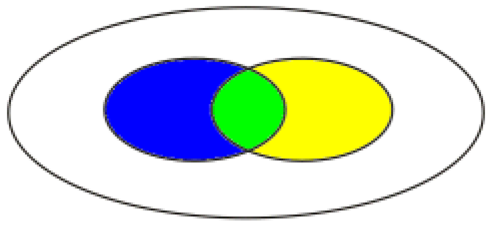
Dénombrement   Terminale S

I] Utilisation de diagrammes, de tableaux, d'arbres

1. Diagramme

Exemple : Un sondage auprès de 150 personnes a donné les résultats suivants :
A la question «Consommez vous régulièrement du café ?», 50 personnes répondent oui.
A la question «Êtes-vous amateur de thé ?», 80 personnes répondent oui.
A la question «Êtes-vous un amateur de thé consommant régulièrement du café ?», 35 personnes répondent oui.
Représenter ces données par un diagramme.
Combien de personnes sont des amateurs de thé ne consommant pas régulièrement du café ?
Combien de personnes consomment régulièrement du café et ne sont pas amateurs de thé ?
Combien de personnes ne sont pas amateurs de thé et ne consomment pas régulièrement du café ?
Combien de personnes sont amateurs de thé ou consomment régulièrement du café ?



2. tableau ; arbres

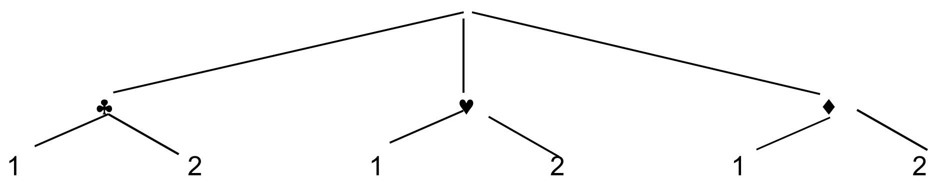
Définition : Etant donnés deux ensembles E et F, on appelle produit cartésien E x F, l'ensemble des couples (a ; b) avec $a \in E$ et $b \in F$.

Exemple :Soit E = {♣ ; ♥ ; ♦} et F = {1 ; 2}.
On peut, dans un tableau à double entrée, écrire tous les éléments de E x F .

E / F	♣	♥	♦
1	(♣ ; 1)	(♥ ; 1)	(♦ ; 1)
2	(♣ ; 2)	(♥ ; 2)	(♦ ; 2)

Le nombre d'éléments de E x F est :   card(E x F) = 6 = card(E) x card(F)

On peut utiliser une disposition en forme d'arbre pour retrouver tous ces éléments.



À chaque extrémité d'une branche de l'arbre correspond un élément de l'ensemble E x F :

(♣ ; 1)   (♣ ; 2)   (♥ ; 1)   (♥ ; 2)   (♦ ; 1)   (♦ ; 2)

Propriété : Si E et F sont des ensembles finis, le nombre d'éléments de E x F est égal au nombre d'éléments de E multiplié par le nombre d'éléments de F.

C'est-à-dire que l'on a :   card (E x F) = card(E) x card(F)

L'ensemble E x E est noté E^2 et on a $card(E^2) = [card(E)]^2$

Remarque: On peut généraliser le produit cartésien à plus de deux ensembles :

$E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ est l'ensemble des p-uplets $(a_1 ; a_2 ; ... ; a_p)$ avec $a_i \in E_i$.
et on a $card (E_1 \times E_2 \times ... \times E_p) = card(E_1) \times card(E_2) \times ... \times card(E_p)$

Si les ensembles E_1 ; E_2 ... E_p sont tous égaux à un même ensemble E, on note $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p = E^p$

et on a $card(E^p) = [card(E)]^p$

Exercice : Un restaurant propose à ses clients un menu qui se compose :

- d'une entrée à choisir parmi trois entrées possibles notées : E_1, E_2, E_3,
- d'un plat à choisir parmi quatre plats possibles : P_1, P_2, P_3, P_4,
- d'un dessert à choisir parmi quatre desserts possibles : D_1, D_2, D_3, D_4.

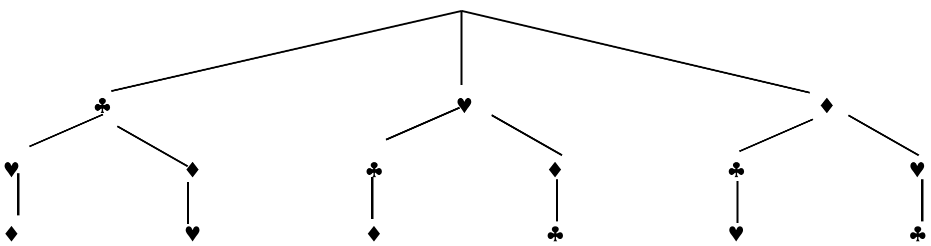
Combien un client peut-il composer de menus différents ?
Combien un client peut-il composer de menus comportant le plat P_2 ?

II] Permutations

1. Définition :

E est un ensemble fini et on note n son cardinal : Card(E) = n.
On appelle Permutation sur E toute n-liste des éléments de E.

Par exemple, si E = {a ; b ; c ; d} , une permutation de E est (a ; b ; d ; c) ou (b ; a; d ; c).
En revanche (a ; b; c ; c) n'est pas une permutation de E car l'élément "c" apparait 2 fois.
Une permutation de E est donc un élément de E^n dont lequel chaque élément de E apparait une et une seule fois.
Exemple :
Soit E = {♣ ; ♥ ; ♦} . On peut écrire toutes les permutations des éléments de E en utilisant un arbre :



On obtient 6 permutations : (♣ ; ♥ ; ♦) ; (♣ ; ♦ ; ♥) ; (♥ ; ♣ ; ♦) ; (♥ ; ♦ ; ♣) ; (♦ ; ♣ ; ♥) ; (♦ ; ♥ ; ♣).
Une permutation étant un triplet (a ; b ; c) d'éléments de E deux à deux distincts, on peut choisir le premier élément a de 3 façons dans l'ensemble E.
Pour chaque choix de a, on peut choisir le deuxième élément b de 2 façons possibles (puisqu'il doit être différent de a).
On a donc $3 \times 2 = 6$ façons de choisir les deux premiers éléments a et b.
Lorsque les deux premiers éléments sont choisis, il ne reste plus qu'une seule possibilité de choix pour le troisième élément c.
Le nombre de permutations des éléments de E est donc $3 \times 2 \times 1 = 6$

2. Propriété

Le nombre de permutations d'un ensemble ayant n éléments est : $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$.

Définition : Si n est un entier strictement positif, on appelle factorielle de n (ou n factorielle) le nombre noté n! égal au produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n.

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Par convention, on posera $0! = 1$.

Exemples : a)Dans une salle contenant 20 personnes, on veut faire sortir les personnes les unes après les autres. Ceci correspond à classer les personnes de la première à la vingtième. Il y a donc 20! façons de faire sortir les 20 personnes, c'est à dire 2 432 902 008 176 640 000 façons.
b) Avec les chiffres 1 ; 2 ; 3 ...; 9 , on veut écrire tous les nombres possibles en utlisant tous ces chiffres une et une seule fois (en base 10). Un tel nombre apparait alors comme une permutation des 9 chiffres. Il y a alors 9! = 362 880 nombres possibles.

3. **P-listes** : Il s'agit de compter toutes les listes possibles de p éléments parmi n en tenant compte de l'ordre et avec répétitions des éléments. Le nombre de ces listes est n^p.

Arrangements : On choisit p éléments parmi n **en tenant compte de l'ordre mais sans répétitions**.

$$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1) \quad = \quad \frac{n!}{(n-p)!}$$

III] Combinaisons

1. **Bijection d'un ensemble E sur un ensemble F:**
On appelle BIJECTION de E sur F toute application f vérifiant "

Pour tout y élément de F,
il existe un et un seul élément x dans E
tel que f(x) = y
ou encore
Tout élément de F admet
un et un seul antécédent
dans E par f

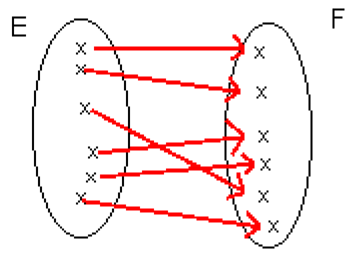


Diagramme d'une Bijection

Si E et F sont des ensembles finis, il existe une bijection de E sur F si et seulement si Card(E) = Card(F).
Dans ce cas, si Card(E) = Card(F) = n, le nombre de bijections possibles de E sur F est n!

2. Combinaison

E est un ensemble fini de cardinal n : Card(E) = n.
Pour p entier appartenant à {0 ; 1 ; 2 ; ... ;n}, on note E_p l'ensemble des parties de E ayant exactement p éléments.

a) Définition: On appelle Combinaison de p éléments pris parmi les n éléments de E tout choix de p éléments de E, sans ordre et sans remise. Cela correspond donc au choix d'une partie de E ayant p éléments, ou d'un sous-ensemble de E à p éléments.
C'est donc un élément de E_p.
Par exemple, si E = {1 ; 2 ; 3 ; 4}, choisir une Combinaison de 2 éléments parmi les 4 éléments de E, c'est choisir un de des ensembles suivants:

{1;2} ou {1;3} ou {1;4} ou {2;3} ou {2;4} ou {3;4}

Il faut attention à ne pas confondre {1;2} qui est la partie de E contenant les éléments 1 et 2, avec le couple (1;2) qui est un élément du produit cartésien ExE.
La partie {1;2} et la partie {2;1} sont identiques, alors que les couples (1;2) et (2;1) sont distincts.

Nombre de Combinaisons à p éléments dans un ensemble à n éléments:

Pour p quelconque compris entre 0 et n, on note $\binom{n}{p}$ ou C_n^p le nombre de Combinaisons de p éléments parmi les n éléments de E. Ce nombre correspond au cardinal de E_p.

On a $\binom{n}{p} = \dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\dots\times(n-p+1)}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$

b) **Propriétés :**
Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{p} = 0$ lorsque $p > n$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ $(0 \le p \le n)$
- $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ $(1 \le p \le n)$

c) **Exercice** : Pour remplir une grille de loto, il faut cocher 6 cases sur 49. Sachant que l'on met 10 secondes pour remplir une grille, combien de temps faudrait-il pour remplir toutes les grilles différentes possibles.

3. Triangle de Pascal

L'idée du triangle de Pascal est de présenter les $\binom{n}{p}$ ou C_n^p sous forme de tableau à double-entrées.

En colonne, les valeurs de p et en ligne les valeurs de n.
Les colonnes et les lignes sont numérotées à partir de 0, et la case correspond à la p-ème colonne et n-ème ligne est

le coefficient $\binom{n}{p}$ ou C_n^p.

Or les formules précédentes montrent deux choses.

1: Il y a une symétrie dans ce tableau car $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

2: Si on connait les éléments de la ligne (n-1), on connait automatiquement ceux de la ligne n par la formule

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

D'où le Triangle de Pascal:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**		**p-1**	**p**
0	**1**	**0**						
1	**1**	**1**	**0**					
2	**1**	**2**	**1**	**0**				
3	**1**	**3**	**3**	**1**	**0**			
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**			
n-1							C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^{p}
n								C_n^p

Exemples : Développer $(a + b)^2$; $(a + b)^3$; $(a + b)^4$. Écrire les résultats en utilisant les nombres $\binom{n}{p}$.

4. **Formule du binôme de Newton** :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $a \in \mathbb{C}$ et pour tout $b \in \mathbb{C}$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{p} a^{n-p} b^p + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Cette formule, valable pour des nombres réels, est bien entendu valable pour des nombres complexes .

Exercices : 1)En utilisant la formule du binôme de Newton, développer $\left(1+\sqrt{2}\right)^4$.

2) Appliquer la formule du binôme de Newton avec a = 1 et b = 1. Que peut-on en déduire ?

Propriété Le nombre de parties d'un ensemble de cardinal n est 2^n.

c'est-à-dire que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{p} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} = 2^n$

Dénombrements : quelles méthodes ?

Typesde tirages	Ordre	Répétitions d'éléments	Dénombrement
Successifs Avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p *p*-listes
Successifs sans remise		Un élément n'est tiré qu'une seule fois	A_n^p arrangements
Simultanés	L'ordre n'intervient pas		C_n^p combinatoires