

Objectifs : Pour résoudre des problèmes :

- _ Utiliser les propriétés des triangles, des quadrilatères, des cercles.
- _ Utiliser les propriétés des symétries axiale ou centrale.

I) Triangles

Un triangle ABC est un polygone à 3 côtés.

La somme des angles d'un triangle vaut 180° .

Périmètre du triangle ABC = AB + BC + CA.

Aire d'un triangle = (mesure d'un côté \times mesure de la hauteur associée) / 2

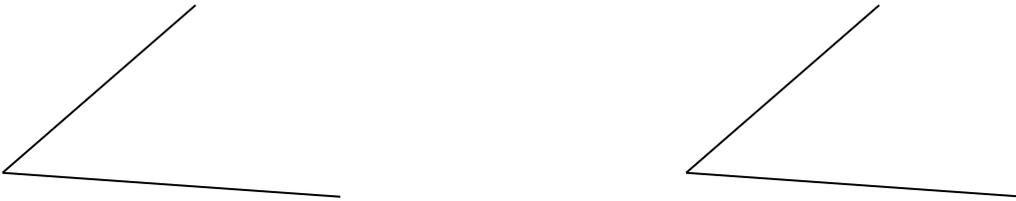
$S = \frac{b \times h}{2}$: Il y a donc trois façons possibles de déterminer l'aire d'un triangle.

Les droites remarquables du triangle sont les bissectrices, hauteurs, médianes et médiatrices.

1. Bissectrices et centre du cercle inscrit

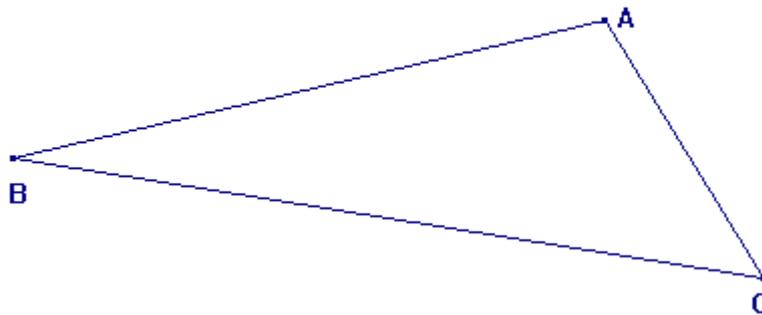
Définition : La bissectrice d'un secteur angulaire est la droite qui partage ce secteur en deux secteurs angulaires de même mesure.

Construction au compas ou au rapporteur : A compléter



Propriété : Les 3 bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes en un même point appelé le **centre du cercle inscrit**.

Remarque : Pour trouver le rayon du cercle inscrit, il faut projeter le centre du cercle orthogonalement sur l'un des côtés du triangle.



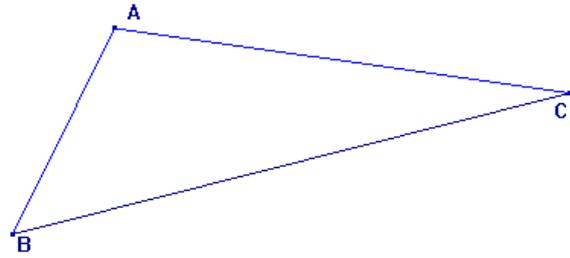
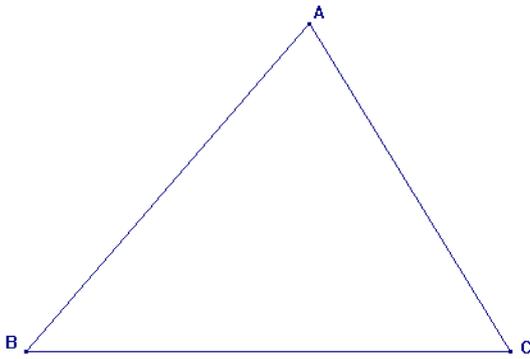
2. Hauteurs et orthocentre

Définition : Une hauteur d'un triangle est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

Propriété : les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes en un même point appelé **orthocentre**.

Remarque : l'orthocentre peut être à l'extérieur du triangle si celui-ci a un angle obtus.

Construire l'orthocentre H de ces deux triangles.



Cas particulier : La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a mesure $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

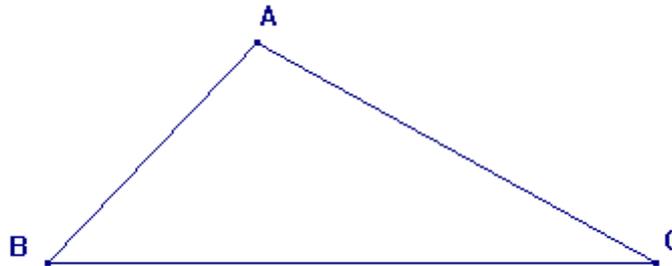
3. Médianes et centre de gravité

Définition : La médiane d'un triangle est la droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé.

Propriété : Les médianes d'un triangle sont concourantes, en un point appelé **centre de gravité**.

Propriété : Si G est le centre de gravité d'un triangle ABC alors G est situé au $\frac{2}{3}$ à partir du sommet sur la médiane; $AG = \frac{2}{3}AA'$ ou $A'G = \frac{1}{3}AA'$ ou $AG = 2GA'$, $BG = \dots$

Construire le centre de gravité de ce triangle :



4. Médiatrices et centre du cercle circonscrit

Définition : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment, passant par le milieu du segment.

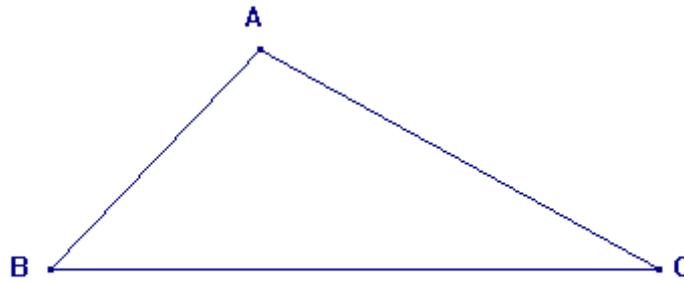
2 façons de construire une médiatrice : à la règle graduée et l'équerre ou à la règle et au compas



Propriété caractéristique : Tous les points de la médiatrice d'un segment sont équidistants des extrémités de ce segment.

i.e : Si M est sur la médiatrice de [AB], alors $MA = MB$; et Si un point K vérifie $KA = KB$, alors le point K est sur la médiatrice de [AB].

Propriété : Les 3 médiatrices des cotés d'un triangle sont concourantes, en un point appelé **centre du cercle circonscrit** au triangle.



5. Triangles particuliers

a) **ABC est un triangle isocèle en A** si et seulement si :

- Il a deux côtés égaux $AB = AC$
- Ou : Il a deux angles égaux $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$
- Ou : il a un axe de symétrie

Ou : La hauteur issue du sommet principal A est aussi la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} , la médiane issue de A et la médiatrice de [BC].

b) **ABC est un triangle équilatéral** si et seulement si :

- Il a 3 côtés égaux $AB = AC = BC$
- Ou : Il a 2 angles (au moins) égaux à 60° .
- Ou : il a 3 axes de symétrie (les médiatrices des côtés)
- Ou : Les hauteurs sont aussi les bissectrices, les médianes les médiatrices.

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a mesure $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, et comme O est aussi le centre de gravité du triangle, on a aussi

$$OA = OB = OC = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Remarque : Un triangle isocèle ayant un angle de 60° est équilatéral.

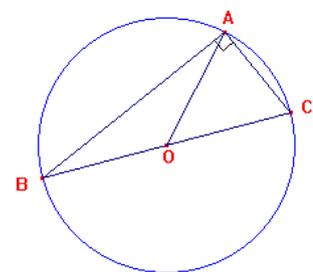
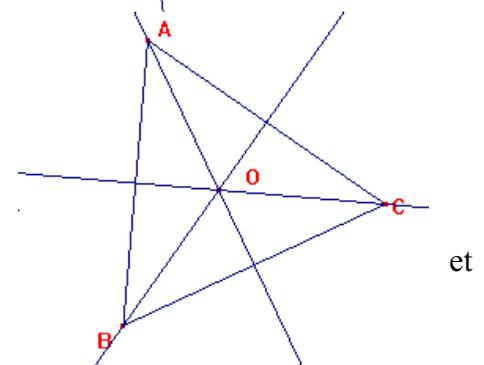
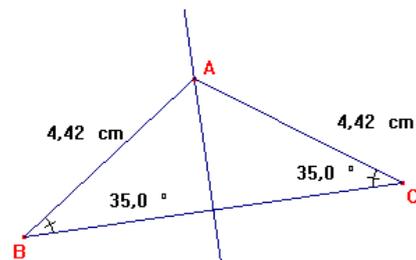
c) **Un triangle est rectangle** si et seulement si

- il a un angle droit.
- Ou : il a deux angles complémentaires
- Ou : il est inscrit dans un cercle (ou demi-cercle) et l'un de ses côtés est diamètre du cercle.
- Ou : la médiane relative a un des côtés mesure la moitié de ce côté.
- Ou : il vérifie la propriété de Pythagore.

ABC triangle rectangle en A .

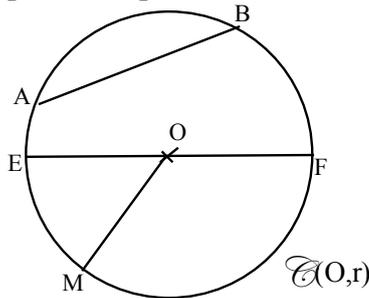
Le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'hypoténuse. Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit. $AO = OB = OC = BC / 2$

Dans un triangle rectangle, on peut appliquer les formules de trigonométrie.



II) Cercle et disque

Définition : le **cercle de centre O et de rayon r**, noté $C(O;r)$, est l'ensemble des points M du plan tels que $OM = r$; où r est un nombre réel positif.



[AB] est une corde

[EF] est un diamètre

[OM] est un rayon. $EF = 2 OM$

Périmètre du cercle = $2\pi r$

Les axes de symétrie d'un cercle sont les diamètres.

Attention : O est le centre du cercle mais O est le milieu de [EF]

Définition : le **disque de centre O et de rayon r**, noté $D(O;r)$, est l'ensemble des points M du plan tels que $OM \leq r$; où r est un nombre réel positif.

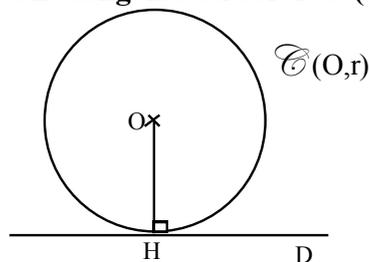
Aire du disque = πr^2

Positions relatives de deux cercles : concentriques ; sécants ; tangent intérieurement; tangents extérieurement, non sécants.

III) Tangente à un cercle

Une tangente à un cercle est une droite qui a un seul point commun avec ce cercle.

Une tangente au cercle $C(O ; r)$ en un point H est la perpendiculaire en H au rayon (OH) du cercle.



(D) est tangente à C en un point H.

IV) Symétries

Symétrie centrale : Le symétrique d'un point M quelconque par rapport à un point O est le point M' tel que O soit le milieu de [MM']. On note $s_O(M)=M'$.

O est le centre de la symétrie centrale. C'est le seul point invariant ($O = O' = s_O(O)$)

Symétrie axiale : Le symétrique d'un point M quelconque par rapport à la droite (d) est le point M' tel que (d) soit la médiatrice de [MM'].

La droite (d) est appelée axe de symétrie. Tous les points de (d) sont invariants.

Propriétés : La symétrie centrale et la symétrie axiale conservent les longueurs, les angles, l'alignement, les milieux et les aires.

Elles transforment une droite en une droite, un segment en un segment et un cercle en un cercle de même rayon.

