ministère éducation nationale
ÉduSCOL [dgesco]
Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Mathématiques

Lycée

Ressources pour la classe de seconde

- Fonctions -

Juillet 2009

Fonctions

Sommaire

1. Quels sont les objectifs à atteindre ?

Comme dans toutes les parties du programme, les paragraphes qui précèdent les tableaux précisant les contenus et les capacités attendues, fixent de façon nette les objectifs à atteindre et les déclinent en termes de ***nature des problèmes que les élèves doivent savoir résoudre, précisant également le degré d'autonomie attendu.***

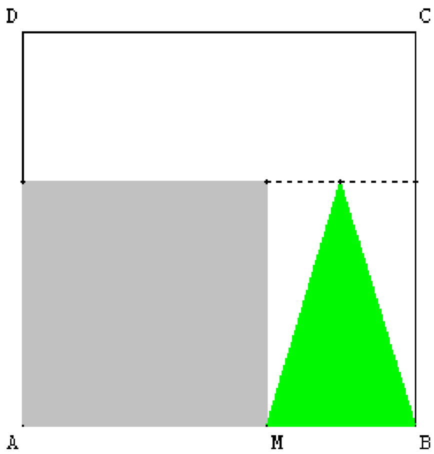
Ces objectifs sont ambitieux, le degré d'autonomie que les élèves doivent montrer pouvant être maximal : autonomie du choix de la démarche, de la nature du traitement à apporter, de la modélisation à mettre en œuvre.

> ***Construire chez tout élève cette autonomie nécessite une formation adaptée incluant une confrontation fréquente à des problèmes posés sous une forme ouverte.***

Le programme fixe comme objectif la maîtrise de deux familles de problèmes :

- Première famille : problèmes se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ dans le cas où la fonction est donnée mais aussi dans le cas où toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction.
- Seconde famille : problèmes d'optimisation ou du type « $f(x) > k$ ». Dans un premier temps un élève doit pouvoir résoudre un tel problème, de façon exacte ou approchée, à l'aide d'un graphique et de façon exacte si les variations de la fonction et les antécédents de k sont connus. Dans un second temps cette étude peut être faite, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

Exemple : une même situation pour divers problèmes



Le carré `ABCD` a un côté de longueur 8 cm. `M` est un point du segment [`AB`] On dessine comme ci-contre dans le carré `ABCD`
- un carré de côté [`AM`]
- un triangle isocèle de base [`MB`] et dont la hauteur a même mesure que le côté [`AM`] du carré.

On s'intéresse aux aires du carré, du triangle, du motif constitué par le carré et le triangle.

Problème du type n°1 : On voudrait que le motif ait une aire égale à la moitié de celle du carré `ABCD`. Quelles dimensions faut-il donner au motif ?

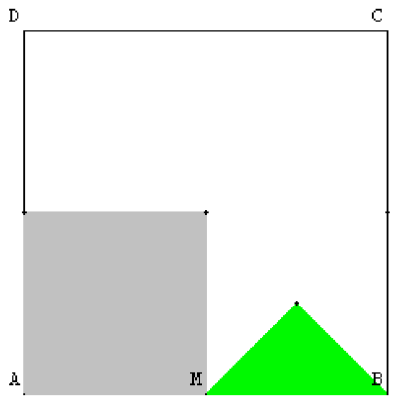
Problème du type n°1 : Est-il possible que l'aire du triangle soit égale à l'aire du carré ?

Problème du type n°2 : Est-il possible de faire en sorte que l'aire du triangle soit la plus grande possible ? Si oui préciser dans quel(s) cas ?

Problème du type n°2 : Est-il possible de faire en sorte que l'aire du triangle soit plus grande que l'aire du carré ? Si oui préciser dans quels cas c'est possible.

Problème du type n°2 : Comment évolue l'aire du motif en fonction de `AM` ? en fonction de `MB` ?

Une variante



Le carré ABCD a un côté de longueur 8 cm. M est un point du segment [AB]. On dessine comme ci-contre dans le carré ABCD :

- un carré de côté [AM] ;
- un triangle rectangle isocèle de base [MB].

On s'intéresse aux aires du carré, du triangle, du motif constitué par le carré et le triangle.

Problème du type n°1 : Est-il possible de faire en sorte que l'aire du triangle soit égale à l'aire du carré ? Si oui préciser dans quels cas c'est possible.
Problème du type n°2 : Est-il possible de faire en sorte que l'aire du motif soit la plus grande possible ? la plus petite possible ? Si oui dans quels cas ?

Dans ces deux situations l'élaboration d'une formule reste relativement accessible et ne devrait pas constituer un obstacle insurmontable.

Dans la première situation :

- La façon dont l'aire du triangle évolue en fonction par exemple de AM ne se donne pas *a priori*. En conséquence l'aire du motif non plus.
- Écrire l'aire du motif sous la forme $0,5\,\ell^2 + 4\,\ell$ (si on désigne par ℓ la longueur AM exprimée en cm) peut permettre à certains élèves de donner le sens de variation de la fonction sur l'intervalle utile.
- Un élève pourrait se montrer étonné de constater que dans la classe certains trouvent que l'aire du motif est une fonction croissante (si l'on choisit AM comme variable), alors que d'autres obtiennent une fonction décroissante (ceux qui ont choisi BM comme variable). Cela pourrait être de nature à faire sentir l'importance de la variable.

Dans la seconde situation :

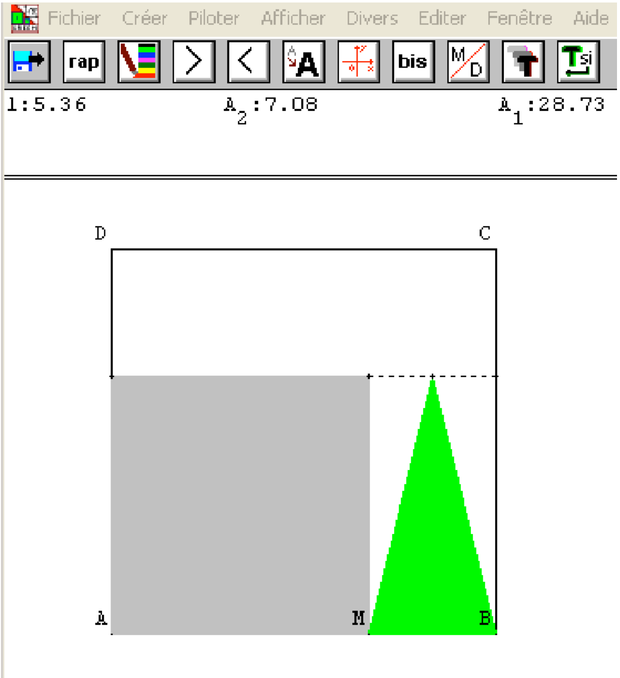
- Le contexte permet d'affirmer que l'aire du triangle est une fonction décroissante de AM : plus AM est grand, plus la base et en conséquence la hauteur du triangle sont petites).
- L'aire du motif a des variations en fonction de AM qui changent en la valeur $1,6$ $(8/5)$.

On attend d'un élève qu'il puisse :

- s'approprier le problème en faisant des essais de manière à comprendre que, dans ces deux situations plusieurs quantités varient : le côté du petit carré, la base du triangle, la hauteur du triangle, l'aire du motif. Pour certains élèves un premier obstacle à surmonter est d'identifier que le côté du petit carré et la base du triangle sont liés, (resp. ℓ et $8-\ell$). Quand ils font des essais ils sont assez nombreux à choisir AM et BM indépendamment.
- identifier la variable ℓ (longueur du côté du carré ou longueur du côté du triangle)
- éventuellement prendre l'initiative de récolter des données expérimentales soit en calculant numériquement l'aire du motif pour quelques valeurs de ℓ (à la main ou avec un tableur), soit en utilisant un logiciel de géométrie.

Feuille de calcul

c	aire du carré	aire du triangle	Aire du motif
0	0	0	0
0,5	0,25	1,875	2,125
1	1	3,5	4,5
1,5	2,25	4,875	7,125
2	4	6	10
2,5	6,25	6,875	13,125
3	9	7,5	16,5
3,5	12,25	7,875	20,125
4	16	8	24
4,5	20,25	7,875	28,125
5	25	7,5	32,5
5,5	30,25	6,875	37,125
6	36	6	42
6,5	42,25	4,875	47,125
7	49	3,5	52,5
7,5	56,25	1,875	58,125
8	64	0	64



- constater que ces essais ne lui permettent pas de répondre de façon exacte à la question posée mais qu'en revanche ils peuvent permettre d'y répondre de façon approchée à condition que les essais soient affinés. Ce faisant avoir eu la possibilité d'identifier la nécessité du passage au modèle mathématique pour répondre de façon exacte au problème posé (existence de solution ou pas ? unicité ou pas ? valeur exacte des solutions).

c	aire du carré	aire du triangle	aire du motif
4,94	24,4036	7,5582	31,9618
4,95	24,5025	7,54875	32,05125

- Associer de façon autonome au problème une expression, celle de l'aire du motif en fonction de ℓ :
$$\frac{1}{2}\ell^2 + 4\ell \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\ell(8-\ell) + (8-\ell)^2$$
suivant le choix fait pour la variable ℓ.
- Conduire une résolution graphique ou algébrique et dans ce cadre :
  - ◇ associer à la formule une courbe tracée à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel et faire une lecture graphique
  - ◇ trouver de façon autonome la forme de l'expression adaptée au problème et, si besoin est, (autrement dit si la maîtrise technique du calcul algébrique n'est pas encore suffisante), l'obtenir en ayant recours au calcul formel
  - ◇ avoir eu une occasion de comprendre (et/ou de montrer qu'il a compris) que la résolution de l'équation donne toutes les solutions ainsi que leur valeur exacte alors que la résolution graphique ne donne qu'une valeur approchée des solutions et une démonstration est nécessaire pour être sûr de les avoir toutes.

En annexe 1 « des exemples de raisonnements possibles à valoriser ».

2. La notion de fonction : une notion à travailler dans la durée

La notion de fonction est, pour beaucoup d'élèves de seconde, une notion difficile à appréhender. Pour autant sa maîtrise est nécessaire à toutes les poursuites d'études.

Le travail sur les fonctions est amorcé au collège. Un objectif essentiel de ce travail consiste à faire émerger progressivement, et sur des exemples concrets, « un processus faisant correspondre à un nombre un autre nombre ». Les fonctions linéaires et affines sont vues à présent comme des exemples particuliers de tels processus, ce qui ouvre davantage la possibilité de soulever quelques questions de fond au sujet de la représentation graphique. Par exemple si l'objectif est de représenter graphiquement la fonction qui à tout nombre associe le carré de ce nombre une question importante et porteuse de sens est « peut-on ou non relier deux points consécutifs d'un nuage par un segment ? ».

La notion de fonction linéaire est présentée comme offrant un modèle pour toutes les situations qui relèvent de la proportionnalité.

Pour beaucoup d'élèves, la notion de fonction ne fait pas encore sens en début de seconde. Il importe donc qu'avant toute formalisation nouvelle, les élèves soient dès le début de l'année et le plus souvent possible confrontés à des situations dans lesquelles il y ait besoin, pour répondre à une question posée au départ,

- d'identifier deux quantités qui varient tout en étant liées,
- d'expliciter le lien entre ces deux quantités de diverses manières :
  - ◇ tableau de valeurs obtenu grâce à des mesures ou à l'utilisation d'un logiciel (logiciel de géométrie ou tableur),
  - ◇ nuage de points dessiné ou obtenu expérimentalement,
  - ◇ courbe liée à la situation posée,
  - ◇ formule exprimant l'une des quantités en fonction de l'autre,
- d'identifier les avantages et les inconvénients de tel ou tel aspect d'une fonction – tableau de valeurs, nuage de points, courbe, formule – selon la question initialement posée.

Les contenus de cette partie du programme ont donc été volontairement recentrés sur les incontournables nécessaires à toute poursuite d'étude et cela de manière à dégager du temps pour que les élèves puissent résoudre des problèmes.

En effet, outre le fait de faire acquérir à tout élève les savoirs utiles et un certain degré de maîtrise technique, cette partie du programme a pour objectif prioritaire de permettre aux élèves de consolider les compétences fondamentales relatives à la résolution de problème et donc être capable de réagir sainement, et sans indication de marche à suivre, devant un problème et de conduire des raisonnements (analyse du problème, élaboration de stratégies ou du traitement à apporter, mise en œuvre du traitement, contrôle de la cohérence des résultats obtenus, exploitation) pour apporter une réponse à la question posée.

3. Une incitation pédagogique

Le programme encourage une programmation moins centrée sur les notions elles-mêmes et davantage sur la nature des problèmes que les élèves doivent savoir résoudre.

Par exemple, au niveau du travail à conduire sur le sens de variation des fonctions, l'objectif n'est pas de centrer un apprentissage sur une maîtrise du « comment étudie-t-on en général le sens de variation d'une fonction définie par une expression algébrique ? ». Il s'agit davantage d'obtenir que les élèves donnent sens à ce qu'est une fonction croissante (ou décroissante) sur un intervalle et sachent, quand le sens de variation d'une fonction est connu, comment exploiter une telle information pour répondre à une question.

L'attendu est aussi qu'ils soient capables, pour résoudre un problème, de donner de façon autonome le sens de variation d'une fonction trinôme du second degré. Dans le cadre d'une différenciation pédagogique, on peut s'autoriser à ce que quelques élèves deviennent capables d'aller au-delà et il est même souhaitable de le faire.

4. Notations et raisonnement mathématiques en analyse

a) Éclairer les différents sens des symboles « $=, <, >$ » en lien avec les quantifications existentielle ou universelle implicites

L'utilisation de ces trois symboles, avec leurs différents sens, intervient à tout moment dans cette partie du programme, les situations conduisant parfois à transformer des expressions algébriques, parfois à résoudre des équations ou des inéquations. Dans ces contextes, les symboles employés entre deux expressions peuvent être les mêmes alors que leur signification et les problèmes sous-jacents sont totalement différents. Par exemple « Vrai ou Faux ? »

$x^2+2x-3=(x+1)^2-4$	$x^2+2x-3 \geqslant 4$	$(a+b)^2=a^2+b^2$
$x^2=-2x+3$	$x^2+2x-3 \geqslant 0$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Chacune des « phrases » écrites ci-dessus est, du point de vue de la logique, une phrase ouverte, c'est-à-dire qu'elle n'a aucune valeur de vérité. Il est donc impossible de répondre à la question posée sans la préciser au préalable. Toutes ces ambiguïtés peuvent être pour les élèves source d'incompréhensions bloquantes. Il est donc essentiel de les aider à devenir capables, de façon autonome, de lever les implicites liés à certaines écritures.

Ainsi :

- « pour tout nombre réel x, $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ » est une proposition vraie ; le démontrer nécessite de faire un calcul. Disposer d'une quantification universelle est la « récompense » d'une démonstration. Il est essentiel de faire comprendre aux élèves que seul un raisonnement permet de gagner un « quel que soit », un « pour tout », un « pour n'importe quel ».
- « pour tout nombre x, $x^2 = -2x + 3$ » est une proposition fausse ; pour le démontrer il suffit de trouver une valeur de x pour laquelle il n'y a pas égalité.
- « il existe des valeurs du nombre x pour lesquelles on a $x^2 = -2x + 3$ » est une proposition vraie. Un exemple suffit à le prouver.

Quand un élève écrit $x^2 = -2x + 3$, il peut vouloir dire qu'il cherche toutes LES valeurs que l'on peut donner à x pour que l'égalité soit vraie. Il peut aussi faire une erreur et vouloir dire implicitement que l'égalité $x^2 = -2x + 3$ est toujours vraie, c'est-à-dire est vraie quelle que soit la valeur que l'on donnera à x.

L'un des objectifs de ce travail consiste à donner à comprendre aux élèves que ***seul un raisonnement permet de gagner un « quel que soit », un « pour tout », un « pour n'importe quel »***.

Un travail sur les quantifications implicites de certaines formulations peut aider l'élève à clarifier des énoncés et donc à progresser sur les stratégies à adopter pour se prononcer sur la valeur de vérité de ces énoncés.
Des exemples à faire vivre en classe sont donnés **en annexe 2**.

b) Conduire avec les élèves un travail sur la négation

Ce travail s'appuie sur des exemples afin de dégager quelques idées fondamentales :

- conduire les élèves à prouver qu'une proposition universellement quantifiée est fausse ;
  Exemples :
  - ◇ prouver que deux expressions ne sont pas égales, par exemple en lien avec un travail sur l'erreur.
  - ◇ « Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ est positive sur $\mathbb{R}$ ». VRAI ou FAUX ?
  - ◇ « Toute fonction qui n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ ». VRAI ou FAUX ?
- leur faire identifier la non-linéarité de certaines fonctions en lien avec un travail sur l'erreur, par exemple « le carré d'une somme est-il égal à la somme des carrés ? », « l'inverse d'une somme est-il égal à la somme des inverses ? » ;
- les conduire à prouver qu'une fonction n'est pas croissante sur un intervalle.

> Si pour un élève la définition formelle n'est pas encore installée mais que le sens est construit, le raisonnement peut être : « *Je prends deux nombres rangés par ordre croissant dans* $[-2;0]$ *:* -2 *et* -1*. Si la fonction carré était croissante sur* $[-2;0]$*, alors les carrés de ces deux nombres seraient rangés aussi par ordre croissant. On aurait* $4 < 1$*. Or c'est faux* ».
>
> Si la définition formelle d'une fonction croissante sur un intervalle est disponible, un élève peut conduire le raisonnement suivant : « *Dire que la fonction carré est croissante sur* $[-2;0]$ *signifie que "quels que soient les deux nombres* a *et* b *que je prends dans l'intervalle* $[-2;0]$*, chaque fois que j'ai* $a < b$*, alors j'ai* $a^2 < b^2$*". Or je peux trouver deux nombres (il existe deux nombres)* a *et* b *dans l'intervalle* $[-2;0]$ *pour lesquels j'ai bien* $a < b$ *et pourtant je n'ai pas* $a^2 < b^2$*. Je le prouve en prenant un exemple (un contre-exemple)* ».

c) Veiller à ce que les élèves sachent faire la distinction entre avoir DES solutions et avoir LES solutions

> Si x prend la valeur 0 ou la valeur -1 alors l'égalité $x^3 + 101x^2 + 100x = 0$ est vraie. Je peux en déduire que 0 et -1 sont des solutions de l'équation $x^3 + 101x^2 + 100x = 0$.
>
> Si je note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de cette équation je peux écrire que $\{0, -1\} \subset \mathscr{S}$.

d) Familiariser les élèves avec les notations propres aux intervalles

Il n'y a pas lieu de consacrer une ou plusieurs séances à la notion d'intervalle.

Au collège les élèves ont eu l'occasion de représenter sur la droite numérique des ensembles de nombres (par exemple tous les nombres solutions d'une inéquation du premier degré à une inconnue). En seconde il s'agit prioritairement de consolider ce qui a été amorcé au collège et en parallèle de proposer, simplement quand le besoin s'en fait sentir, et petit à petit, une façon de noter des ensembles que l'on sait déjà représenter.

5. Place de l'algorithmique en analyse

Relativement aux acquis visés par le collège la nouveauté est la formalisation de la notion d'algorithme. Cette formalisation sera poursuivie tout au long du lycée. L'objectif de la seconde est de poser l'essentiel à savoir, apprendre à :
- identifier le calcul ou le traitement qui est à répéter ;
- automatiser un calcul un nombre donné de fois ou un nombre de fois soumis à un test.

a) Automatiser le tracé progressif de la courbe représentative d'une fonction

La première approche de l'algorithmique en analyse peut être l'automatisation d'une représentation graphique d'une fonction. Bien sûr, les calculatrices graphiques et de nombreux logiciels (grapheurs, logiciels de calcul numérique, de calcul formel, logiciels de géométrie) donnent un tracé de la courbe représentative d'une fonction déterminée par une formule algébrique. Mais ces tracés sont faits de façon opaque. Il est souvent fructueux de conduire les élèves à tracer aussi une courbe « à la main » en partant d'un tableau de valeurs pour obtenir un nuage de points), de les inciter à se poser la question de la manière de joindre les points du nuage.
Proposer ensuite aux élèves d'augmenter par étapes le nombre des points du nuage peut renforcer leur compréhension de ce qu'est la courbe représentative d'une fonction en les aidant à mieux distinguer l'objet mathématique des dessins que l'on peut en faire.
Exemple d'algorithme (par dichotomie) écrit en langage naturel :

Données :
- fonction f,
- bornes a et b,
- nombre d'itérations du nuage N

Variables :
- variable entière pour la boucle : k,
- longueur de l'intervalle entre deux points : L,
- abscisse du point marqué : x

```
Entrer N
L ← (b-a)
Pour k de 1 à N
        | L ← L/2
        | x ← a
        | Tant que x⩽b
        |      | Marquer le point de coordonnées (x,f(x))
        |      | x ← x+L
        | attendre 5 secondes (ou un appui sur une touche)
Fin
```

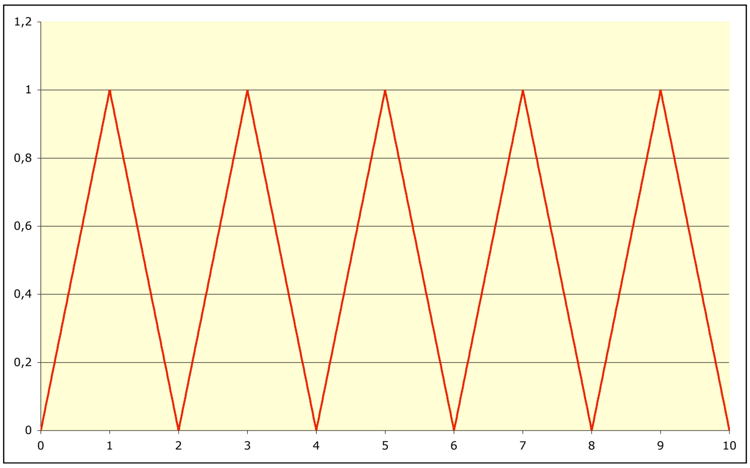
b) Tracé d'une courbe définie par morceaux, par un processus itératif

On peut, dans un premier temps, envisager ces types de tracés avec un tableur-grapheur, en employant les fonctions logiques du tableur.

Exemple :

On considère la fonction définie sur $[0; 10]$ qui est affine entre deux nombres entiers consécutifs et qui vaut
- 0 pour les entiers pairs ;
- 1 pour les entiers impairs,

conformément au graphique ci-contre :



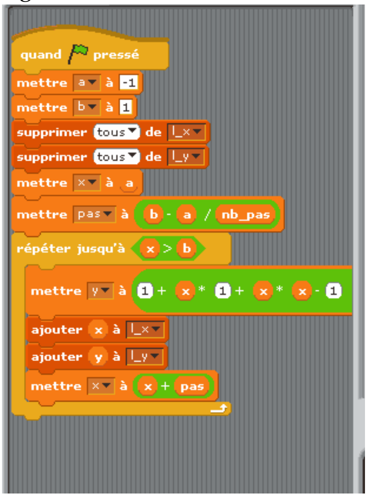
Avec un tableur, si l'on réserve à la variable la colonne A et aux images la colonne B, on peut saisir la première valeur de la variable dans la cellule A2, et dans la cellule B2 la formule suivante :

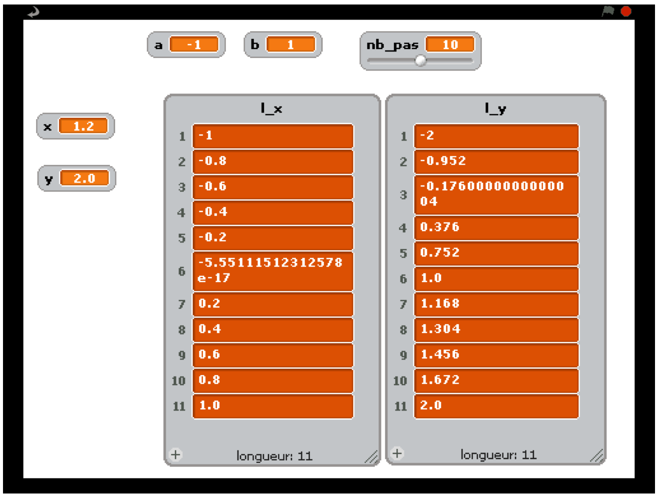
```
=SI(EST.PAIR(A2);A2-ENT(A2);1+ENT(A2)-A2)
```

Il ne reste plus qu'à recopier vers le bas la formule saisie en B2.

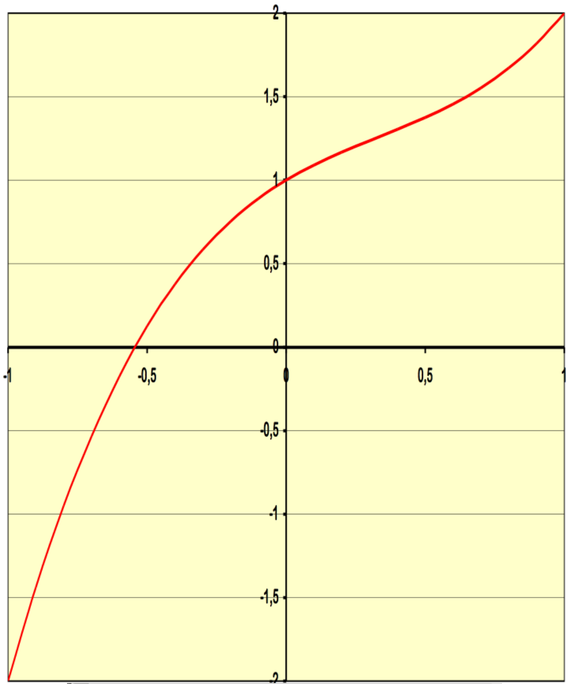
c) Recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation par dichotomie

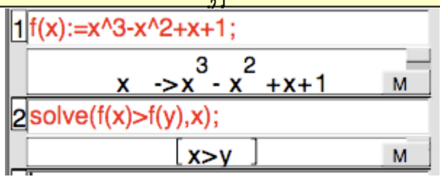
Exemple : Considérons la fonction $x \mapsto x^3 - x^2 + x + 1$ sur l'intervalle$[-1;1]$. Un tableau de valeurs peut être obtenu avec le logiciel Scratch :





La fonction « passe de $f(-1) = -2$ à $f(1) = 2$ ». Intuitivement, elle va donc s'annuler. Une représentation graphique, donnée ci-contre, permet de conjecturer qu'elle est strictement croissante, ce qui peut être confirmé par un logiciel de calcul formel (voir, sous la courbe, le résultat donné par le logiciel Xcas).





Par exemple sur la calculatrice TI-nspire, l'algorithme de recherche d'une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$ peut se traduire par le programme :

Define **dichot**$(a, b, n) =$
Func
Local x, y, c :
$x := a$
$y := b$
While $y - x > 10^{-n}$
  $c := \dfrac{x+y}{2}$:
  If $f(x) * f(c) > 0$ Then
    $x := c$
  Else
    $y := c$
  EndIf
EndWhile
Return x :
EndFunc

L'utilisation de la fonction **dichot**[1] ainsi définie se traduit par :

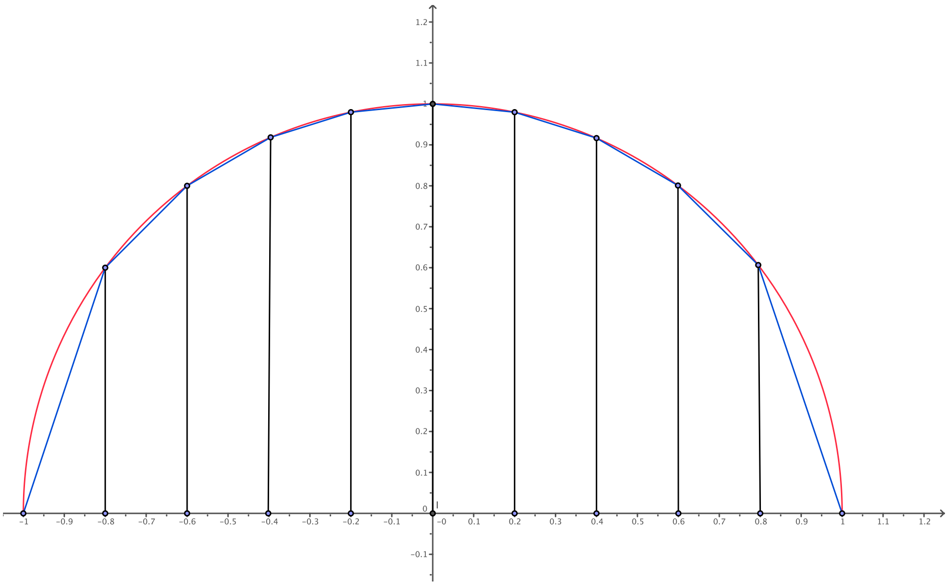
$dichot(-1, 1, 12)$	-0.54368901269208
$solve(f(x) = 0, x)$	-0.54368901269208

La dernière ligne servant à vérifier le résultat trouvé.

1. Notons au passage que l'algorithmique permet, conformément au programme de confronter les élèves à des fonctions autres que des fonctions d'une variable réelle : fonctions d'une variable entière, fonctions de plusieurs variables.

d) Longueur approchée d'un arc de courbe

Exemple : Vérification expérimentale de la longueur d'un demi- cercle de rayon 1.
Si l'on considère le demi-cercle de rayon 1 formé des points d'ordonnées positives, tout point $M(x, y)$ de ce cercle vérifie $x^2 + y^2 = 1$, soit puisque $y \geqslant 0$, $y = \sqrt{1 - x^2}$. On peut approcher le périmètre du demi-cercle par la longueur d'une ligne polygonale régulière dont les sommets sont sur le demi- cercle, l'origine étant $A(-1, 0)$ et l'extrémité $B(1, 0)$.
Ainsi, avec $n = 5$, on obtient :



Si l'on désigne par $2n$ le nombre d'arêtes de la ligne polygonale obtenue en prenant les points A_i dont les abscisses sont $x_i = -1 + \frac{i}{n}$ de sorte que $A_0 = A$ et $A_{2n} = B$, l'algorithme de calcul peut se traduire par le programme suivant (pour la calculatrice TI-nspire) :

Define $\mathbf{y}(x) =$
Func
Return $\sqrt{1 - x^2}$
EndFunc

Define **norme**$(a, b) =$
Func
Return $\sqrt{a^2 + b^2}$
EndFunc

Define **longueur**$(n) =$
Func
Local $i, L, x1, x2$:
$L := 0 :\ x2 := -1$
For $i, 1, 2 * n$
$\quad x1 := x2 :\ x2 := x1 + \frac{1}{n}$
$\quad L := L + norme\left(\frac{1}{n}, y(x2) - y(x1)\right)$
EndFor
Return L
EndFunc

Ce petit programme donne, pour différentes valeurs de n les résultats ci-dessous, à comparer avec une approximation de π donnée directement par la calculatrice :

longueur (100)	3.1412985671606
longueur (1000)	3.1415833563503
longueur (10000)	3.1415923595898
π	3.1415926535898

e) Aire d'une région comprise entre deux courbes

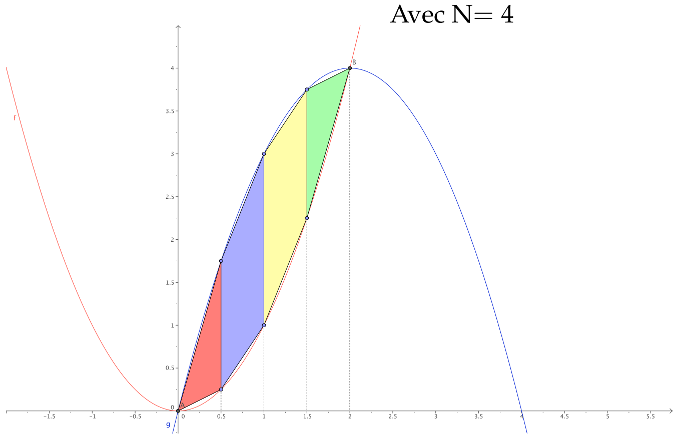
On se propose, par exemple, de calculer une valeur approchée de l'aire comprise entre deux paraboles sécantes. On Considère les deux paraboles $\mathscr{P}_1$ d'équation $y = f(x) = x^2$ et $\mathscr{P}_2$ d'équation $y = g(x) = 4x - x^2$ qui se coupent aux points $A(0,0)$ et $B(2,4)$. En partageant le segment $[0,2]$ de l'axe des abscisses en n segments de longueurs égales et en traçant les parallèles à l'axe des ordonnées, on obtient, en prenant les points d'intersections de ces droites avec les deux courbes, on obtient n trapèzes (le premier et le dernier sont des triangles). On considère que pour n assez grand, la somme des aires de ces trapèzes est une bonne approximation de l'aire comprise entre les deux courbes. L'aire du k-ième trapèze a pour valeur : $\frac{2}{n} \times \frac{\big(g(k/n) - f(k/n)\big) + \big(g((k-1)/n) - f((k-1)/n)\big)}{2}$ et l'algorithme de calcul peut s'écrire (en langage naturel) :

Données : fonction f : x↦ x^2, fonction g : x↦ 4*x−x^2,
nombre d'intervalles N.

Variables :
- variable entière pour la boucle : k,
- abscisses des bornes de l'intervalle en cours : x, y
- longueur de l'intervalle entre deux points : L,
- aire déjà calculée : S.

```
Entrer N
L ← 2/N :   x ← 0 :   y ← 0 :   S ← 0
Pour k de 1 à N
    x ← y
    y ← k*L
    S ← S+(g(y)−f(y)+g(x)−f(x))∗L/2
Fin
```

Avec N= 4



L'algorithme décrit ci-dessus donne le programme Scilab suivant :

```
function P1=f(x)
P1=x^2 ;
endfunction ;

function P2=g(x)
P2=4*x-x^2 ;
endfunction ;

function S=Aire(N)
L=2/N ;
x=0 ;
y=0 ;
U=0 ;
for k=1 :N,x=y, y=k*L, U=U+(g(y)-f(y)+g(x)-f(x))*L/2, end ;
S=U ;
endfunction ;
```

et les calculs :

```
-->Aire(10)
 ans =
   2.64
-->Aire(100)
 ans =
   2.6664
-->Aire(1000)
 ans =
   2.666664
-->Aire(10000)
 ans =
   2.6666666
```

6. Quelques précisions sur des points particuliers du programme

a) Autour de la courbe représentative d'une fonction

La notion de courbe représentative d'une fonction est une notion délicate que beaucoup d'élèves peinent à comprendre. Les acquis du collège sur ce point sont encore fragiles (voire très fragiles) et la classe de seconde doit proposer la poursuite d'un apprentissage (qui sera à continuer aussi en cycle terminal) :

- en mobilisant très régulièrement, et dans un premier temps sur de simples nuages de points, le passage du cadre graphique au cadre numérique afin d'en construire durablement la robustesse. Des professeurs le font sous la forme d'un rituel de questions rapides posées au début de chaque séance, ce qui leur permet de revenir très fréquemment et par petites touches sur ces questions de fond.

Voir Annexe 3

- en ne passant pas trop vite sur le passage du nuage de points à une courbe.
  Pour cela des questions de fond gagnent à être cultivées :
  - ◇ Peut-on joindre deux points du nuage par un segment ?
  - ◇ Si non pourquoi ne peut-on pas le faire ou comment le prouver ?
- en aidant les élèves à distinguer la courbe d'une fonction des dessins qu'on peut en obtenir avec un traceur de courbes.

Ce travail est d'autant plus important que, dans une résolution de problème, obtenir un dessin de la courbe représentative d'une fonction apparaît rarement aujourd'hui comme l'aboutissement d'une étude. Il en constitue plus souvent une étape, ce dessin apportant une aide précieuse à la résolution.

Mais cela nécessite que les élèves comprennent bien que, si ce qui est vu à l'écran permet de répondre de façon parfois satisfaisante à une question posée sur une situation concrète (cela peut être le cas dans beaucoup de situations empruntées aux domaines économiques) et peut donner des idées pour transformer la forme d'une expression, ***en aucun cas cela ne permet d'affirmer des propriétés de la fonction***. De la même manière que les élèves ont appris au collège à ne pas se contenter de lire sur un dessin les propriétés des figures géométriques, ils doivent apprendre à distinguer la courbe représentative d'une fonction (qui appartient au monde des objets mathématiques tout comme la figure géométrique) des dessins que l'on peut en faire (qui appartiennent au monde réel tout comme en géométrie, les dessins non codés).

Ce travail de formation est d'autant plus important que l'on souhaite libérer la pratique expérimentale des élèves. Leur apprendre à distinguer ce qui est établi de ce qui est encore à prouver, à utiliser à bon escient le mot « conjecture » est un objectif important à poursuivre.

b) Autour de l'étude qualitative d'une fonction

Les attendus du programme

Un objectif essentiel donné par le programme, et tout à fait suffisant dans un premier temps, est de ***donner sens*** à ce qu'est une fonction monotone sur un intervalle.
La définition formelle d'une fonction croissante (respectivement décroissante) reste trop complexe pour beaucoup d'élèves en début de classe de seconde. Formaliser ces deux définitions trop tôt peut faire véritablement blocage. Il est judicieux de les dégager très progressivement et de ne les formaliser que le plus tard possible. Le programme précise que leur maîtrise n'est un objectif que de fin d'année.
Cette maîtrise du sens est prouvée si :

- Lorsqu'il sait que f est une fonction décroissante sur $[2;+\infty[$ (ou qu'il le déduit du tableau des variations de f), un élève est capable de comparer les images de deux nombres donnés dans l'intervalle $[2;+\infty[$ (par exemple de ranger et , voire comparer les images de a et $a+1$ pour a élément de $[2;+\infty[$.
- L'élève sait que disposer des variations d'une fonction ne lui permet pas de comparer les images de n'importe quels nombres. Par exemple, il sait qu'il ne peut comparer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(3)$ à partir du tableau de variations de f donné ci-après :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	3	↘	

Un élève prouve cette maîtrise du sens s'il sait recourir à la connaissance qu'il a du sens de variation des fonctions de référence pour comparer des nombres.

Par exemple comparer, sans utiliser de calculatrice, $(\sqrt{3}+1)^2$ et $\left(\frac{12}{7}\right)^2$.

> ***Le programme ne fixe pas comme objectif qu'un élève devienne capable d'étudier dans le cas général les variations d'une fonction en mobilisant l'effet sur l'ordre d'un enchaînement de fonctions de référence.***

La connaissance des variations des fonctions de référence (affine, carré, inverse) peut, dans un premier temps, n'être formalisée qu'en prenant appui sur le sens. Apporter une preuve nécessite la maîtrise d'une définition formelle et peut n'être entrepris qu'*a posteriori*, quand la maturité des élèves est plus grande.

Pour que les élèves puissent se concentrer sur la résolution de toute une famille de problèmes, l'objectif est qu'ils soient en mesure de disposer du tableau de variations des fonctions polynômes de degré 2 sans que cela ne représente pour eux un obstacle au niveau de la maîtrise technique.

Connaissance des fonctions polynômes du second degré

Concernant les résultats sur les variations d'une fonction polynôme du second degré, il peut suffire de donner la propriété affirmant qu'une telle fonction est soit croissante puis décroissante soit le contraire. En particulier, la méthode consistant en la lecture du coefficient de x^2 peut ne pas être donnée tout particulièrement aux élèves qui ne l'auraient pas repérée. L'objectif essentiel reste de faire raisonner les élèves avec un bagage minimum sans les surcharger de contenus vides de sens à mémoriser et leur demandant une capacité d'abstraction trop importante. En particulier, il ne serait pas judicieux, en classe de Seconde, de donner la valeur de l'abscisse $-\dfrac{b}{2a}$ qui réalise l'extremum d'une telle fonction.

Le programme précise que les résultats concernant les fonctions polynômes du second degré sont donnés en classe et connus des élèves mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Faire l'étude d'une telle fonction dans le cas général (comme cela se fait actuellement en première S) dépasse en effet les capacités d'abstraction de la majorité des élèves de seconde. Plusieurs stratégies pédagogiques sont possibles et relèvent de la liberté pédagogique :

- Faire appel à l'intuition et/ou à l'observation puis marquer la rupture entre propriété conjecturée et propriété non démontrée en classe mais validée par le professeur.
- Apporter une preuve (en mobilisant l'effet sur l'ordre des fonctions de référence) mais seulement sur un exemple générique et avec toute (ou une partie de) la classe.

Lorsqu'il s'agira ensuite pour un élève de donner les variations d'une fonction polynôme du second degré quelconque, il pourra par exemple :

- Prendre appui sur le fait – établi en cours – qu'une fonction polynôme de degré 2 est soit croissante puis décroissante, soit le contraire. Il ne lui restera plus alors qu'à trouver pour quel nombre réel il y a changement de variation.
  - ◇ si la forme canonique est disponible (soit parce que l'expression de la fonction est mise naturellement sous cette forme soit parce que l'élève identifie qu'il en a besoin et qu'il l'obtient en utilisant un logiciel de calcul formel), il pourra en déduire à la fois l'extremum, la valeur en laquelle il est atteint et son caractère (minimum ou maximum) ;
  - ◇ sinon exploiter la symétrie de la courbe de la fonction. Du fait de cette symétrie l'abscisse de l'extremum est la demi-somme des abscisses de deux points de la courbe de même ordonnée. L'élève a donc toute liberté de choisir de rechercher les points communs de la courbe avec l'axe des abscisses, ou prendre l'initiative de chercher les deux antécédents d'un même nombre. Une fois trouvées les coordonnées de l'extremum, la comparaison avec l'ordonnée d'un autre point de la courbe suffit à établir son caractère.
- Articuler observations de l'expression et d'un graphique obtenu avec une calculatrice : par exemple, la fonction semble d'abord croissante puis décroissante. Sur le graphique un maximum égal à 4 semble atteint en la valeur 3. Mise en place d'éléments de contrôle : l'image de 3 est bien 4 ; après calcul algébrique vérification que toute image s'écrit 4 plus quelque chose plus petit que 0 ou 4 moins quelque chose de plus grand que 0. Donc toute image est plus petite que 4. Il y a donc maximum en 3.
- Combiner les deux approches précédentes lorsque, par exemple, l'abscisse de l'extremum n'est pas directement lisible (cas d'une valeur non décimale).

Une porte ouverte à une certaine différenciation pédagogique

La maturité et la capacité d'abstraction que demandent la manipulation des expressions littérales et la mise en place de tels raisonnements sont différentes pour chaque élève et évoluent en cours d'année. Le professeur a toute latitude pour fixer les exigences du niveau de justification attendu dans un objectif d'apprentissage et de compréhension, de faire évoluer ces exigences en cours d'année et de les moduler suivant les élèves.

Par exemple on pourrait accepter d'un élève qu'il écrive à un moment de l'année :

- Je trace la courbe de la fonction avec ma calculatrice .
- Je reconnais une fonction polynôme du second degré ; les résultats du cours me permettent d'affirmer que les variations observées sont exhaustives. J'admets donc (je sais que ne l'ai pas démontré mais que ce résultat est juste) que l'allure de la courbe est bien .
- Avec la calculatrice, j'observe que le sommet de la parabole a pour abscisse $x = -4$. Pour le prouver, il faudrait que je démontre que $f(x)$ est toujours plus grand que $f(-4) = -40$ mais je ne vois pas comment faire.

Plus tard dans l'année, on pourra attendre de cet élève qu'il argumente davantage et que, par exemple, il justifie que le sommet de la parabole a bien comme abscisse -4 ou que $f(x)$ est bien toujours plus grand que -40 (par exemple sollicitation autonome un logiciel de calcul formel pour mettre $f(x)$ sous la forme -40 plus quelque chose de positif.)

Conduire certains élèves à étudier les variations d'une fonction en mobilisant l'effet sur l'ordre d'un enchaînement de fonctions de référence peut participer d'une saine différenciation pédagogique. De même, certains élèves peuvent accéder à une pratique de la démonstration formelle de la monotonie : pour démontrer qu'une fonction est croissante sur I, il suffit d'établir que pour tous nombres réels a et b dans I, a et b d'une part, $f(a)$ et $f(b)$ d'autre part sont dans le même ordre.

Mais, dans ce cadre, il faudrait veiller tout particulièrement à laisser aux élèves toute liberté de nommer comme ils le souhaitent les deux nombres choisis dans l'intervalle sans leur conseiller de nommer toujours de la même manière le plus grand. En effet un élève ne maîtrise véritablement cette compétence que s'il a bien compris que, de l'inégalité $f(a) < f(b)$ prise isolément, on ne peut rien conclure. Pour cela il faudrait cultiver une confrontation au problème :

« Tu obtiens $f(b) < f(a)$ et ton camarade obtient $f(a) < f(b)$ et pourtant il n'y a pas d'erreur ! »

c) Autour du travail à conduire sur les expressions algébriques

Au collège le travail sur le développement d'une expression algébrique est véritablement amorcé en quatrième alors que la factorisation n'est amorcée qu'en troisième, l'objectif étant simplement que les élèves sachent factoriser des expressions algébriques quand le facteur est apparent[2]. Les acquis des élèves ont donc de bonnes chances d'être plus solides sur « développer » que sur « factoriser ». En revanche transformer une expression rationnelle n'est pas un objectif du collège.

En seconde il s'agit de poursuivre cet apprentissage du calcul algébrique (qui sera à continuer aussi au cycle terminal).

Si un certain degré de maîtrise technique est à faire acquérir aux élèves et donc à travailler, il est essentiel, pour lui donner du sens, de toujours situer le calcul algébrique dans la perspective d'une résolution de problème, le fait d'associer à un problème une formule devant être obtenu des élèves eux- mêmes. Sur ce point précis, un objectif de formation prioritaire pour tout élève consiste à faire travailler l'intelligence du calcul, à donner des occasions de raisonner. Il est important de développer une aptitude à anticiper la forme de l'expression utile pour résoudre un problème. Pour ce faire, on peut conduire les élèves à réfléchir sur les différentes formes possibles que peut prendre une expression, en lien avec des courbes obtenues avec un traceur ou une calculatrice, et sur les questions auxquelles chacune de ces formes permet de répondre.

> Par exemple un élève qui cherche à trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles l'expression $f(x)$ prend la valeur 0 ou à étudier ce que l'on appelle le signe de $f(x)$, suivant les valeurs de x, devrait être en capacité de dire, sans aide, que c'est la forme factorisée qui convient. Un élève qui veut prouver que, pour toutes valeurs de x, $f(x)$ est toujours inférieur (resp. supérieur) à un nombre k, devrait penser à essayer de mettre $f(x)$ sous la forme k moins (resp. plus) quelque chose qui serait toujours positif.

Ce travail doit offrir aussi des occasions de démontrer (tout particulièrement pour obtenir une quantification universelle). Toutefois le degré de technicité attendu de certains élèves peut, et doit, rester modeste. Quand la complexité du calcul devient plus grande, ou du moins trop grande pour eux, un recours à des logiciels de calcul formel est possible et est à favoriser.

Voir exemple en Annexe 4

Une autre porte ouverte à la différenciation pédagogique

Acquérir de l'autonomie en calcul nécessite bien entendu une part d'entraînement technique. Toutefois faire acquérir cette maîtrise technique à tous n'est pas la priorité. En revanche les élèves qui ont des facilités en mathématiques ou qui auront besoin de faire des mathématiques d'un bon niveau pour réussir leur projet d'orientation doivent acquérir ces automatismes de calcul. Prolonger l'entraînement donné à tous en proposant à ces élèves des « gammes » supplémentaires, voire des « défis de calcul », peut participer de la différenciation pédagogique à mettre en place.

2. La factorisation et la notion d'équation ne sont pas des exigibles du socle commun

Quelques illustrations

1. Situation n°1 : Une histoire de diviseurs

Partie A :

À chaque nombre supérieur ou égal à 1, on associe le nombre de diviseurs de sa partie entière.

1. Quel(s) est (sont) le(s) nombre(s) associé(s) à 10 ? à 43, 7 ? à $\frac{182}{3}$?
2. Quel est le plus petit nombre auquel on associe 8 ?
3. Représenter graphiquement la situation de départ, pour tous les nombres compris entre 1 et 25.
4. On donne un nombre a quelconque. Quelles conditions doit respecter le nombre a pour qu'il puisse être le nombre associé à un nombre de départ ?

Partie B :

À chaque nombre supérieur ou égal à 1, on associe les diviseurs de sa partie entière.

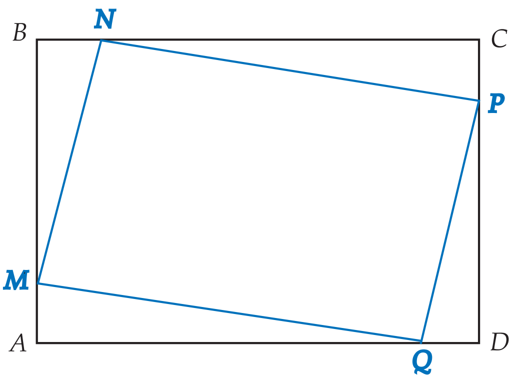
1. Quel(s) est (sont) le(s) nombre(s) associé(s) à 17 ? à 50, 9 ? à $\frac{106}{7}$?
2. Peut-on représenter graphiquement cette situation ? Si oui, réaliser cette représentation pour tous les nombres compris entre 1 et 25.

2. Situation n°2 : Le quadrilatère tournant

On considère un rectangle $ABCD$ de dimensions données, $AB = 6$cm, $BC = 8$cm. Sur le petit côté $[AB]$, on choisit un point M quelconque.

On considère ensuite les points N sur $[BC]$, P sur $[CD]$ et Q sur $[DA]$ tels que : $AM = BN = CP = DQ$.

On s'intéresse aux variations de l'aire ou du périmètre du quadrilatère $MNPQ$.



Pour l'aire, le calcul donne :

$$\text{aire}(MNPQ) = 48 - AM(6 - AM) - AM(8 - AM) = 48 - 2AM(7 - AM)$$

Pour le périmètre :

$$\text{per}(MNPQ) = 2\sqrt{AM^2 + (8 - AM)^2} + 2\sqrt{AM^2 + (6 - AM)^2}$$

Différents types de problèmes :

- Si on connaît la valeur de AM, peut-on déterminer la valeur de l'aire ? du périmètre ?
- Peut-on construire un quadrilatère dont l'aire est égale à un nombre donné ?
- Comment varie l'aire de $MNPQ$? (charge à l'élève de dire « varie mais en fonction de quoi ? »)
- Est-il possible de placer le point M de sorte que l'aire de $MNPQ$ soit la plus grande possible, la plus petite possible ?
- Est-il possible de placer le point M de sorte que le périmètre de $MNPQ$ soit le plus grand possible, le plus petit possible ?