Brevet de technicien supérieur
novembre 2011 - groupement A Nouvelle-Calédonie

Exercice 1 **9 points**

Partie A

1. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'intégrale :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\cos(2t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\cos(2nt)\,\mathrm{d}t.$$

On admet que : $I_n = \dfrac{(-1)^n - 1}{2n^2}$.
Vérifier, à l'aide de cette formule, le résultat obtenu à la question 1.

Partie B

On considère la fonction f, périodique de période π, définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(t) & = & 2t & \text{si} \quad 0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{2} \\ f(t) & = & -2t + 2\pi & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2} \leqslant t < \pi. \end{array}\right.$$

1. Sur la figure 1 du document réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.
Les coefficients du développement de Fourier de la fonction f sont notés a_0, a_n et b_n où n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 1.
   a. Déterminer graphiquement la parité de la fonction f.
   b. En déduire b_n pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1.
2. **a.** Déterminer a_0.
   b. Montrer, en vous aidant de la partie A, que pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1 :

$$a_n = \frac{2\left[(-1)^n - 1\right]}{\pi n^2}.$$

3. **a.** Compléter le tableau 1 du document réponse avec des valeurs approchées à 10^{-5} près.
   b. On considère un nombre entier k supérieur ou égal à 1 et on pose :

$$P_k = a_0^2 + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

En utilisant les résultats du tableau 1, justifier qu'une valeur approchée de P_5 à 10^{-4} près est 3,289 3.

c. On note f_{eff}^2 le carré de la valeur efficace de la fonction f sur une période.

On admet que $f_{\text{eff}}^2 = \dfrac{\pi^2}{3}$.

À l'aide du tableau 1 et de la calculatrice, déterminer la plus petite valeur de k telle que :

$$\frac{P_k}{f_{\text{eff}}^2} > 0,999.$$

Exercice 2 **11 points**

Cet exercice comporte deux parties indépendantes.

Partie A

Chaque jour, une entreprise produit des condensateurs identiques en grande quantité. Chaque condensateur fabriqué peut présenter deux défauts : l'un au niveau des armatures, appelé défaut A, et l'autre, appelé défaut B, au niveau du diélectrique.
Une étude statistique a montré que 2 % des condensat.eurs fabriqués présentent le défaut A et 1 % le défaut B. La présence du défaut A sur un condensateur choisi au hasard dans la production est considérée comme un évènement aléatoire indépendant de la présence du défaut B sur le même condensateur.

1. On prélève un condensateur au hasard dans la production.

a. Calculer la probabilité que ce condensateur présente les deux défauts A et B.

b. Calculer la probabilité que ce condensateur ne présente aucun défaut.

c. Calculer la probabilité que ce condensateur présente au moins un des deux défauts.

2. On réalise des prélèvements aléatoires de 100 condensateurs dans la production. Chacun de ces prélèvements est assimilé à un tirage avec remise.

Un condensateur est dit défectueux lorsqu'il présente au moins un des deux défauts.

On admet, pour cette question, que la probabilité qu'un condensateur prélevé au hasard soit défectueux est 0,03.

On note X la variable aléatoire représentant le nombre de condensateurs défectueux dans un lot de 100 condensateurs prélevés au hasard.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'il y ait dans un lot exactement 3 condensateurs défectueux.

3. On suppose que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire X par une loi de Poisson de paramètre λ. On note Y la variable aléatoire suivant cette loi.

a. Déterminer la valeur de λ.

b. En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité à 10^{-3} près qu'il y ait au plus 3 condensateurs défectueux dans ce lot.

4. La capacité nominale des condensateurs est 210 μF . Un condensateur est déclaré « conforme » lorsque sa capacité réelle appartient à l'intervalle [189 ; 252].

On note Z la variable aléatoire qui associe à un condensateur choisi au hasard dans la production sa capacité réelle en μF.

On admet que la variable aléatoire Z suit une loi normale de moyenne 210 et d'écart type 12.

On prélève au hasard un condensateur dans la production.

Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que ce condensateur soit conforme.

Partie B

Cette partie est un questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de chaque question suivi de la réponse choisie. Une bonne réponse rapporte 1 *point,* ***une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.***

1. On considère dans cette question l'équation différentielle :

$$s'(t) + 100s(t) = 0. \qquad (1)$$

Parmi les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies ci-dessous, laquelle est une solution de l'équation différentielle (1) ?

- $f_1(t) = 10\cos(10t)$
- $f_2(t) = 10\mathrm{e}^{-100t}$
- $f_3(t) = 10\mathrm{e}^{100t}$
- $f_4(t) = 10\mathrm{e}^{-100t} + 5$

2. La fonction f définie, pour tout nombre réel t, par :

$$f(t) = 2\mathrm{e}^{-100t} + 20.$$

est solution de l'équation différentielle

$$s'(t) + 100s(t) = u(t). \qquad (2)$$

La fonction u est définie, pour tout nombre réel t, par :

- $u(t) = 2\,000$
- $u(t) = 20$
- $u(t) = 20\cos(10t)$
- $u(t) = 2\,000\mathrm{e}^{-100t}$

3. On considère l'équation différentielle :

$$s'(t) + 3s(t) = \sin(t). \qquad (3)$$

Soit la fonction g, solution de l'équation différentielle (3) telle que $g(0) = 0$. La fonction g est définie, pour tout nombre réel t, par :

- $g(t) = -0,1\cos(t) + 0,3\sin(t)$
- $g(t) = 0,1\mathrm{e}^{3t} - 0,1\cos(t)$
- $g(t) = 0,1\mathrm{e}^{-3t} + 0,3\sin(t)$
- $g(t) = 0,1\mathrm{e}^{-3t} - O,1\cos(t) + 0,3\sin(t)$

4. On considère l'équation différentielle :

$$q''(t) + 2q'(t) + 5q(t) = 0. \qquad (4)$$

Soit la fonction h, solution de l'équation différentielle (4) telle que $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$. La fonction h est définie, pour tout nombre réel t, par :

- $h(t) = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}$
- $h(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin(2t)$
- $h(t) = \dfrac{1}{2}\sin(2t)$
- $h(t) = \mathrm{e}^{-t}[\cos(2t) + \sin(2t)]$

Document réponse à joindre à la copie

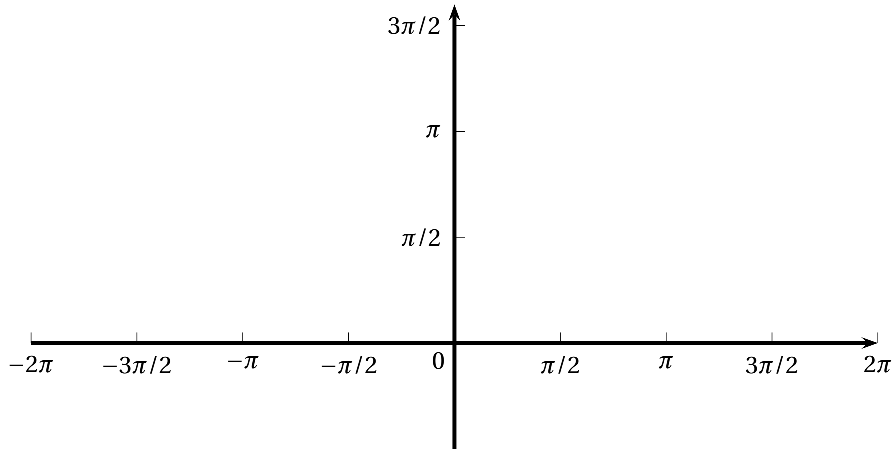

Figure 1 : représentation graphique de la fonction f (à compléter)

n	1	2	3	4	5	6
a_n en valeur exacte						
$\dfrac{a_n^2+b_n^2}{2}$ approché à 10^{-5} près						

Tableau 1 (à compléter)