet) dans un disque

On enlève dans un disque un secteur angulaire pour former le patron d'un cône de révolution.

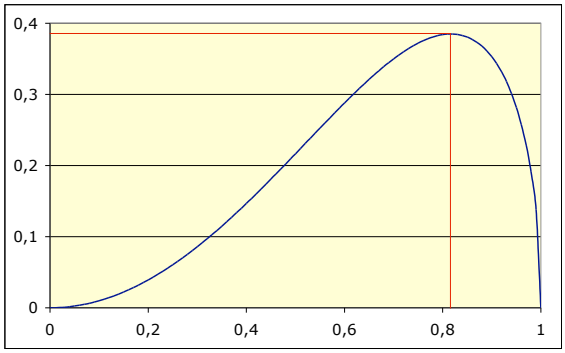


Si le disque est de rayon R et le secteur angulaire conservé est dans un rapport k avec un tour, la base du cône a pour périmètre $2\pi Rk$ donc pour rayon Rk.

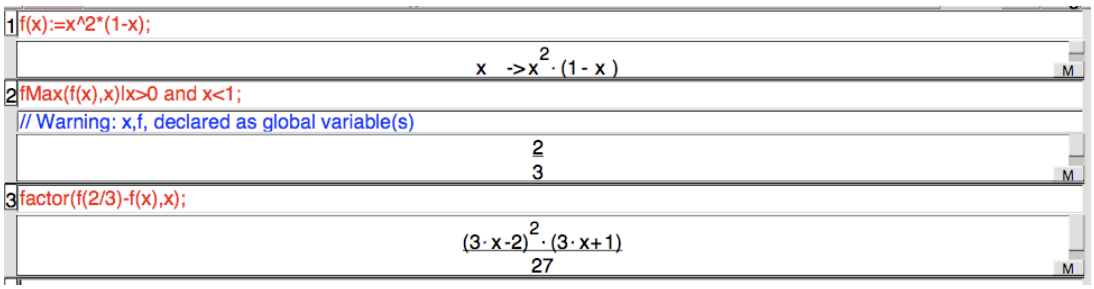
D'après le théorème de Pythagore, la hauteur du cône vaut $h = \sqrt{R^2 - (Rk)^2} = R\sqrt{1-k^2}$

et le volume $V = \dfrac{\pi R^3}{3} k^2 \sqrt{1-k^2} = \dfrac{\pi R^3}{3} V_1(k)$.

On représente la fonction $V_1 : k \mapsto k^2\sqrt{1-k^2}$:



Pour la détermination du maximum, on peut poser $k^2 = x$ puis $f(x) = \left(V_1(k)\right)^2 = x^2(1-x)$. Laissons alors Xcas faire les calculs :



De l'égalité obtenue $f\left(\dfrac{2}{3}\right) - f(x) = \dfrac{(3x-2)^2(3x+1)}{27} \geqslant 0$, on déduit que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ et, si l'on revient au volume :

le volume maximum est obtenu pour $k = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et vaut $V_{\max} = \dfrac{2\pi R^3\sqrt{3}}{27}$

4. Situation n°4 : Une formule de physique concernant la puissance électrique

Le produit de la tension efficace U aux bornes d'un dipôle ohmique par l'intensité efficace I du courant qui le traverse est égal à la puissance électrique P que le dipôle consomme : $P = UI$, où U s'exprime en volts, I en ampères et P en watts.

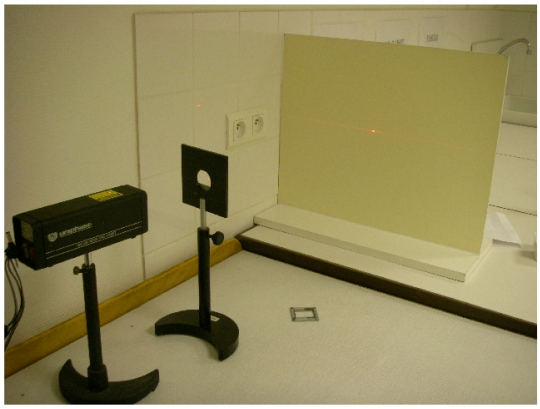
Questionnements possibles :

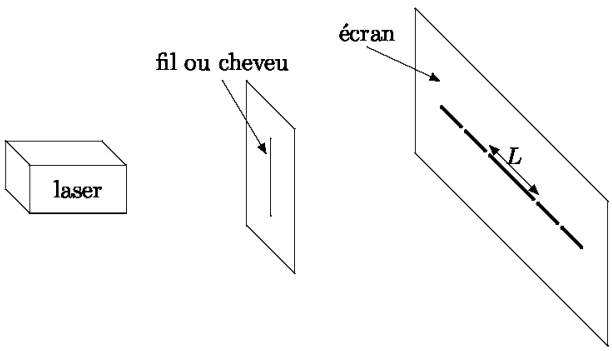
- Une lampe à incandescence porte les indications : 6V-100mA. Qu'est-ce que la formule permet alors de calculer ? Rédiger un énoncé de problème et le résoudre.
- Envisager le cas d'une ampoule qui porte les indications 230V-75W.
- Que peut-on dire à propos d'un fer à repasser qui ne porterait que la seule indication 1300 W ?
- Une rallonge de fil électrique porte les indications 230V-max 2200W. Peut-il être parcouru sans risque par un courant de 5A ? de 10A ? de 15A ? Rédiger un énoncé de problème et le résoudre.
- Quelle fonction peut-on associer à cette situation ? Proposer plusieurs exemples.
- Pour U donnée, s'interroger sur les accroissements de P et de I.
- Pour P donnée, s'interroger sur les accroissements de U et de I.

5. Situation n°5 : Mesure de l'épaisseur d'un cheveu par diffraction

a) Observation du phénomène de diffraction

Sur le trajet horizontal d'un faisceau laser, on place un fil (fixé verticalement sur un cadre support), et on observe l'étalement du faisceau sur un écran situé au-delà du fil.





Quand la lumière rencontre un objet de petite taille, le trajet des rayons lumineux n'est plus rectiligne (voir photo ci-dessous). Le faisceau « s'étale » derrière l'obstacle, et forme sur un écran une figure appelée figure de diffraction (figure ci-dessous). Sur cette figure de diffraction, il est possible de mesurer la largeur L de la tache centrale qui dépend de la taille de l'objet.

b) Observation de la figure de diffraction

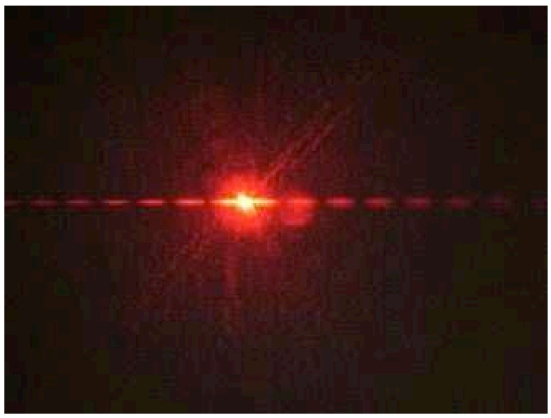


Photo de l'écran

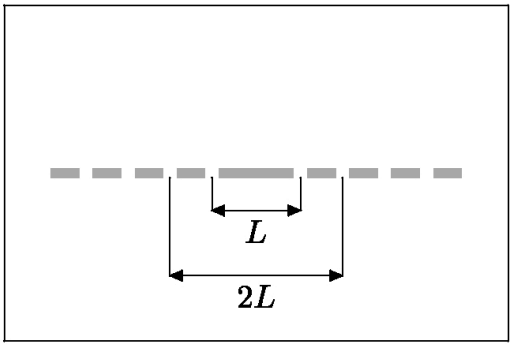


Schéma associé

Les taches lumineuses sont représentées en gris sur le schéma ci- dessus. Le disque central plus lumineux sur la photo n'est pas représenté sur le schéma.

c) Mesures de L avec les fils calibrés

La distance entre le fil et l'écran étant maintenue constante, un groupe d'élèves a réalisé des mesures de L avec une règle graduée au millimètre pour différents fils calibrés de diamètre d. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

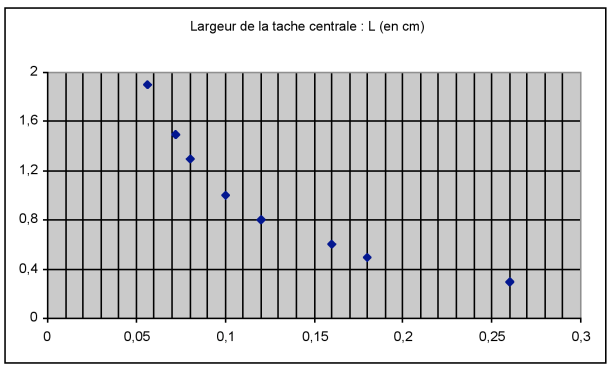
Diamètre du fil : d (en mm)	0,08	0,056	0,072	0,10	0,12	0,16	0,18	0,26
Largeur de la tache centrale : L (en cm)	1,3	1,9	1,5	1,0	0,8	0,6	0,5	0,3

Les données expérimentales sont celles obtenues par un groupe d'élèves lors d'une séance de travaux pratiques. Il est possible d'obtenir des mesures plus précises avec un matériel plus perfectionné, mais qui n'est pas celui utilisé en général par les élèves.
On souhaite connaître la mesure du diamètre d'un cheveu : pour cela on remplace le fil par le cheveu d'un élève. La mesure de L donne la valeur 1,2 cm.
Peut-on déterminer l'épaisseur du cheveu en mm ? Si l'élève avait utilisé du gel coiffant, la valeur de L aurait-elle été supérieure ou inférieure à 1,2 cm ?

Remarques

L'attendu d'un élève est que :

- il prenne l'initiative de représenter graphiquement les données expérimentales ;
- il identifie que ces données ne lui permettent pas de répondre immédiatement à la question posée ;
- il s'interroge sur la nature du lien existant entre L et d : L varie en fonction de d. Plus d augmente plus L semble diminuer. Si cela est juste la mesure qui l'intéresse est comprise entre 0,08 et 0,1 ;
- il s'interroge sur la manière de déterminer une valeur approchée de la mesure du diamètre du cheveu et donc de relier deux points du nuage (approximation affine ?).

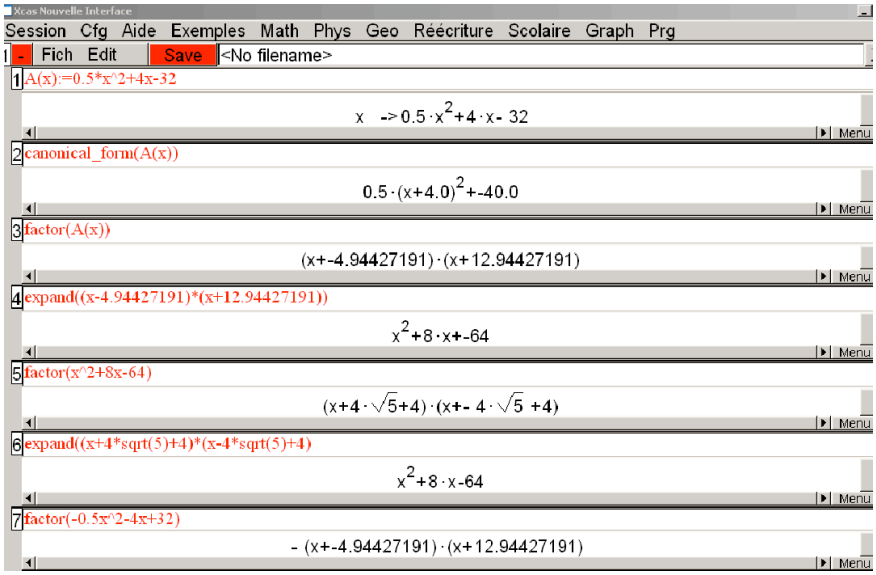


Annexes

Annexe 1. Des exemples de raisonnement à valoriser

Exemple 1 : On se place dans le cas où l'étude d'un problème conduit à la résolution de l'équation $\frac{1}{2}\ell^2 + 4\ell - 32 = 0$.

- J'ai besoin de factoriser l'expression pour résoudre cette équation ; je fais appel au logiciel de calcul formel :



> Ce travail sur les expressions algébriques peut être l'occasion de différencier les exigences au niveau du degré de maîtrise technique des élèves : on peut, en effet, s'autoriser à ne demander qu'à certains élèves de déterminer la factorisation, la forme canonique étant donnée (ou non).

- Je résous l'équation en reconnaissant la forme factorisée comme étant celle la mieux adaptée à mon problème : j'ai donc démontré qu'il n'y a qu'une solution au problème et que sa valeur exacte est $4\sqrt{5} - 4$.

  Exemple 2 : On se place dans le cas où l'étude d'un problème conduit à la résolution de l'équation $\frac{1}{2}\ell(\ell + 8) - 32 = 0$.

  - Avec ma calculatrice, je trace la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 0,5x(x + 8) - 32$.
  - Je conjecture qu'il y a existence et unicité de la solution sur l'intervalle $[0; 8]$ car la fonction semble croissante sur cet intervalle.
  - Je sais que sur ma calculatrice je n'observe qu'un dessin « faussé » de la courbe représentative de la fonction et que cela ne suffit donc pas à démontrer les propriétés de cette fonction. Je dois donc démontrer que la fonction est croissante sur $[0; 8]$:
    - ◇ f est une fonction polynôme du second degré, je sais d'après les résultats vus en cours qu'elle est croissante puis décroissante ou le contraire.
    - ◇ Je constate que $f(0) = f(-8) = 32$; J'ai deux points de la parabole qui ont même ordonnée . J'en déduis l'axe de symétrie. Les variations changent en -4.
    - ◇ 0 et 2 sont tous les deux plus grands que -4. Or $f(0) = 32$ et $f(2) = -22$ ainsi $f(0) < f(2)$. f n'est donc pas décroissante mais bien croissante à partir de -4. Donc la fonction est bien croissante sur $[0; 8]$.

  J'ai démontré qu'il n'y avait qu'une seule solution au problème posé et je peux maintenant en chercher une valeur approchée.

Exemple 3 : On se place dans le cas où l'étude d'un problème conduit à rechercher si la quantité $\frac{1}{2}\ell^2 + 4\ell$ peut être rendue la plus grande possible (la plus petite possible) quand ℓ appartient à l'intervalle $[0; 8]$.
(techniquement plus exigeant et seulement à la portée de quelques élèves)

- Des essais me permettent de conjecturer que la quantité devient de plus en plus grande ; sa plus petite valeur est 0 (pour $\ell = 0$) et sa plus grande valeur est 64 (pour $\ell = 8$). Autrement dit la fonction $x \mapsto 0,5x^2 + 4x$ est croissante sur $[0; 8]$

- Je dois le démontrer :
  - ◇ Je prends deux réels a et b quelconques dans $[0;8]$ avec b plus petit que a. Je veux démontrer que $f(b)$ est plus petit que $f(a)$ soit $0,5b^2+4b<0,5a^2+4a$
  - ◇ Or $b<a$ donc $b^2<a^2$ car la fonction carrée est croissante sur $[0;8]$,
  - ◇ donc $0,5b^2<0,5a^2$,
  - ◇ donc $0,5b^2+4b<0,5a^2+4b<0,5a^2+4a$ car $b<a$ donc $4b<4a$ donc soit $f(b)<f(a)$.

  Conclusion : Pour tout b plus petit que a, $f(b)$ est plus petit que $f(a)$.
- J'ai donc bien démontré que la fonction est croissante sur $[0;8]$.

Annexe 2. Des exemples à faire vivre en classe

Exemple 1 :

> Soit x un nombre réel strictement positif. Affirmation :« L'aire d'un carré de côté $x+3$ est égale à la somme des aires de deux carrés de côtés respectifs x et 3. » VRAI ou FAUX ?

L'affirmation est, du point de vue de la logique, une phrase ouverte. Pour répondre à cette question il est nécessaire de préciser explicitement la quantification sous-jacente.

- Si l'affirmation est :

  L'aire d'un carré de côté $x+3$ est ***toujours*** égale à la somme des aires de deux carrés de côtés respectifs x et 3 cela se traduit par l'examen de la proposition :

  « ***pour tout réel*** x strictement positif, on a : $(x+3)^2 = x^2+9$ »

  la réponse à donner est FAUX. Dans ce cas, donner un contre-exemple suffit pour le prouver .
- Si l'affirmation est :

  On peut trouver une valeur d'un nombre réel strictement positif x pour laquelle l'aire d'un carré de côté $x+3$ est égale à la somme des aires de deux carrés de côtés respectifs x et 3. Ou encore

  « ***il existe au moins*** une valeur de x strictement positive pour laquelle on a : $(x+3)^2 = x^2+9$ ».

  Dans ce cas, démontrer que cette affirmation est fausse nécessite la résolution de l'équation c'est à dire la recherche de toutes les valeurs de x telles que $(x+3)^2 = x^2+9$.

Ce travail d'entraînement à la logique à conduire dans la durée peut se faire par exemple via des questions rapides posées en début de séance.

Exemples :

1. VRAI ou FAUX ?

   Si $x < 2$ alors $x < 3$
   Si $x < 3$ alors $x < 2$
   Si $x \leqslant 3$ alors $x < 3$
   Si $x < 3$ alors $x \leqslant 3$
   Si $x = 2$ alors $2x+3 = 7$
   Si $2x+3 = 7$ alors $x = 2$
   Si $2x-5 < 2$ alors $x < 3$
   Si $x < 3$ alors $2x-5 < 2$

   Avec des questionnements et des discussions sur les quantifications sous-jacentes.

2. Faire des propositions vraies du style « pour tout réel x, si … alors … » en utilisant les énoncés

   $x^2 = 16,\ x = 4,\ x = -4,\ x = 4$ ou $x = -4,\ x^3 = 64$.

3. « Il existe au moins un réel x tel que si $x^2 = 4$ alors … »

   a) Compléter la proposition pour qu'elle soit fausse ;

   b) Compléter la proposition pour qu'elle soit vraie.

4. Si $x = x(x-2)$, alors $x = 3$. VRAI ou FAUX ?

   « Pour tout réel x, si $x = x(x-2)$, alors $x = 3$ » est une proposition fausse : le contre-exemple $x = 0$ le démontre.
   « Pour tout réel $x > 0$, si $x = x(x-2)$, alors $x = 3$ » est une proposition vraie.

5. Autre exemple de travail possible
   Voici le tableau de « signes » d'une fonction :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

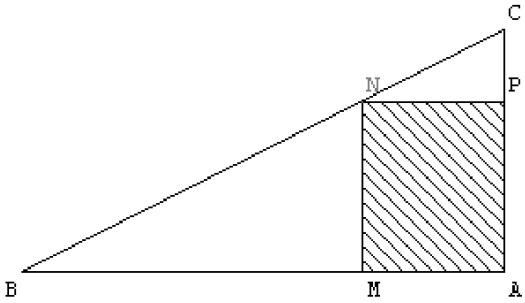
   Répondre aux affirmations suivantes par : VRAI, FAUX, ou par ON NE PEUT PAS SAVOIR.
   (a) $f(2) = 6$
   (b) L'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions
   (c) La fonction f est une fonction affine
   (d) L'inéquation $f(x) < 0$ a pour ensemble de solutions $]-3;5[$
   (e) Le point $A(0;5)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f.
   (f) Si $f(1) = -4$, alors le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est -4.

Annexe 3. Des activités rapides

Sous les titres A) à C) qui suivent sont donnés des exemples de questions qui peuvent être posées en activités rapides (pratique qui peut être un rituel de quelques minutes au début de chaque séance).

A) Pour anticiper sur l'articulation entre programme de calcul, formule, nuage de points, tableau de nombres ou la pérenniser

1) Thème 1



BM	aire du quadrilatère
0	0
0,5	1,375
1	2,5
1,5	3,375
2	4
2,5	4,375
3	4,5
3,5	4,375
4	4
4,5	3,375
5	2,5
5,5	1,375
6	0

ABC est un triangle rectangle en A $AB = 6\text{cm}$ et $AC = 3\text{cm}$. M est un point variable du segment $[AB]$

L'aire du quadrilatère $MNPA$ est donnée, en cm^2, par la formule :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}BM \times (6 - BM).$$

a) Que vaut l'aire $\mathscr{A}$ si $BM = 2\text{cm}$?

b) Est-il vrai ou faux que l'aire $\mathscr{A}$ est égale à $2,5\text{cm}^2$ si $BM = 5\text{cm}$?

c) Quelle fonction f formalise le lien entre la distance BM et l'aire $\mathscr{A}$ du quadrilatère $MNPA$? Quel est son ensemble de définition ?

d) Quelle est l'image de $1,5$ par f ?

e) Les informations dont on dispose permettent-elles de donner le ou les antécédents du nombre $5/2$ par f ? qu'en est-il pour le nombre 0 ?

1) Thème 2

Associer une formule au programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Ajouter 3
- Mettre au carré
- Prendre l'opposé

1) Thème 3

Associer une formule au programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Prendre son inverse
- Multiplier par -5
- Ajouter 7
- Mettre au carré

1) Thème 4

Associer un programme de calcul à la formule $3(x-2)^2+7$.

1) Thème 5

À température constante et pour une quantité de matière donnée, l'état d'un gaz parfait suit la loi de Boyle-Mariotte : $P \times V = k$ où k est une constante, P est la pression du gaz en Pa et V le volume du gaz en m^3.

a) J'observe la pression.
- Sur quel paramètre vais-je agir ?
- Je représente graphiquement mes résultats ; quelle grandeur placer en abscisses ? et en ordonnées ?
- Donner la fonction modélisant cette situation

b) J'observe le volume occupé par le gaz
- Sur quel paramètre vais-je agir ?
- Je représente graphiquement mes résultats ; quelle grandeur placer en abscisses ? et en ordonnées ?
- Donner la fonction modélisant cette situation

1) Thème 6

L'équation d'état d'un gaz parfait est : $PV = nRT$

P : pression en Pa T : température en Kelvin
V : volume en m^3 R : constante du gaz parfait n : quantité de matière en mole

a) n, R et P étant fixés, donner un programme de calcul permettant de calculer la température à partir du volume ;

b) n, R et T étant fixés, donner un programme de calcul permettant de calculer la pression à partir du volume

1) Thème 7

On filme le mouvement d'un palet de hockey sur glace et on mesure la distance d qu'il parcourt en fonction du temps. On obtient le tableau suivant :

t en s	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2	0,24	0,28	0,32
d en m	0,04	0,08	1,35	1,75	2,10	2,55	3,05	3,40

a) On trace un graphique (nuage de points) à partir des données. Donner les coordonnées d'un point placé.

b) On modélise la situation par la fonction f qui à x associe $11x$.
Donner la formule modélisant le lien entre les deux grandeurs t et d.

c) Quelle est la distance parcourue par le palet en 0,2 s ? Quelle est l'image de 0,2 par la fonction f ?

d) Estimer le temps au bout duquel le palet aura parcouru 10 mètres.

1) Thème 8

La période T des oscillations d'un pendule dont la longueur du fil est ℓ est donnée par la relation $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ où g est l'accélération de la pesanteur.

a) Donner un programme de calcul permettant de calculer la période à partir de la longueur.

b) Donner la fonction modélisant cette situation.

B) Pour construire dans la durée la notion de courbe représentative

Remarque : *Ces questions ne sont surtout pas à poser d'un seul coup. En revanche il est fructueux d'y revenir par petites touches. Un jour on peut poser 1.a), 2.c) et 3.b), un autre 1.d), 2.a) et 3.a), etc.*

1. $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de la fonction f.

a) L'image de -1 par la fonction f est 2,5. Donner les coordonnées d'un point de $(\mathscr{C})$.

b) Le point de coordonnées $(0,3)$ appartient à $(\mathscr{C})$. Traduire cela de plusieurs manières sur la fonction f.

c) Le seul point de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée 5 a pour abscisse -1. Traduire cette information sur la fonction f.

d) Il n'y a pas de point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse -2. Traduire cela sur f.

e) Il n'y a pas de point de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée 6. Traduire cela sur f.

f) f transforme le nombre $1,5$ en le nombre 7. Traduire cette information de diverses manières sur f et sur $(\mathscr{C})$.

2 $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de la fonction f qui à tout nombre x associe le nombre $2x^2 - 3$.

a) A est le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 2. Quelle est l'ordonnée de A ?

b) E est le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse -1. Peut-on donner l'ordonnée de E ?

c) B est un point de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée -3. Peut-on donner l'abscisse de B ?

d) K est un point de $(\mathscr{C})$. L'ordonnée de K est égale à 1. Peut-on donner l'abscisse de K ?

e) M est un point de $(\mathscr{C})$. On note x son abscisse. Peut-on donner son ordonnée ?

3 $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de la fonction f.

a) f est la fonction qui à tout nombre x associe le nombre $\dfrac{2}{x^2+3}$. Donner l'ordonnée du point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 0.

b) f est la fonction qui à tout nombre x associe le nombre $5 - 2x^2$. Donner la plus grande ordonnée possible d'un point de $(\mathscr{C})$.

c) f est la fonction qui à tout nombre t associe le nombre $(2-t)(3-t)$. Donner les coordonnées de tous les points de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée 0.

C) Pour revenir fréquemment sur la caractérisation des points de la courbe représentative d'une fonction

Par exemple :

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x}{1+x^2}$.

a) Le point A de coordonnées $(-1;-1,5)$ appartient-il à la courbe $(\mathscr{C})$?

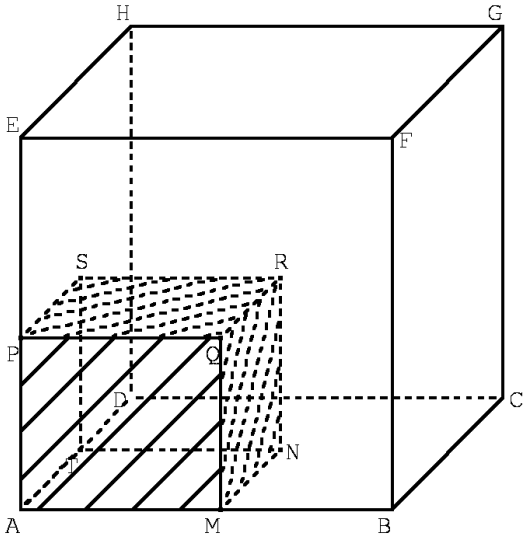
b) Le point B de coordonnées $(1;1,6)$ appartient-il à la courbe $(\mathscr{C})$?

Remarque : Ces questions sont l'occasion aussi de faire conduire aux élèves des raisonnements logiques.

- Si $f(-1) = -1,5$ alors le point A de coordonnées $(-1;-1,5)$ appartient à $(\mathscr{C})$. Ce qui est bien le cas.
- Si le point B de coordonnées $(1;1,6)$ appartient à $(\mathscr{C})$ c'est que f transforme 1 en 1,6. Donc je calcule l'image de 1. Or $f(1) = 3/2 = 1,5$ et $f(1)$ n'est donc pas égal à 1,6. Donc le point B n'appartient pas à $(\mathscr{C})$.

Dans la section 4, figure un extrait du travail réalisé dans le cadre des actions mutualisées SDTICE (Nantes 2009)

Annexe 4. Des Pavés dans un cube



Énoncé :

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6 cm.

On construit un point M appartenant au segment $[AB]$ et le point P appartenant au segment $[AE]$ tel que $AM = EP$. On construit alors le pavé droit $AMNTPQRS$ de telle façon que $AMNT$ soit un carré.

On souhaite savoir comment varie le volume du pavé droit $AMNTPQRS$ quand M varie sur le segment $[AB]$.

En posant $AM = x$, l'expression du volume du pavé s'écrit $V(x) = x^2(6-x)$.

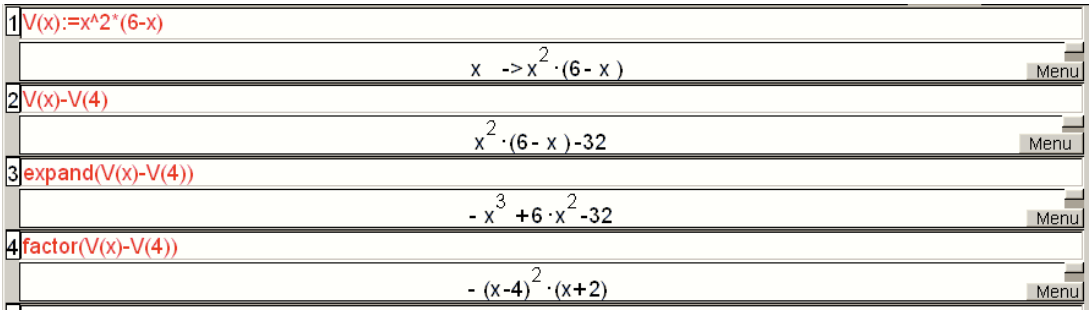
En utilisant un traceur de courbe ou un tableur les élèves conjecturent sans problème l'existence d'un maximum atteint pour $x = 4$.
Il s'agit alors de prouver cette conjecture en étudiant le signe de $V(x) - V(4)$ quand x appartient à l'intervalle $[0;6]$.
Cela revient à prouver que :

- pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;6]$, $V(x) \leqslant V(4)$;
- ou encore $V(x) - V(4) \leqslant 0$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;6]$.

Or $V(x) - V(4) = x^2(6-x) - 32$.
Cette expression est une différence et son signe n'est pas facile à étudier. Pour bon nombre d'élèves cet obstacle technique est insurmontable.

Pour autant certains ont bien anticipé sur la forme qu'ils voudraient donner à $V(x) - V(4)$ et montrent qu'ils souhaitent factoriser. Pour cela ils décident de mobiliser le logiciel Xcas dans un but précis : factoriser.

D'autres sont encore hésitants sur la forme à donner. Ils décident alors aussi de mobiliser Xcas et obtiennent plusieurs nouvelles écritures de l'expression $V(x) - V(4)$.



Suit alors un travail de réflexion sur ces différentes écritures : quelle est l'écriture la plus adaptée à l'étude du signe de $V(x) - V(4)$?
Discussions intéressantes ?
Dans la classe le consensus se fait et la forme factorisée est choisie : $V(x) - V(4) = -(x+2)(x-4)^2$. Tous sont alors en capacité de finaliser la preuve.

Remarques :

- La stratégie de résolution du problème est entièrement restée ***à la charge de l'élève***.
- Le calcul formel a permis de générer plusieurs écritures d'un polynôme du troisième degré (obtenir ces différentes écritures dépasse le degré de maîtrise technique attendu d'un élève de seconde).
- C'est bien à l'élève qu'est laissé le soin d'analyser les différentes écritures obtenues et de ***choisir l'écriture la mieux adaptée pour résoudre son problème*** (l'intelligence du calcul lui est donc laissée).
- Le calcul formel exécute une factorisation trop difficile pour un élève de seconde, mais ***l'élève a identifié son besoin de calcul*** puis il confie au calculateur un calcul dont il maîtrise la nature (j'ai besoin d'une forme factorisée ou je me demande quelle forme serait la mieux adaptée) mais dont il ne maîtrise pas la difficulté.