collection Lycée
série Accompagnement des programmes

Mathématiques

classe terminale
série économique et sociale
série scientifique

programmes applicables à la rentrée 2002

Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche
Direction de l'enseignement scolaire

Centre national de documentation pédagogique

Ce document a été rédigé par le groupe d'experts sur les programmes scolaires de mathématiques :

Pierre Arnoux,
professeur des universités, Institut de mathématiques de Luminy (CNRS) et université de la Méditerranée

Antoine Bodin,
professeur, expert de l'OCDE, spécialiste de l'évaluation des compétences en mathématiques

Françoise Cellier,
professeure, lycée Charlemagne de Paris

Philippe Clarou,
professeur, IUFM de Grenoble

Gilles Godefroy,
directeur de recherche, CNRS-université Paris-VI

André Laur,
professeur, lycée Emmanuel-Mounier de Grenoble

Jean-Paul Quelen,
professeur, lycée Jean-Monnet de Strasbourg

Jean Moussa,
inspecteur général de l'Éducation nationale

Claudine Robert,
présidente du groupe d'experts, professeur des universités, université Joseph-Fourier de Grenoble

Erick Roser,
IA-IPR, académie de Poitiers

Nicolas Rouche,
professeur émérite, Centre de recherche sur l'enseignement des mathématiques, Belgique

Johan Yebbou,
professeur en CPGE, lycée Charlemagne de Paris

Consultante pour les technologies de l'information et de la communication :
Anne Hirlimann,
experte auprès de la SDTICE (direction de la Technologie)

Coordination et suivi éditorial :
Jérôme Giovendo,
bureau du contenu des enseignements (direction de l'Enseignement scolaire)

Maquette : Fabien Biglione
Maquette de couverture : Catherine Villoutreix
Mise en pages : Michelle Bourgeois
Suivi éditorial : Nicolas Gouny

ISBN : 2-240-00854-7
ISSN : 1624-5393

Sommaire

Annexe – Les graphes dans l'enseignement de spécialité

L'annexe ci-dessous est uniquement disponible sur le cédérom joint

Annexe – Probabilités et statistique en terminale ES et S

Préambule

Les mathématiques sont une discipline exigeante. Les élèves que nous invitons à l'effort sont en droit de se s'interroger sur les raisons qui poussent « à en faire ». Elles sont un langage universel, mieux adapté que tout autre à certains aspects de notre univers, et seul capable de décrire le monde physique à des échelles de temps ou d'espace étrangères à notre vie quotidienne. Science du nombre et de l'espace, elles permettent de formaliser, de modéliser, de prédire, mais encore d'énoncer leurs propres limites dans tous ces usages. Les élèves peuvent y pratiquer la démarche critique qui exige de chacun des arguments probants et ainsi apprécier les certitudes que ceux-ci fournissent. Ils peuvent encore expérimenter la capacité de modélisation des mathématiques, tout en comprenant que le modèle, le sondage, l'équation ne sont pas la réalité et doivent sans cesse y être confrontés. Les mathématiques participent ainsi, modestement mais profondément, à la formation des jeunes citoyens, en les éloignant des extrêmes également nuisibles que sont le rejet irrationnel de la connaissance scientifique et une science sans conscience.

Ce fascicule complète la série de documents d'accompagnement des nouveaux programmes du lycée en classe de seconde générale et technologique et dans le cycle terminal des séries générales. Cet ensemble forme un tout structuré en entités autonomes, par classe et par niveau, mais liés par divers renvois et complété par un cédérom proposant entre autres des logiciels et des applications réalisées par des collègues de diverses académies. Il définit les contours d'une culture commune à tous les enseignants de mathématiques.

L'objectif principal de ces documents est de donner des repères et des éclairages sur certains aspects du programme. On y trouvera des thèmes de travail consistants et des pistes d'activité à partir desquels il revient à chaque enseignant d'organiser le travail des élèves (très peu d'exemples sont directement « prêts à l'emploi »). La taille de chacun des chapitres est fonction de sa nouveauté et du choix des auteurs d'illustrer certaines démarches et, au-delà, de faire évoluer certaines pratiques pédagogiques ; elle ne doit pas être considérée comme un indicateur du temps à y consacrer, ni de l'importance des concepts en jeu. Ces documents sont aussi adressés aux enseignants de l'enseignement supérieur : ceux-ci pourront y trouver en particulier l'esprit de l'enseignement dispensé au lycée.

Le travail présenté ici est le fruit d'une réelle collaboration entre des enseignants du secondaire et du supérieur, et des membres des corps d'inspection. Il a aussi bénéficié des commentaires recueillis lors des journées interacadémiques regroupant des professeurs formateurs et tous les inspecteurs d'académie, inspecteurs pédagogiques régionaux de mathématiques. Il ne propose volontairement pas de bibliographie, ne conférant aucun caractère institutionnel au choix inévitablement limitatif de tel ou tel ouvrage ; néanmoins, plusieurs sites académiques en proposent et le Web rend accessibles de nombreuses ressources. Des exemples d'exercices sont donnés : ils apportent quelques précisions sur le niveau de compétences attendues, délimitant ainsi des contours précis pour ce que l'on peut attendre d'un élève en fin de terminale. Aucune « compétence exigible » n'est cependant formalisée : la publication d'une liste de ces compétences, bien que rassurante pour le proche avenir, ne manquerait de causer, à moyen terme, un certain appauvrissement des contenus, nuisant inévitablement à la cohérence du programme.

• La partie concernant la série scientifique s'ouvre sur une présentation générale du programme. Cette introduction prend sa place dans le débat qui entoure le renouvellement des programmes scolaires, débat parfois vif sur des points centraux de

l'enseignement des mathématiques : par exemple, quelle est la place de la démonstration dans l'enseignement des mathématiques ? Quel équilibre entre la formation d'élèves dans le cadre d'un parcours scolaire global et la préparation de candidats à l'examen du baccalauréat ? Quelle place pour le travail personnel des élèves ?
Le tronc commun de la série S comporte peu de nouveautés, dont certaines ne sont que de retour (ainsi de l'étude de la continuité…) Ce document a donc mis en avant la cohérence entre les contenus de l'année terminale, mais également leur lien avec ceux des années précédentes et des études supérieures. Il insiste aussi sur les questionnements historiques ou contemporains que ces contenus permettent d'entrevoir.
La partie consacrée à l'enseignement de spécialité de la série S met l'accent sur l'étude des similitudes, envisagée différemment par rapport au programme précédent.
Une annexe, sur l'étude de la radioactivité complète cette partie consacrée à la classe terminale : elle illustre la volonté d'introduire certains objets mathématiques (fonction exponentielle, lois de probabilité à densité continue) à travers l'étude de ce phénomène. Une grande partie des concepts et des raisonnements mathématiques sont nés, et naissent encore aujourd'hui, dans des chantiers scientifiques où, tels différents corps de métiers, chaque discipline a sa fonction et interagit avec les autres. Cette annexe sera également diffusée aux enseignants de physique-chimie et de sciences de la vie et de la Terre, contribuant ainsi au dialogue entre les enseignants de ces disciplines.

• Le programme du tronc commun de la série ES subit peu de changements par rapport au programme précédent. Ce document se contente donc d'en situer les grandes lignes et de traiter quelques thèmes illustrant la spécificité de cette série.
Le programme de l'enseignement de spécialité, en revanche, comprend une partie tout à fait novatrice, tant par son contenu que par l'approche qui en est préconisée : il s'agit de l'introduction d'éléments de la théorie des graphes, exclusivement traitée par la résolution de problèmes. Un exemple de ce qui pourrait être fait sur ce domaine est décrit dans une annexe, à travers une liste d'exercices. Cette liste témoigne de la faisabilité du programme proposé et peut évidemment servir de base au travail de préparation des enseignants, mais ne constitue en aucun cas un « programme d'exercices officiels ».

• À la fois dans les séries ES et S, l'approche des phénomènes aléatoires constitue une nouveauté importante. Une partie du programme de probabilités-statistique étant commune aux deux séries, ce chapitre fait l'objet d'une annexe valant pour les deux séries. On notera que les probabilités interviennent aussi dans l'annexe consacrée à l'étude de la radioactivité et dans le programme de l'enseignement de spécialité de la série ES, à travers les graphes probabilistes.
L'ensemble des documents proposés intègre l'usage des calculatrices, tableurs et logiciels de géométrie dynamique, dans le déroulement même des sujets exposés : pour cette raison, il n'est pas proposé de paragraphes spécifiquement dédiés à l'utilisation des technologies de l'information et de la communication. On trouvera, en complément sur le cédérom joint, des logiciels et des animations à utiliser dans le cadre du déroulement des programmes, ou plus particulièrement adaptés à l'auto-formation des enseignants.

Quelques éléments de ce document dépassent clairement les limites du programme : ils ont été rédigés afin de participer, aussi modestement soit-il, à la formation continue des enseignants. Ils sont repérés par une trame de fond bleutée.

Classe terminale
de la série scientifique

Orientations générales

Les enjeux de la classe terminale

La classe terminale marque la fin des études secondaires et, à travers l'examen du baccalauréat, ouvre la voie des études supérieures ; ces deux aspects influent profondément à la fois sur les choix faits dans le programme et sur les pratiques des enseignants et des élèves. Ils entraînent des contraintes inévitables et des points de vue divers, avec lesquels il faut composer.

Un enseignement en spirale sur le cycle terminal

Les programmes de terminale et de première S ne peuvent être lus indépendamment l'un de l'autre. C'est sur les deux ans que la plupart des notions du programme sont à construire et à installer, que les spécificités de la série S sont à développer. L'enseignement mathématique, tant sur une année donnée que sur l'ensemble du cursus secondaire, relève d'une démarche « en spirale » : on revient régulièrement sur une notion déjà étudiée pour la compléter, l'appliquer dans un nouveau contexte, l'insérer dans un cadre plus large… bref, la faire vivre.

> **Exemples**
>
> La notion de **limite** est introduite en première de façon intuitive, tant pour les fonctions en un point ou à l'infini que pour les limites infinies de suites ; il est en revanche demandé de présenter dès la première une définition formelle de la limite finie d'une suite et de prolonger en terminale ce travail de formalisation pour les limites d'une fonction à l'infini. Les mathématiciens ont longtemps travaillé sans une telle définition formelle et on pourrait envisager un enseignement secondaire qui s'appuie sur la seule intuition ; celle-ci reste à privilégier et, comme il est dit dans le document d'accompagnement de première S, il ne s'agit « en aucun cas de tout compliquer par une définition dont on ne comprend pas la nécessité ou d'essayer subrepticement de couper des ε en quatre ». Accéder à une définition formelle permet néanmoins de mieux comprendre le fonctionnement interne du monde mathématique : l'objectif est de situer la place et l'importance d'une telle définition dans la construction des mathématiques ; elle permet de préciser la notion en jeu et de démontrer les règles opératoires évoquées dans le programme mais ces démonstrations ne sont pas un objectif premier à ce niveau d'études.
> Les **coordonnées polaires** introduites en première et reprises en terminale lors de l'étude de la forme trigonométrique des nombres complexes, la **méthode d'Euler** développée sur un ou deux exemples en première pour faciliter l'introduction de la fonction exponentielle dès le début de terminale sont d'autres exemples d'une telle progression en spirale.

Avancer dans la compréhension des concepts et la maîtrise du calcul

À chaque étape du parcours scolaire est proposée la découverte de nouveaux problèmes, de nouveaux horizons, de nouveaux concepts : cela répond au souci de l'institution scolaire de former le plus complètement possible les jeunes qui lui sont confiés, en répartissant sur l'ensemble de la scolarité les divers objets d'enseignement selon leur adaptation aux capacités d'une classe d'âge. Cette adaptation tient compte de l'expérience passée (anciens programmes et habitudes d'enseignement, études validant telle ou telle progression…) ; elle doit aussi prendre en compte les réalités et les exigences de la société contemporaine. En ce qui concerne les mathématiques de la série S, on aura le souci d'avancer dans la découverte des nouveaux concepts malgré la moindre technicité que l'on peut observer aujourd'hui chez les élèves de cette section. La maîtrise du calcul reste un objectif de base de l'enseignement des mathématiques ; cette maîtrise est à rechercher et obtenir pour les situations élémentaires, telles celles des exemples 1 et 2 qui suivent ; elle donne l'aisance indispensable pour comprendre et traiter un problème sans se bloquer sur la moindre aspérité calculatoire. Cela a déjà été dit dans les documents d'accompagnement des classes antérieures : il convient de rester exigeant en la matière et de faciliter l'acquisition de réflexes qui tout à la fois libèrent la pensée et procurent confiance en soi. L'acquisition de ces réflexes doit cependant respecter l'intelligence du calcul et répondre à un besoin avéré sur le long terme ; s'il faut une maîtrise du calcul élémentaire (pour comprendre l'intérêt du calcul intégral ou des nombres complexes, par exemple), il est inutile de rechercher systématiquement la virtuosité. La compréhension des méthodes importe d'autant plus qu'à un certain niveau supérieur d'études (et dans un délai peut-être proche dans l'enseignement secondaire), les outils de calcul formel permettent d'aborder des situations calculatoires demandant une plus grande technicité ou de déléguer à la machine la réalisation de tâches techniques longues. Dans l'immédiat, les éventuels manques techniques ne doivent pas empêcher de progresser dans l'étude d'objets nouveaux, qui peut au contraire inciter à les combler.

Le préalable du calcul : exemples

1) Lors de l'étude de la fonction f suivante proposée en devoir surveillé : $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x}$, un certain nombre d'élèves, ayant calculé correctement $f'(x)$, ont été incapables de réduire l'étude du signe de $f'(x)$ à celle du signe de $2x^3 + x^2 - 1$! À ce niveau d'étude, ce type de difficulté constitue un obstacle majeur : les élèves en question ne maîtrisent pas suffisamment le calcul.

2) Le calcul de f' lorsque $f(x) = f(x) = \left(\frac{x^2-3}{x^2-1}\right)^2$ pose problème à de nombreux élèves. Ce calcul devrait être correctement conduit jusqu'à son terme par tout élève de la série S, y compris dans le cadre d'un devoir surveillé ; néanmoins une erreur de calcul paraîtra ici moins inquiétante.

3) Pour f définie par $f(x) = (1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$, le calcul de $f'(x)$ peut être un exercice d'entraînement (un élève de série scientifique doit être capable, en dehors de toute évaluation, de mener à bien ce calcul en l'organisant correctement) ; si ce calcul apparaît lors de la résolution d'un problème, le recours à un logiciel de calcul formel peut être la méthode la plus efficace pour faire le calcul ou en vérifier la justesse : cela n'enlève rien à la qualité du travail mathématique mené par l'élève.

Des réflexes mathématiques

La mémorisation de certaines formules est nécessaire au développement de l'intelligence du calcul : si on ne connaît pas la formule $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, comment aurait-on l'idée de retrouver dans une expression la forme $a^2 - b^2$ pour la factoriser ? Par ailleurs, la pratique répétée du calcul inscrit en mémoire un registre de situations et de formes auxquelles on pourra se ramener : plus riche est ce registre, plus grande sera la palette de situations techniquement maîtrisables.

Formation générale et/ou préparation à l'examen

L'enseignement de la classe terminale ne se réduit pas à la préparation de l'examen du baccalauréat : nous le rappelons ici avec force. L'objectif est la formation des élèves : une formation aussi complète et solide que possible, dans un cadre établi par le législateur et préparant l'avenir tant de l'individu qui reçoit cette formation que de la société qui l'a définie. De nombreux aspects de cette formation sont difficiles à prendre en compte lors de l'examen final du baccalauréat ; ils ne sont pas pour autant à négliger.
L'examen du baccalauréat motive fortement un grand nombre d'élèves ; il donne une échéance visible à leur travail scolaire. Il paraît donc judicieux, en dépit de ses aspects inévitablement codifiés, d'en user comme d'un levier pour le travail intellectuel. L'art de l'enseignant reste, comme par le passé, de résoudre des oppositions, de parfois contraindre pour ensuite convaincre ou tout au moins obtenir l'adhésion, de conjuguer au mieux l'entraînement intensif à une épreuve clairement identifiée et le développement harmonieux de capacités intellectuelles.
Faire des problèmes de baccalauréat est un entraînement naturel, qu'on ne saurait éliminer ; travailler sur des annales permet de se situer par rapport à cette épreuve. Cependant, les contraintes de l'examen national conduisent souvent à des énoncés amputés de tout aspect heuristique : durant l'année, on n'hésitera pas à en réécrire certains pour en relever l'intérêt mathématique.

Quel enseignement mathématique ?

La plupart des élèves issus de la série S compléteront leur formation en mathématiques. Certains d'entre eux les utiliseront, notamment dans le cadre de modélisations ou en interaction avec d'autres disciplines ; quelques-uns deviendront professeurs et/ou chercheurs dans une matière scientifique. Pour tous, l'enseignement de mathématiques se doit d'être une formation au maniement des concepts et de l'abstraction avec le souci premier de développer les capacités de les mettre en œuvre : l'impact au niveau d'une génération d'une formation en mathématiques ne se mesure pas tant au nombre de théorèmes et de propriétés qu'on retient, qu'à la manière d'aborder certaines situations dont les liens avec les mathématiques ne sont pas toujours explicitables (capacités de formalisation et de conceptualisation, d'action et d'interprétation rationnelle de faits sociaux, etc.).
Le programme précise les contenus et suggère un certain nombre de démarches : il demande en particulier d'associer résolution de problèmes et présentation de la théorie mathématique. Chaque enseignant peut avoir sa sensibilité propre : l'un peut préférer l'exposé rigoureux et sans faille d'un thème mathématique, l'autre prendre plaisir dans la recherche de problèmes ; pour certains, on apprend les mathématiques en vue de résoudre des problèmes, pour d'autres, résoudre des problèmes est la voie d'accès au monde mathématique. Si tel ou tel de ces aspects a pu être dominant lors du choix du métier d'enseignant, il importe que les deux soient présents dans son exercice.
Les deux paragraphes qui suivent développent cette double vision.

Enseigner les mathématiques : résoudre des problèmes

Résolution de problèmes : trois exemples

On trouve dans la littérature pédagogique des essais de classification des exercices et problèmes selon l'activité souhaitée pour l'élève ou le professeur. Les ouvrages de Georges Polyá restent des incontournables en la matière. On pourra aussi consulter utilement la grille proposée il y a plus de vingt ans dans le *Livre du problème* de l'IREM de Strasbourg.
Il est souhaitable que, durant l'année, soient abordés tous les types d'exercices ou problèmes (en relevant éventuellement avec les élèves les oppositions et les complémentarités entre ces types) : problèmes balisés ou problèmes plus ouverts ; problèmes pour la classe ou problèmes pour l'examen ; problèmes d'un jour ou problèmes d'un mois…
On réfléchira à la diversité des questions que l'on peut poser : explorer, formuler une

conjecture, la démontrer ou la réfuter par un contre-exemple, généraliser un résultat, percevoir l'analogie entre des problèmes apparemment distincts, supprimer une hypothèse dans un problème, chercher une nouvelle démonstration d'une propriété et la comparer avec d'autres peuvent servir de trame au travail mathématique dans la classe.
Dans les choix de problèmes, on pourra privilégier ceux qui permettent de croiser les divers secteurs des mathématiques, tels ceux développés dans les trois exemples qui suivent.

Exemple 1. De l'art de « moyenner »

(Activité pouvant prendre la forme d'énoncés pour des devoirs à la maison.)

Intentions
– Activités adaptées au début de l'année.
– Révision de connaissances de base (les courbes de fonctions de référence, des inégalités élémentaires…).
– Modélisation de situations élémentaires.
– Passage de l'imprécision relative du langage usuel à la nécessité de définitions univoques.
– Illustrations géométriques de définitions analytiques.
– Ouverture à un thème transversal des mathématiques…

Résumer deux ou plusieurs valeurs numériques en une seule, c'est en cela que consiste l'opération « prendre la moyenne ». Il existe de nombreuses façons de prendre ainsi la moyenne.

Partie I. Exemples
1) Calculez la vitesse moyenne sur un trajet de 200 km,
 a) sachant que vous avez roulé la moitié du temps à 120 km/h et l'autre moitié à 80 km/h ;
 b) sachant que vous avez roulé sur 100 km à 120 km/h, puis à 80 km/h.

2) Vous avez acheté un vendredi avant les vacances à votre banque 500 livres (sterling) à 1,636 € la livre, puis le dimanche suivant à l'hôtel 500 livres à 1,640 € la livre.
 a) Quel est le taux moyen de la livre sur l'ensemble de ces deux transactions ?
 b) Fin des vacances. Il vous reste des livres et vous les revendez : une première fois à 1,630 € la livre et vous obtenez 20 €, une deuxième fois à 1,628 € la livre et vous obtenez encore 20 €. Quel est le taux moyen de la livre sur l'ensemble de ces deux nouvelles transactions ?

3) Un rectangle a deux côtés de dimensions respectives 5 et 7. Comment définir la « moyenne » c de ces deux dimensions, de façon que le carré de côté c ait la même aire que le rectangle de départ ?

4) Deux carrés ont des côtés de dimensions respectives 5 et 7. Comment définir la « moyenne » c de 5 et 7 de façon que le carré de côté c ait une aire moyenne arithmétique des aires des deux carrés de départ ?

Partie II. Moyennes de deux réels strictement positifs *a* et *b*
Définitions : pour deux réels a et b strictement positifs, on définit :
– la moyenne ***arithmétique*** $m = \dfrac{a+b}{2}$ (c'est le sens usuel du mot « moyenne ») ;
– la moyenne ***harmonique*** h telle que son inverse soit moyenne arithmétique des inverses de a et b : $\dfrac{1}{h} = \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$;
– la moyenne ***géométrique*** $g = \sqrt{ab}$;
– la moyenne ***quadratique*** q telle que son carré soit la moyenne arithmétique des carrés de a et b.

1) a) Exprimer h et q en fonction de a et b.
b) De quelle moyenne s'agit-il dans chacun des six exemples ci-dessus ?
c) Prouver que, pour deux réels a et b strictement positifs tels que $a < b$, on a :

$$\boldsymbol{0 < a < h < g < m < q < b.}$$

Que se passe-t-il si $a = b$?
d) Étendre les définitions précédentes à trois réels strictement positifs a, b et c.

2) Moyenne associée à une fonction
a) Représenter dans le même repère les fonctions carré et inverse définies sur $]0\,;+\infty[$.
b) Placer deux réels a et b strictement positifs sur l'axe des abscisses. Utiliser alors le dessin pour placer les moyennes h et q de a et b, à l'aide des seules constructions élémentaires suivantes (que l'on précisera) :
– construction de l'image d'un réel par une fonction f représentée graphiquement ;
– construction de l'antécédent d'un réel par une fonction f représentée graphiquement ;
– construction de la demi-somme ou moyenne arithmétique de deux réels représentés sur un même axe.

c) Toute moyenne peut ainsi être associée à une fonction f : le réel c est « ***moyenne au sens de f*** » de a et b si on a $f(c) = \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$ (cela n'a de sens que si f vérifie certaines « bonnes » propriétés, non étudiées ici : à savoir fonction strictement monotone et bijective).

Ainsi :
– la moyenne harmonique est associée à la fonction inverse ;
– la moyenne quadratique à la fonction carré ;
– la moyenne arithmétique à la fonction identité ;
– la moyenne géométrique à la fonction logarithme (qui sera étudiée cette année).
Comment pourrait-on définir une moyenne « cubique » ?

3) Illustrations géométriques
Dans chacune des figures ci-contre, représentant un trapèze ABCD, on pose AB = a et CD = b. (MN) est parallèle à (AB).
Prouver que MN représente la moyenne de a et b :
– arithmétique dans la figure 1 ;
– géométrique dans la figure 2 ;
– harmonique dans la figure 3 ;
– quadratique dans la figure 4.

Figure 1: M milieu de [AD]

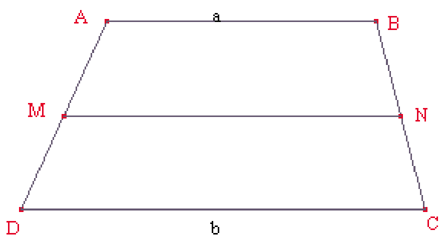


Figure 2: ABNM et NCDM sont semblables

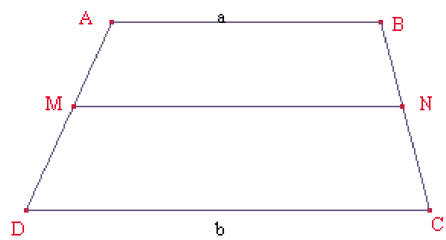


Figure 3: (MN) passe par le point d'intersection des diagonales

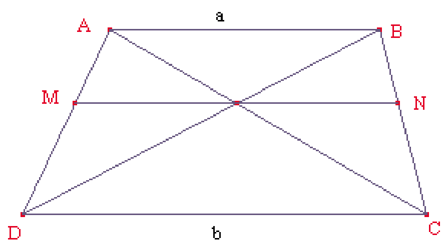
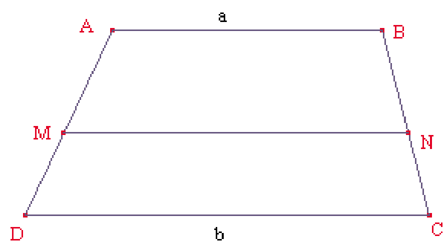


Figure 4: ABNM et MNCD ont même aire



Remarques – On peut aussi, au lieu de donner les quatre figures, les faire construire (tout au moins les figures 1, 2 et 3). Dans ce cas, il faudra d'abord assurer l'existence de M pour chacune des quatre moyennes demandées ; ceci pourrait être fait en cours en usant d'un argument de continuité : quand M décrit le segment [AD] de A vers D, la longueur MN croît continûment de a à b et prend donc une fois et une seule chacune des valeurs m, g, h et q.
– Cette notion de *moyenne* se retrouve en statistiques, en probabilité (espérance mathématique, écart-type), dans le calcul barycentrique. Elle est également présente en calcul intégral, à propos de valeur moyenne d'une fonction sur un segment ; mais, en passant du discret au continu, on change de dimension.

Exemple 2. Le problème de la duplication du cube

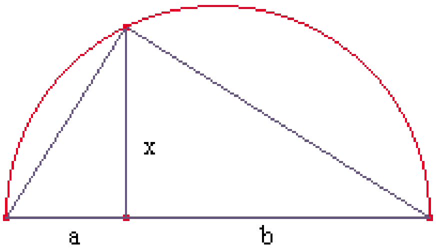
(Celui-ci pourra servir de trame à plusieurs séances de travail.)
La duplication du cube est l'un des trois principaux problèmes non résolus des mathématiques grecques (les deux autres étant la quadrature du cercle et la trisection d'un angle). Problème posé au moins cinq siècles avant J.-C., il n'a été vraiment résolu qu'au XIXe siècle, lorsqu'on a su caractériser les équations polynomiales résolubles à l'aide des quatre opérations et des extractions de racines.
Ce problème a suscité de nombreux travaux ainsi que la construction d'instruments (règles de Platon, *mésolabe* d'Érathostène…) adaptés à déterminer en pratique des solutions approchées. On développe ci-dessous quelques éléments de cette longue histoire, choisis parce qu'ils permettent entre autres :
– de réfléchir sur la notion de solution exacte ou approchée, tant en géométrie qu'en analyse ;
– d'utiliser les propriétés des triangles semblables ;
– de découvrir une intervention de la continuité ;
– de faire apparaître une fonction dont on peut faire une étude conventionnelle ;
– d'approcher un nombre réel par deux suites adjacentes de nombres rationnels ;
– de croiser les points de vue numérique, analytique et géométrique.

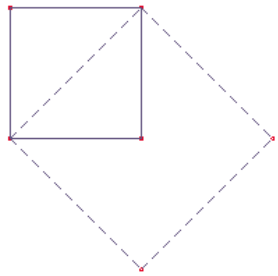
Partie I. Un texte attribué à Ératosthène
« Ératosthène au roi Ptolémée, salut.
On raconte qu'un ancien auteur tragique met en scène Minos faisant préparer une tombe pour Glaucon. Ayant appris que de chaque côté, elle avait cent pieds, il dit : "Tu as désigné certes un petit enclos pour la tombe d'un roi ; qu'il soit double ; sans détruire ses belles proportions, double donc au plus tôt chaque côté de la tombe."
Il s'est visiblement trompé : en effet, si l'on double les côtés, la figure plane devient quadruple, le solide, huit fois plus grand. Mais, même chez les géomètres, on recherchait de quelle manière on pourrait doubler le solide donné en lui conservant la même figure. Et ce problème était appelé la duplication du cube ; en effet s'étant donné un cube, ils cherchaient à le doubler.
Tandis que tous hésitaient depuis longtemps, Hippocrate de Chio le premier trouva que, si entre deux droites données, dont la plus grande est double de la plus petite, on parvient à obtenir deux moyennes proportionnelles en proportion continue, la duplication du cube sera obtenue ; et ainsi, son hésitation se transforma en une autre hésitation non moins grande.
Quelque temps après, dit-on, certains habitants de Délos, ayant reçu d'un oracle l'ordre de doubler un des autels, tombèrent dans la même hésitation. Ils envoyèrent donc demander aux géomètres qui étaient auprès de Platon, dans l'Académie, de trouver pour eux la solution… »
D'après Dedron P. et Itard J., *Mathématiques et mathématiciens*, Magnard, 1972, qui soulignent le caractère non confirmé de cette source.

Explication de texte – Le nombre chez les Grecs
En notations modernes, construire un cube de volume double de celui d'un cube de côté a donné revient à chercher le côté x tel que $x^3 = 2a^3$, a étant le côté du cube initial.
Pour les Grecs, un nombre est avant tout un rapport de longueurs ; construire un nombre donné, c'est donc construire deux segments (« droites » dans le texte ci-dessus)

dans le rapport voulu, les seules constructions permises se faisant à la règle et au compas. Une « droite » x est moyenne de deux autres « droites » a et b si $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$; x est alors moyenne géométrique de a et b ; la construction est simple à la règle et au compas : voir la figure à gauche ci-dessous utilisant la similitude des deux triangles rectangles intérieurs.

La duplication du carré se résout facilement : voir figure à droite avec la diagonale du carré de côté a.





Insérer deux moyennes proportionnelles, comme le propose Hippocrate de Chio, entre deux longueurs données a et b, c'est chercher deux autres longueurs x et y telles que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$; on a alors $\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \times \frac{x}{y} \times \frac{y}{b} = \frac{a}{b}$, soit avec $a = 1$ et $b = 2$, $x = \sqrt[3]{2}$.

Une solution attribuée à Platon (utilisation d'un principe de continuité)

Figure 1

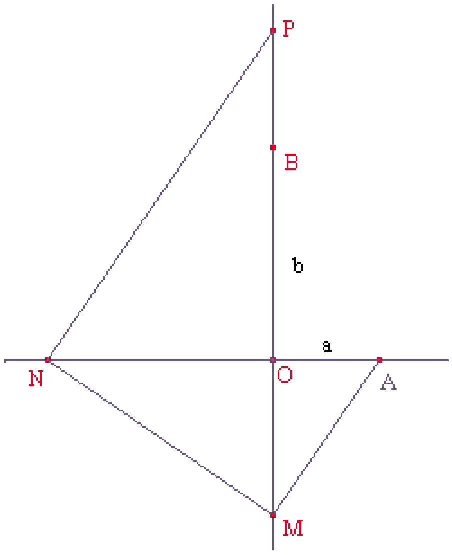
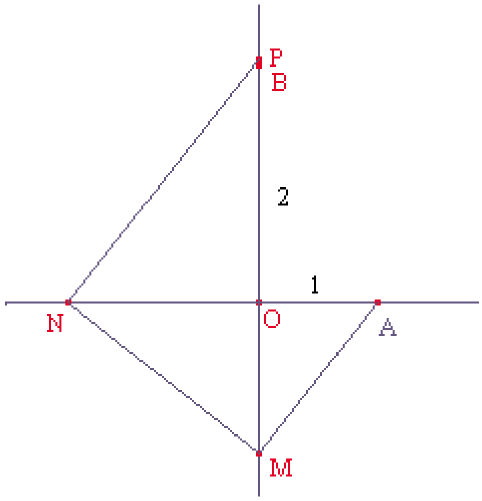


Figure 2

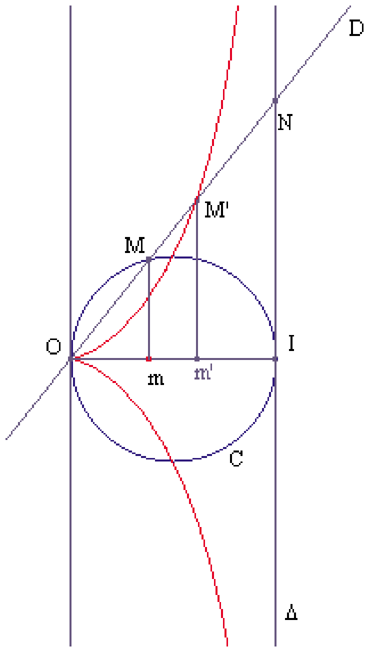


Sur la figure 1, à partir de A et M sur les droites perpendiculaires (OA) et (OB), on construit la perpendiculaire en M à AM qui coupe (OA) en N, puis la perpendiculaire en N à (MN) qui coupe (OB) en P. On a alors $\frac{OA}{OM} = \frac{OM}{ON} = \frac{ON}{OP}$; on a ainsi inséré deux moyennes proportionnelles OM et ON entre OA et OP.

Sur le plan théorique, en déplaçant M continûment sur sa demi-droite, le point P parcourt toute la demi-droite [OB) : il passe une fois et une seule par toute position donnée sur cette demi-droite. Il y a là l'intervention intuitive d'un principe de continuité, qui assure l'existence d'une position M pour laquelle P est confondu avec B (figure 2) ; alors OM = $\sqrt[3]{2}$.

En pratique, Platon a conçu un instrument s'appuyant sur le schéma ci-dessus ; du point de vue des Grecs, cette méthode fournit une approximation de la solution (l'existence théorique de la solution posant un problème crucial), mais aucune construction à la règle et au compas n'a pu (et pour cause) être trouvée.

Aujourd'hui, un logiciel de géométrie dynamique permet d'avoir l'impression de déplacer continûment le point M (en fait, on le déplace pas à pas et on s'arrête lorsque la précision de dessin ne permet plus de distinguer B et P) ; mais, il ne s'agit que d'une solution approximative. Pour une solution exacte au sens de la constructibilité à la règle et au compas, les points doivent être obtenus par intersection de deux droites, de deux cercles ou d'une droite et d'un cercle au terme d'une construction ne faisant intervenir qu'un nombre fini d'étapes. On trouvera d'autres indications sur les problèmes de constructibilité dans le document d'accompagnement de l'option facultative de la série L.



Partie II. Une solution de Dioclès : à l'aide de la cissoïde

On se donne ci-contre un cercle de diamètre [OI] (on peut supposer OI = 1) et la perpendiculaire Δ à (OI) en I. On fait tourner une droite D autour du point O : elle coupe le cercle en un deuxième point M et la droite Δ en N ; à tout point M, on fait correspondre le point M' de [ON] tel que NM' = OM.

Le lieu du point M' quand M décrit le cercle est appelé cissoïde de Dioclès. (Cette courbe a été effectivement introduite par Dioclès – IIe siècle avant J.-C. – pour résoudre le problème de la duplication du cube.)

L'équation de la cissoïde (dans le repère (O, I, J) s'obtient en utilisant les triangles semblables.

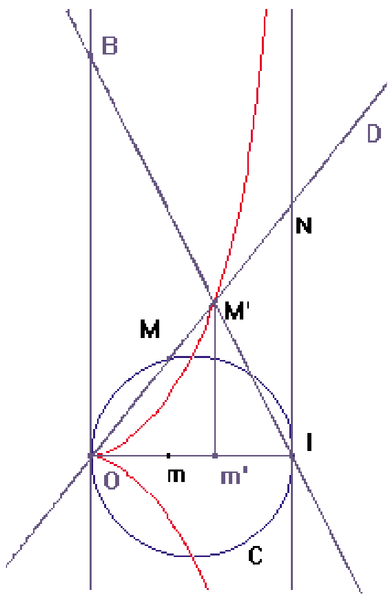
On a : $Mm^2 = Om.mI$ (car OMI est rectangle en M),

$= Om.Om'$ (car OM' = MN, donc Om' = mI)).

D'où $\dfrac{Om'}{Om} = \dfrac{Mm^2}{Om^2} = \dfrac{M'm'^2}{Om'^2}$ et $\dfrac{Om'^3}{Om} = M'm'^2$.

En notant x = Om' et y = M'm', on a Om = m'I = $1 - x$ et obtient l'équation de la cissoïde : $y^2 = \dfrac{x^3}{1-x}$.

Dans le cas où M' est « au-dessus », on peut alors étudier la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ (cas intéressant de fonction dans laquelle intervient une fonction composée avec $\sqrt{\ }$; la recherche de la dérivée en 0 – élémentaire au demeurant – peut se faire en revenant à la définition même de nombre dérivé en un point).



Pour obtenir une construction de $\sqrt[3]{2}$, il suffit maintenant de placer sur un axe perpendiculaire en O à (OI) le point B tel que OB = 2.

Au plan théorique, soit M' le point d'intersection de (IB) et de la cissoïde.

On avait obtenu ci-dessus : $\dfrac{Om'}{Om} = \dfrac{Mm^2}{Om^2} = \dfrac{M'm'^2}{Om'^2}$.

On a maintenant de plus $\dfrac{Im'}{1} = \dfrac{M'm'}{2}$.

D'où Om = Im' = $\dfrac{M'm'}{2}$ et donc $\dfrac{2Om'}{M'm'} = \dfrac{M'm^2}{Om'^2}$,

d'où enfin $2 = \dfrac{M'm'^3}{Om'^3} = \dfrac{IN^3}{OI^3} = IN^3$ et donc IN = $\sqrt[3]{2}$.

On montre ainsi l'existence de la solution ; toutefois, on ne peut tracer qu'un nombre fini de points de la cissoïde et il s'agit, là aussi, d'une solution approchée.

Partie III. Approche de $\sqrt[3]{2}$ par des suites adjacentes

Pour les Grecs, il s'agissait de construire à la règle et au compas une longueur ; les nombres irrationnels sont venus enrichir les ensembles de nombres connus et d'autres questions se sont posées, dont celles de l'irrationalité et de l'approximation rationnelle de $\sqrt[3]{2}$.

Approximation décimale

La fonction cube est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; le réel 2 a donc un antécédent unique $\sqrt[3]{2}$ que l'on peut approcher, en l'encadrant – à l'aide de balayages successifs – par des décimaux, les calculs se faisant avec la calculatrice.

On obtient ainsi successivement :

$1 < \sqrt[3]{2} < 2$ (car $1^3 < 2 < 2^3$)

$1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3$ (car $1{,}2^3 = 1{,}728 < 2 < 1{,}3^3 = 2{,}197$)

$1{,}25 < \sqrt[3]{2} < 1{,}26$ (car $1{,}25^3 = 1{,}953125 < 2 < 1{,}26^3 = 2{,}000376$)

…

Ce point de convergence peut-il être rationnel ?

On peut dans un premier temps se poser simplement la question : $\sqrt[3]{2}$ est-il décimal ? Si $\sqrt[3]{2}$ était rationnel de la forme $\frac{p}{q}$, avec $\frac{p}{q}$ irréductible, on aurait alors $p^3 = 2q^3$, p^3 et donc p seraient pairs, puis q aussi et donc la fraction ne serait pas irréductible.

Deux suites adjacentes convergeant vers $\sqrt[3]{2}$

Il s'agit des deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_n = \frac{2}{u_n^2}$ pour tout n.

Preuve :

1) Pour tout n, $u_n^2 v_n = 2$; d'où :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{u_{n+1}^2} = \frac{u_{n+1}^3 - 2}{u_{n+1}^2} = \frac{u_{n+1}^3 - u_n^2 v_n}{u_{n+1}} = \frac{(2u_n + v_n)^3 - 27u_n^2 v_n}{27u_{n+1}^2} = \ldots = \frac{(u_n - v_n)^2 (8u_n + v_n)}{27u_{n+1}^2} \quad (1)$$

et donc $u_n \geqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 1$. L'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.

2) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) - u_n = \frac{1}{3}(v_n - u_n) \leq 0$, d'où (u_n) est décroissante.

3) Pour tout n, $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{u_{n+1}^2} - \frac{2}{u_n^2} = \frac{2(u_n - u_{n+1})(u_n + u_{n+1})}{(u_{n+1}u_n)^2} \geq 0$, d'où (v_n) est croissante.

4) D'où, pour tout n, $8u_n + v_n \leqslant 9u_0 = 18$ et $27\, u_{n+1}^2 \geqslant 27\, v_2^2 > 27$ (on a en effet $v_2 = 1458/1225$, soit $v_2 > 1$)

et d'après (1), pour tout $n \geqslant 2$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{2}{3}(u_n - v_n)^2 \leq \frac{2}{3}(u_n - v_n)$ (on a $0 \leqslant u_n - v_n < 1$ car $1 \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \geqslant 2$). Par récurrence, pour $n \geqslant 2$, $u_n - v_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et donc $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

5) Les deux suites sont donc adjacentes ; elles convergent vers une même limite a telle que $a^3 = 2$.

Remarque – On crée ainsi deux suites de rationnels convergeant vers $\sqrt[3]{2}$: $2, \frac{3}{2}, \frac{35}{27}, \frac{125116}{92225}, \ldots$ pour (u_n) et $\frac{1}{2}, \frac{8}{9}, \frac{1458}{1225}, \ldots$ pour (v_n).

La convergence est très rapide ; la majoration $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{2}{3}\left(u_n - v_n\right)^2$ montre que si l'encadrement de $\sqrt[3]{2}$ est d'amplitude 10^{-n} au rang n, il est d'amplitude inférieure à 10^{-2n} au rang suivant.

D'où viennent ces deux suites ?

C'est une extension de la méthode dite de Héron pour approcher $\sqrt{2}$ à l'aide de deux suites adjacentes de rationnels (u_n) et (v_n) définies par $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + v_n\right)$ et $v_n = \frac{2}{u_n}$ avec $u_0 = 2$.

C'est une application de la méthode de Newton d'approximation du zéro de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 2$; dans cette méthode, on utilise la suite (u_n) définie par u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ où g est définie par $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ (g a donc $\sqrt[3]{2}$ pour point fixe) ; ici, $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3 - 2}{3u_n^2} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{2}{u_n^2}\right)$; on retrouve les suites adjacentes ci-dessus en posant $v_n = v_n = \frac{2}{u_n^2}$. On peut aussi travailler directement sur la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = g(u_n)$, illustrer le comportement de la suite à l'aide de la représentation graphique de g et prouver qu'elle est décroissante et minorée…

Exemple 3. La suite de Fibonacci

(Plus approprié aux élèves suivant l'enseignement de spécialité.)
La suite de Fibonacci (F_n) est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et pour tout $n \geqslant 0$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (1).$$

Elle figure dans le *Liber Abaci* composé en 1202 par Léonard de Pise, dit Fibonacci, dans le cadre d'une récréation mathématique, puisque cette suite modélisait la croissance d'une famille fictive de lapins sur une île déserte. Il ne s'agissait sans doute pour Fibonacci que de la présentation amusante d'une mise en équations (d'ailleurs assez subtile), mais il est piquant de constater que la relation (1) a été utilisée par les démographes modernes (comme Alfred Lotka) dans la théorie des populations stables, et que la suite de Fibonacci joue un rôle dans la géométrie de la croissance des plantes (répartition des feuilles sur une tige, des étamines, etc.).

Intentions

Il ne s'agit pas ici d'inciter à l'étude des suites récurrentes d'ordre 2 (leur étude systématique n'est pas au programme), mais simplement de s'appuyer sur un sujet attrayant, d'un abord facile, riche de développements dans des domaines divers (numérique, algébrique, analytique, géométrique) et ayant un caractère culturel notoire. Certains aspects de ce sujet ont été développés dans le document d'accompagnement de l'option de terminale L, auquel on pourra aussi se référer. Parmi les items suivants, certains pourront servir d'application directe du cours, d'autres de support à une recherche personnelle autonome, d'autres enfin – plus difficiles – de prolongement facultatif pour des élèves motivés. Les paragraphes III et V.2 ne concernent que les élèves suivant l'enseignement de spécialité.

I. Expérimentations numériques

Calcul des premiers termes à la main, puis avec une calculatrice programmable ou un tableur.
Calcul des quotients de deux termes consécutifs ; conjecture.

II. Démonstration par récurrence d'identités algébriques
Par exemple :

$$F_0 + F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$
$$F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$
$$F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n+1} \qquad (2)$$
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad (3)$$

Remarque – Cette dernière identité pourra être motivée par la recherche de suites géométriques vérifiant la relation (1). Une expérience frappante consiste à observer le comportement sur tableur ou calculatrice de ces deux suites en fonction du mode de calcul de leurs termes successifs ($u_{n+1} = q\, u_n$ ou $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$).

III. Propriétés arithmétiques
Deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.
Cela découle de la formule (2) et du théorème de Bezout, ou bien de l'application de l'algorithme d'Euclide.

L'algorithme d'Euclide appliqué à F_{n+1} et F_n aboutit en n étapes ($F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$; … ; $F_3 = F_2 + F_1$; $F_2 = F_1$). Tous les quotients étant égaux à 1, F_{n+1} est le plus petit entier naturel pour lequel l'algorithme *marche* ainsi en n étapes (en effet, soit u_1 et u_2 deux entiers naturels avec $u_1 > u_2$ tels que l'algorithme *marche* en n étapes ; on a alors $u_1 = q_1\, u_2 + u_3$; $u_2 = q_2\, u_3 + u_4$; … ; $u_n = q_n\, u_{n+1}$ avec $u_k > u_{k+1} > 0$ et $q_k \geqslant 1$ pour $k = 1, 2, \dots, n$; on en déduit immédiatement $u_1 \geqslant F_{n+1}$).

Si n divise p, alors F_n divise F_p.
On pourra remarquer pour cela que la suite des congruences modulo F_n obéit également à la formule (1) ; on en déduit par récurrence d'abord que, pour tout r, $F_{n+r} \equiv F_{n+1} F_r$ (modulo F_n), ensuite que pour tout k, $F_{kn} \equiv 0$ (modulo F_n).
On pourra approfondir ce résultat en montrant que plus généralement, le P.G.C.D. de deux termes F_n et F_p est F_d, où d est le P.G.C.D. de n et p. Pour cela, on pourra d'abord montrer la formule suivante :
pour $n \geqslant k$, $F_n F_{k+1} - F_k F_{n+1} = (-1)^k F_{n-k}$.
On écrira ensuite $d = an - bp$ et on utilisera cette formule pour écrire F_d comme combinaison à coefficients entiers de F_{an} et F_{bp}, puis de leurs diviseurs F_n et F_p. Puisque de plus F_d divise F_n et F_p, il s'ensuit que c'est leur P.G.C.D.

IV. Deux suites adjacentes convergeant vers le nombre d'or
Pour $n \geqslant 1$, soit $R_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$. Montrer que $R_{n+1} = f(R_n)$, où $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$. En déduire que la suite des termes de rang impair est croissante, que la suite des termes de rang pair est décroissante, que ces deux suites sont adjacentes et qu'elles ont pour limite commune le nombre $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On pourra faire le lien avec le développement en fraction continue de Φ (voir le document d'accompagnement de l'option facultative de terminale L). Notons que le fait que les termes successifs de ce développement en fraction continue soient les plus petits possibles (car tous égaux à 1) implique que Φ et ses équivalents sont les nombres réels qui s'approchent quantitativement le plus mal par des rationnels (voir par exemple : Hardy G. H., Wright E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5e édition, Oxford Science Publications, 2000).

V. Aspects géométriques

1) Géométrie du pentagone régulier et nombre d'or : voir le document d'accompagnement de l'option facultative de terminale L

Il est nécessaire de montrer d'abord que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Pour cela, on remarque que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est la partie réelle de $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et que ce nombre est racine de l'équation $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$. On divise alors cette équation par z^2, puis on remarque que $z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2$, donc que $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine de l'équation $u^2 + u - 1 = 0$, d'où sa valeur.

2) Similitude et rectangle d'or

Par construction (figure 1 ci-dessous où le cercle en pointillés est centré en le milieu de [AO]), la longueur AB vaut $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, soit le nombre d'or, noté Φ.

Sur la figure 2, on construit alors le rectangle ABCD de côté 1 et Φ (que l'on peut qualifier de *rectangle d'or*), puis par adjonction du carré DCEF le rectangle ABEF de côté Φ et $1 + \Phi = \Phi^2$.
Les deux rectangles ABCD et ABEF sont directement semblables : la similitude σ transformant A, B, C et D respectivement en B, E, F et A a pour rapport Φ et pour angle $-\frac{\pi}{2}$ (dans le cas de la figure 2).

Le centre Ω de σ vérifie $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega A}\right) = -\frac{\pi}{2}$: il se trouve alors à l'intersection des cercles de diamètres respectifs [AB] et [AD].
Mais Ω vérifie aussi et de même $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega E}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega E}\right) = -\pi$: il se trouve donc aussi à l'intersection de (AE) et (BD).

Figure 1

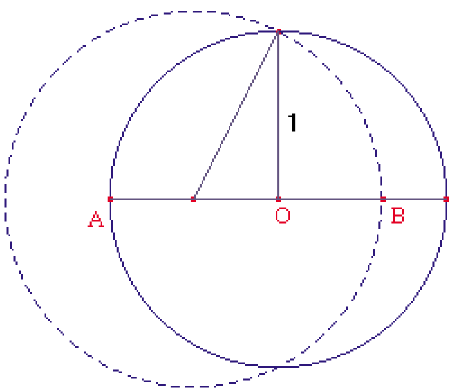
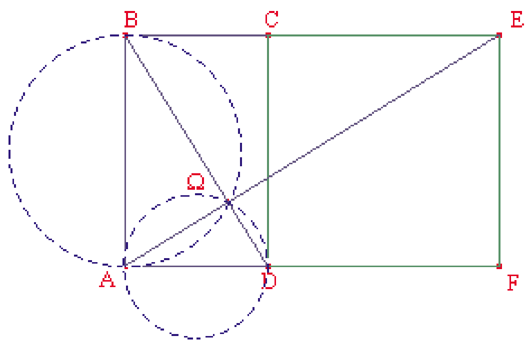


Figure 2



On peut à nouveau adjoindre un carré (de côté Φ^2) au rectangle ABEF : on obtient un nouveau *rectangle d'or* BEGH de côté Φ^2 et Φ^3, se déduisant du précédent par la même similitude.
En réitérant le processus, on construit ainsi une suite de *rectangles d'or* de côtés Φ^n et Φ^{n+1}, déduits les uns des autres par la même similitude de centre Ω ; les images successives de A et D se situent toutes sur deux droites perpendiculaires en Ω.
On pave ainsi le plan avec un *rectangle d'or* initial de côtés 1 et Φ et des carrés de côté Φ^n.

Figure 3

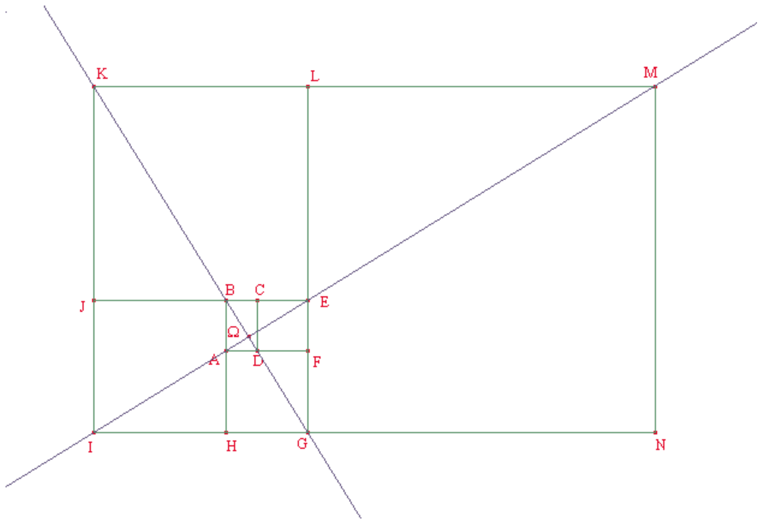
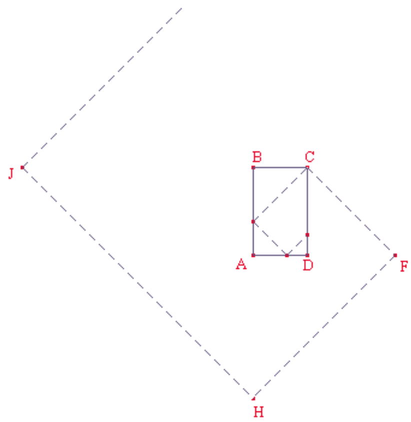


Figure 4



On peut aussi s'intéresser aux images successives du point C par la similitude précédente ou par la similitude réciproque (figure 4).

Par cette deuxième, la ligne brisée partant de C et s'enroulant autour de Ω a pour longueur $\sqrt{2}\left(1+\Phi^{-1}+\Phi^{-2}+\Phi^{-3}+\ldots\right)$ de limite $\Phi^2\sqrt{2}$.

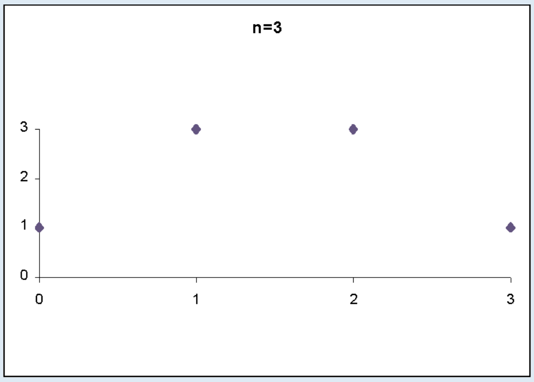
Expérimenter en mathématiques

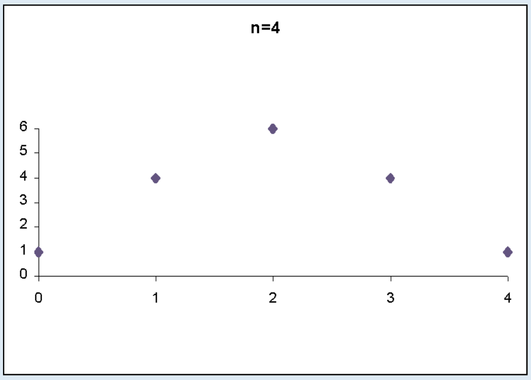
Les possibilités d'expérimentation numérique et de représentations graphiques ouvrent à de nombreuses problématiques nouvelles.

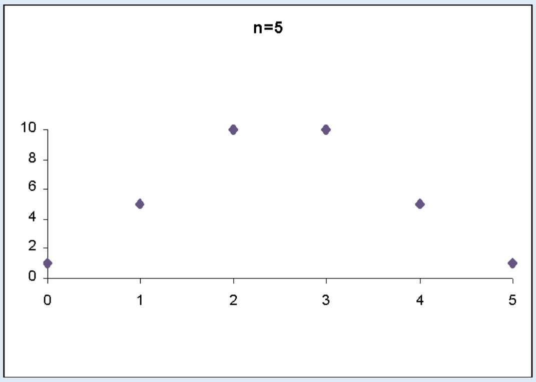
Voici un cas où la simple question « Comment représenter graphiquement les coefficients binomiaux ? » conduit à conjecturer des résultats inattendus… et à introduire la fonction $\exp(-x^2)$.

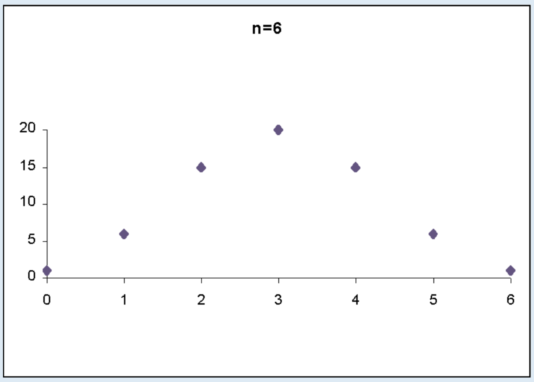
Dans bien des questions, en particulier en probabilités, il est intéressant d'avoir une idée du comportement des coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ en fonction de p, pour n fixé et grand.

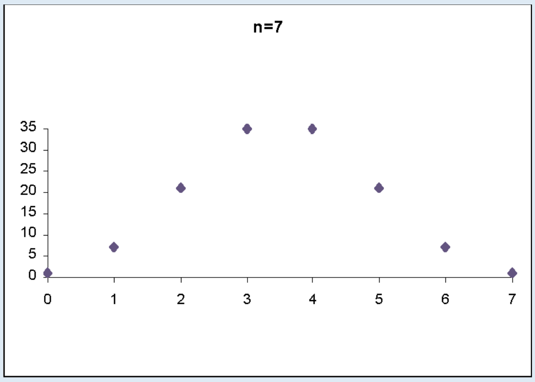
On peut commencer par quelques exemples simples. La formule : $\binom{n}{p+1} = \frac{n-p}{p+1}\binom{n}{p}$ montre que $\binom{n}{p+1}$ est plus grand que $\binom{n}{p}$ si $n - p \geq p + 1$, c'est-à-dire si $p \leq (n - 1)/2$. Donc, pour n fixé, les coefficients binomiaux augmentent à partir de 1, puis diminuent. On a montré ci-dessous les graphiques de $\binom{n}{p}$ en fonction de p, pour n variant de 3 à 8 :

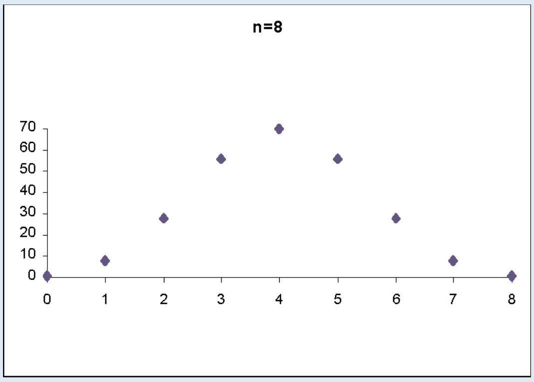








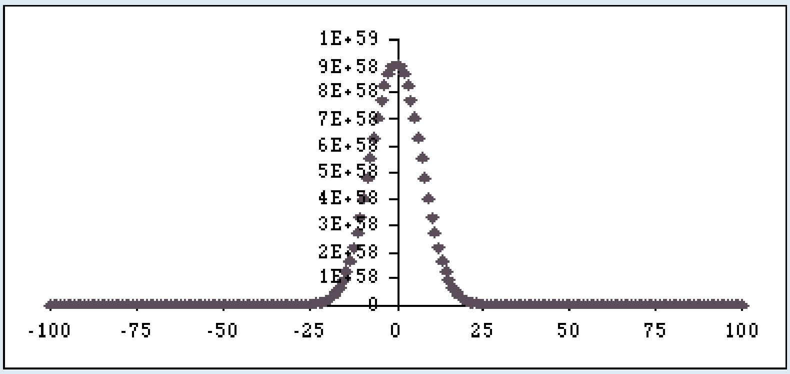




On voit que le dessin est toujours symétrique, reflétant la propriété bien connue : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

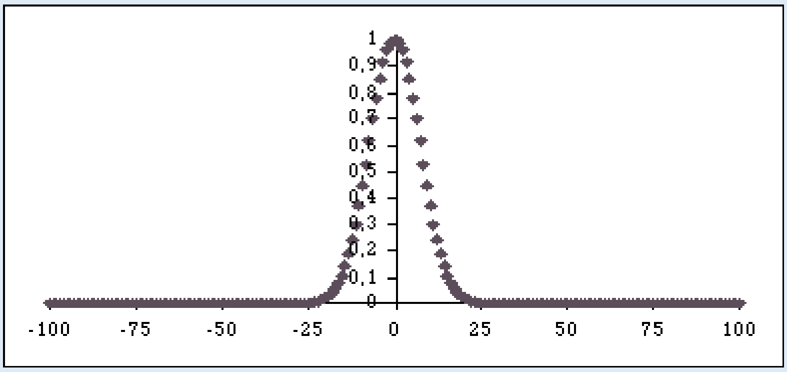
Il est plus agréable de regarder ce qui se passe pour des valeurs paires de n : on posera désormais $n = 2K$; il y a alors un maximum unique $\binom{2K}{K}$, et on se restreindra désormais à ce cas (cela ne change pas grand chose pour n grand). Pour comparer les dessins, il est plus simple de placer l'origine du repère au maximum de la courbe, en posant $i = p - K$, c'est-à-dire de tracer, non pas $\binom{2K}{p}$ mais $\binom{2K}{K+i}$, de sorte que le maximum est obtenu pour $i = 0$, avec i variant de $-K$ à K.

Voici la figure obtenue pour $K = 100$:

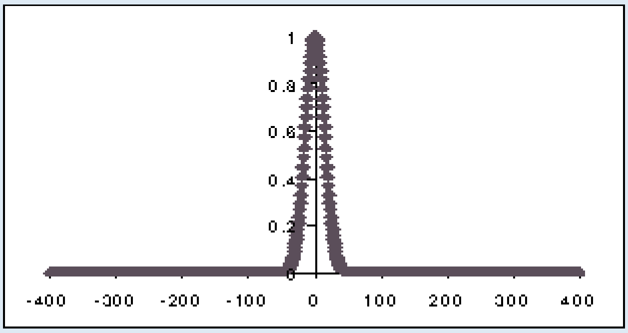


Les nombres obtenus au centre du dessin sont énormes, et de plus en plus grands quand n augmente, donc difficiles à comparer ; il est plus commode de normaliser, en divisant à chaque fois par le plus grand coefficient binomial $\binom{2K}{K}$, pour obtenir des nombres qui varient entre 0 et 1. On va donc tracer $\binom{2K}{K+i} / \binom{2K}{K}$ pour i variant de $-K$ à K.

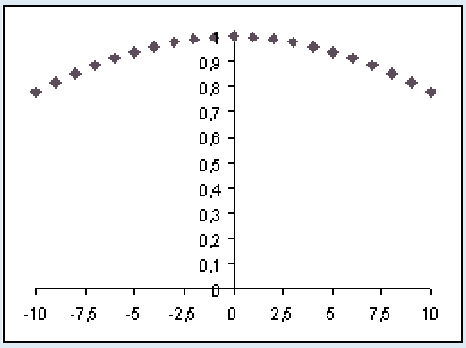
Voici la figure obtenue pour $K = 100$:



et pour $K = 400$:

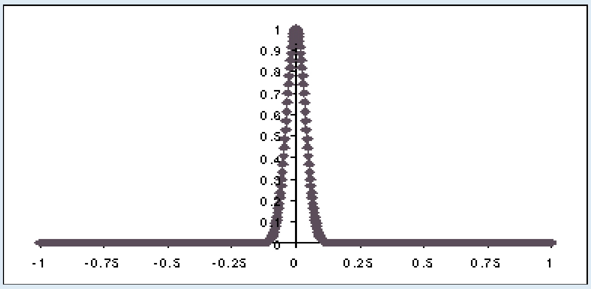


Ces dessins ne sont pas à la même échelle ; si on les trace à la même échelle, et qu'on essaie d'en dessiner la partie centrale (par exemple pour i allant de -10 à 10), on voit que, quand K grandit, tous les coefficients tendent vers 1.
Voici le détail pour $K = 400$:



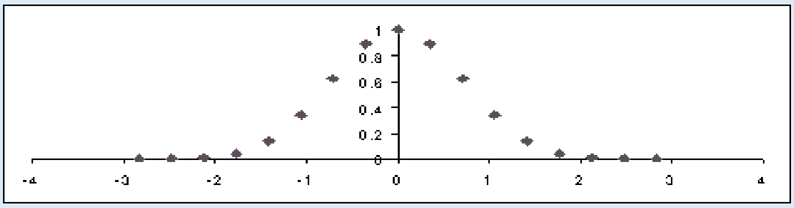
Il faut donc resserrer l'échelle quand K augmente ; une idée serait de diviser les abscisses par K, de sorte qu'on aille toujours de -1 à 1, c'est-à-dire de tracer les points $\left(i/K; \binom{2K}{k+i} / \binom{2K}{K}\right)$. Cela ne marche pas très bien.

Voici le résultat obtenu pour $K = 400$:

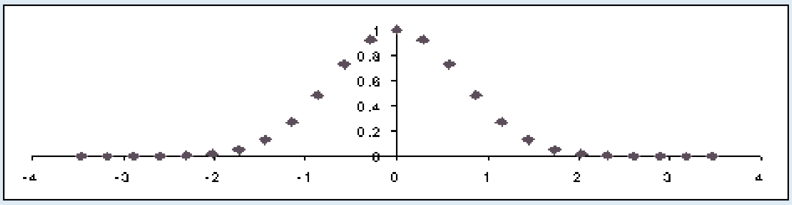


Si on continue, on va voir le graphe se resserrer de plus en plus vers l'axe des ordonnées, ce qui n'est pas très intéressant. Il faut donc resserrer un peu moins. On peut essayer diverses valeurs ; une idée est de chercher, pour K fixé, pour quelles valeurs de i la quantité $\binom{2K}{K+i} / \binom{2K}{K}$ est significative, par exemple plus grande que 0,5, c'est-à-dire de chercher la largeur de la partie significative qui est au centre du graphe. Quelques essais montrent que, si K est multiplié par 4, cette valeur est doublée ; d'où l'idée de diviser les abscisses, non par K, mais par $\sqrt{K}$, c'est-à-dire de représenter les points $\left(i/\sqrt{K};\binom{2K}{K+i}/\binom{2K}{K}\right)$. Et c'est cela qui marche ; on vérifie que, bien que, pour chaque valeur de K, le graphe soit défini sur $\left[-K/\sqrt{K};K/\sqrt{K}\right]$, c'est-à-dire sur $\left[-\sqrt{K};\sqrt{K}\right]$, les valeurs obtenues sont pratiquement nulles en dehors de l'intervalle [– 2 ; 2], et que les courbes obtenues se ressemblent étrangement !

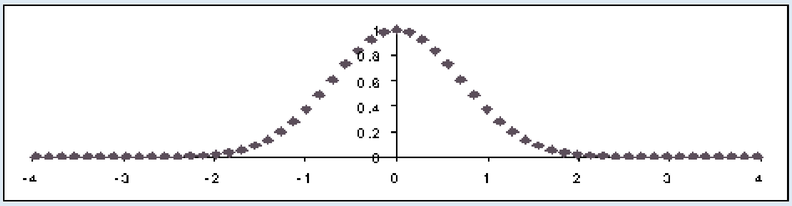
La convergence est très rapide, voici quelques courbes pour $K = 8 ; 12 ; 50 ; 100 ; 400$:



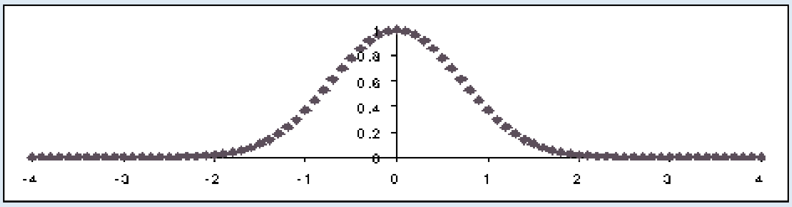
$K = 8$.



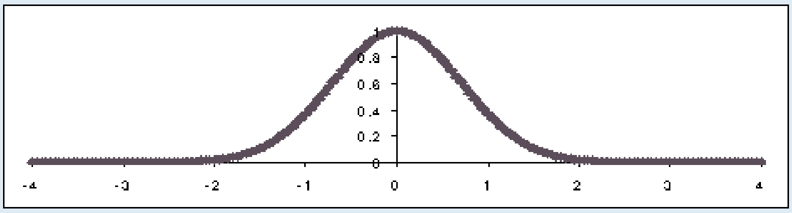
$K = 12$.



$K = 50$.

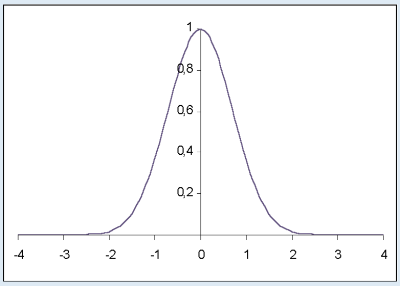


$K = 100$.



$K = 400$.

Ces points semblent dessiner une courbe précise : quelle est son équation ?
On constate expérimentalement que les coefficients binomiaux tendent à se répartir suivant une courbe précise, la fameuse courbe en cloche, représentation graphique de la fonction e^{-x^2} dessinée ci-dessous.



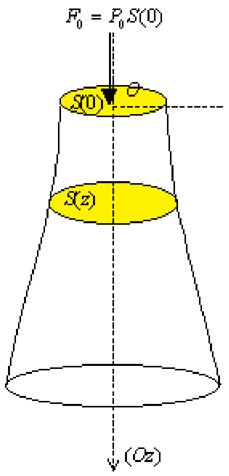
Mais pour en arriver à cette observation, on a dû faire des essais, procéder à des changements d'origine et d'échelle (comme on le fait couramment en physique pour se ramener à des unités adaptées), bref expérimenter !
On trouvera sur le cédérom deux démonstrations du phénomène observé ci-dessus.

Mathématiques et modélisation

La modélisation est une pratique scientifique majeure, qui concerne un nombre croissant de domaines. Observer, simplifier, penser une situation à l'aide de concepts théoriques, représenter une évolution temporelle par une équation différentielle ou certains types de variabilité par des lois de probabilité, exigent au minimum de connaître les concepts, de savoir quelles propriétés ont certaines classes d'équations, quels types de calculs peuvent être faits sur des familles de lois de probabilité. Aussi est-il nécessaire d'étudier les concepts en jeu et d'acquérir des savoirs.
Modéliser est une des principales modalités de l'interaction entre les mathématiques et les autres sciences. Mais la pratique de la modélisation de situations réelles est difficile ; un exemple non trivial, concernant la durée de vie d'un noyau d'une substance radioactive, est proposé en annexe. Un exemple plus simple est le suivant.

Solide d'égale contrainte : l'exemple d'une pile de pont

On recherche le profil (supposé régulier, *i.e.* défini par une fonction continue) d'un solide homogène de révolution pour lequel on souhaite que la pression (appelée dans ce cas contrainte) soit identique en chaque coupe par des plans perpendiculaires à l'axe de révolution. La pression à une hauteur donnée est la somme de la pression atmosphérique qui s'exerce au sommet du solide, de la pression exercée par le pont et de la pression exercée par le poids de la partie du solide située au dessus du plan de coupe. Si on veut que cette pression soit constante, on peut avoir l'intuition que le solide doit s'évaser vers le bas. Par contre, l'intuition ne permet pas de savoir quantitativement comment il s'évase : il convient de mettre le problème en équation.
$S(z)$ définit l'aire du disque à la cote z. S est une fonction continue. L'axe des z est orienté vers le bas.
Sur la surface supérieure s'exerce une pression P_0. La force qui en résulte est donnée par : $F_0 = P_0 S(0)$.



La force qui s'exerce à la cote z est égale à F_0 augmentée du poids du volume $V(z)$ de solide compris entre le plan supérieur et le plan de coupe, soit $F_0 + \rho g V(z)$, où ρ désigne la masse volumique du solide.
La pression qui en résulte est donnée par :
$[F_0 + \rho g V(z)]/S(z)$.
La condition d'égale contrainte s'écrit :
$[F_0 + \rho g V(z)]/S(z) = F_0/S(0) = P_0$.
Or $V(z) = \int_0^z S(t)dt$, soit : $S(z) = V'(z)$.

Ainsi la fonction V vérifie l'équation différentielle :
$V'(z) = (\rho g/P_0)V(z) + S(0)$ avec comme condition initiale : $V(0) = 0$.
La fonction V est ainsi obtenue en résolvant une équation différentielle du type $y' = ay + b$. On en déduit ensuite la fonction S puis le profil de la pile (avec $S(z) = \pi(R(z))^2$).

Au niveau du lycée, on initiera les élèves à la modélisation grâce à l'étude de certaines situations, réelles, qu'on simplifiera volontairement à l'extrême et pour lesquelles le modèle grossier ainsi établi devient éclairant ou permet une prévision : la difficulté est alors de garder sens et consistance au problème simplifié.
On pourra envisager quelques cas plus complexes, qui amènent à poser des questions auxquelles on ne sait pas répondre à ce niveau d'études, mais dont la pertinence est accessible aux élèves.
Les chapitres du programme qui fournissent les outils les plus susceptibles d'être utilisés pour de telles modélisations, par exemple à l'occasion des TPE, sont les équations différentielles et les probabilités.
L'exemple ci-dessous, qui figure dans le document d'accompagnement de physique de la classe de seconde, ne fait appel qu'à des notions élémentaires mais permet à un élève de terminale de comprendre l'enjeu de la modélisation et en quoi une observation est tributaire du cadre conceptuel qui permet de l'interpréter.

L'exemple ci-dessous, qui figure dans le document d'accompagnement de physique de la classe de seconde, ne fait appel qu'à des notions élémentaires mais permet à un élève de terminale de comprendre l'enjeu de la modélisation et en quoi une observation est tributaire du cadre conceptuel qui permet de l'interpréter.

Au III^e siècle avant J.-C., Érathostène calcula le rayon de la terre à partir de l'observation suivante : à Syène, en haute vallée du Nil, le jour du solstice d'été, à midi, le soleil était au zénith. À Alexandrie (environ 800 km de Syène), le soleil passait au même moment à peu près à 7,2 degrés du zénith. A partir de ces données, en supposant que le soleil était « à l'infini », un calcul classique permet d'estimer le rayon de la terre à 6 500 km.
Mais si maintenant on suppose que le soleil est proche de la terre et que celle-ci est plate, alors les mêmes observations conduisent à dire que c'est la distance de la terre au centre du soleil qui vaut environ 6 500 km. À partir du diamètre apparent du soleil (environ 1/2 degré), on peut même estimer son diamètre : environ 60 km. Le philosophe Anaxagore, au V^e siècle avant J.-C. a effectivement montré, mais avec des calculs légèrement différents que le diamètre du soleil était de cet ordre de grandeur : on peut raisonnablement supposer qu'Anaxagore a procédé comme ci-dessus.

Les deux figures ci-dessous concernent ainsi la représentation de le même observation vue « à travers » les hypothèses théoriques en cours à l'époque d'Anaxagore et d'Érathostène.

Figure 1

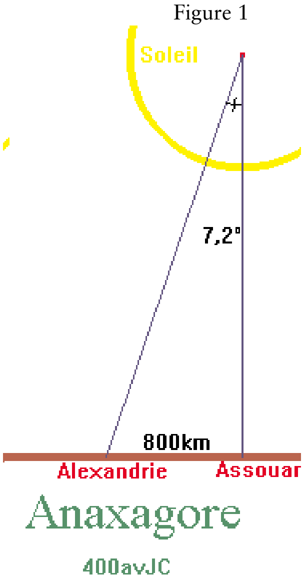
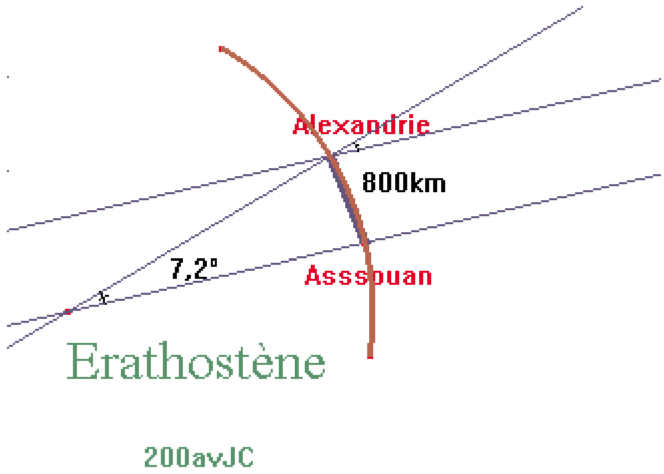


Figure 2



Enseigner les mathématiques : construire un corpus mathématique

Architecture de l'édifice mathématique

Les mathématiques forment un corpus connexe de connaissances : le premier paragraphe du programme de première S l'a bien montré. Chacun organise ce corpus suivant une architecture complexe, en tissant des liens multiples et évolutifs entre différents chapitres ; fabriquer de tels liens contribue à la compréhension et à la maîtrise des concepts (ainsi en est-il de la vision algébrique ou géométrique des systèmes d'équations linéaires) ; l'acquisition d'une nouvelle notion est parfois d'autant plus longue et difficile qu'elle questionne les fondements de la construction élaborée à partir des connaissances antérieures : ainsi, on structure les premières connaissances

sur l'intégration à partir d'une notion intuitive d'aire, qui sera remise en cause pour ceux qui poursuivront des études de mathématiques.
Par ailleurs, certaines notions admettent des définitions équivalentes pouvant naturellement s'enraciner dans des problématiques distinctes. Ainsi en est-il par exemple du couple exponentielle/logarithme : faut-il voir l'origine de ces notions à partir d'une primitive de $x \mapsto 1 / x$, d'une solution de $y' = y$, d'une solution de l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x)f(y)$, de l'extension par continuité d'une fonction puissance, voire de la série entière ? La pluralité des approches possibles donne rituellement lieu à discussions et controverses pédagogiques ; tous les choix sont mathématiquement corrects et il convient de faire remarquer aux élèves qu'une définition dans une approche devient propriété caractéristique dans une autre.
Il importe que les élèves, à la sortie de la classe terminale S, aient compris que si tous les résultats mathématiques se démontrent, ils ne peuvent pas être mis sur le même plan ; pour former un tout cohérent, dont le sens est accessible, il convient de classer les résultats, sans pour autant les figer dans une hiérarchie immuable : des progressions ou des points de vue différents conduisent à des hiérarchies distinctes qui évoluent à mesure qu'on avance.
Établir une hiérarchie suppose la connaissance et l'usage correct des mots de base de tout texte mathématique : définitions (en évitant tout usage abusif de ce mot : seules les définitions utiles et effectivement utilisées seront introduites) / axiomes / théorèmes, propositions, propriétés, corollaires… Conformément à l'usage, on réservera le mot « théorème » aux énoncés fondamentaux : cela facilite l'organisation et la hiérarchisation des divers savoirs.
On veillera à une mémorisation correcte des théorèmes de base : leur formulation est caractéristique du discours mathématique qui se veut à la fois précis, concis et universel ; ils peuvent donc à ce titre servir à l'apprentissage de ce discours mathématique. Pourquoi, avec l'humour et la modération qui s'imposent en la matière, ne pas inciter les élèves à comprendre et apprécier la spécificité de ce langage ? C'est le sens du clin d'œil en alexandrins qui suit :

« Réciter un poème est goûter sa musique ;
Oublier un phonème en gâche la saveur.
Ainsi du théorème : il perd sens et logique
Quand un mot fait défaut lui ôtant sa valeur. »
(Source anonyme.)

Démontrer

La démonstration est constitutive de l'activité mathématique : cela a déjà été dit dans le programme et le document d'accompagnement de première S. Rappelons ce paragraphe :

« La **démonstration** est constitutive de l'activité mathématique et les élèves doivent en prendre conscience. Faire en sorte que les élèves puissent concevoir des démonstrations dans leur globalité, puis en détailler les différentes étapes a toujours été et reste un objectif essentiel de tout enseignement des mathématiques en France.
Le monde mathématique de chaque élève s'élabore en grande partie à travers une pratique permanente de calculs, d'argumentations, de petits raisonnements et de démonstrations. Le niveau de rigueur exigible pour une démonstration dépend de l'expérience de l'élève dans le domaine où cette démonstration se situe : ainsi, pour la géométrie, pratiquée depuis l'école primaire, on peut prétendre exiger dès la classe de seconde un niveau de démonstration académique ; en analyse, par contre, la plupart des objets manipulés ne sont pas définis formellement à ce niveau d'études, et les élèves ne peuvent pas aboutir à des démonstrations parfaitement achevées : la nature et le niveau des rédactions exigibles ne peuvent pas être les mêmes. Il conviendra donc, à ce niveau d'étude, en particulier en analyse, d'accepter des argumentations conçues et exposées à l'aide de schémas (même si les élèves ne peuvent pas à ce stade les traduire en un texte linéaire). On gardera néanmoins l'état d'esprit déjà évoqué dans les programmes de collège et de seconde : repérer clairement le statut des divers énoncés en jeu (définition,

axiome, théorème démontré, théorème admis…). La déduction usuelle (par implication ou équivalence) et la manipulation du contre-exemple ont été travaillées en seconde ; des problèmes bien choisis permettront d'aborder en première le raisonnement par contraposition, par l'absurde ou par disjonction des cas ; le raisonnement par récurrence relève de la classe terminale.
La démonstration doit garder un caractère vivant et personnel et il convient d'éviter qu'elle n'apparaisse comme une activité relevant d'un protocole trop rigide. Chaque année, les assertions qui doivent être justifiées dans le cadre d'une pratique de la démonstration changent : il est difficile pour les élèves de cerner, parmi les éléments qui devaient être justifiés les années précédentes, ceux qui deviennent des évidences, pour lesquelles une justification ne ferait qu'alourdir la démonstration (ainsi, en première, on peut mettre dans le bagage des évidences que la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est à valeurs positives). C'est à l'enseignant de guider au coup par coup cette évolution délicate.
Apprendre à rédiger une démonstration constitue un élément important d'une formation scientifique. La rédaction est l'occasion de revenir sur un raisonnement, de le remodeler, de le rendre plus rigoureux et esthétique, de chercher les meilleures notations, de dégager les idées essentielles de l'aspect technique ; c'est ainsi que pour l'élève, des connaissances éparses se fondent en un ensemble cohérent de savoirs, et que se développent des compétences mathématiques fines. Enfin, apprendre à rédiger, c'est aussi acquérir la maîtrise d'une forme particulière d'écriture, mêlant langue usuelle, signes et symboles spécifiques. »

L'objectif premier de la démonstration est d'amener à l'évidence et de rendre nécessaire la proposition que l'on veut énoncer. À ce niveau d'enseignement, la démonstration est toujours un compromis : compromis entre les impératifs logiques du discours formalisé (décrits par N. Bourbaki dans son introduction à la théorie des ensembles) et le souci de rendre compréhensible et claire la marche des idées.
C'est à un tel compromis que fait référence la diversité des mots utilisés dans le programme pour décrire les modalités de mise en œuvre. Que l'on *démontre*, *montre*, *justifie*…, il s'agit toujours d'entraîner l'adhésion intellectuelle par une voie du type démonstration, donc avec rigueur, mais avec des degrés de formalisation adaptés aux élèves.
Dans certains cas, le compromis amènera à admettre certains théorèmes : cela sera alors dit clairement ; mais énoncer et admettre un théorème supposent toujours que celui-ci soit expliqué et que les élèves en comprennent le sens et la portée.

Rédiger

Les enseignants sont en permanence confrontés au problème de la mise en forme des travaux mathématiques réalisés par leurs élèves ; cette mise en forme prend le plus souvent une forme écrite. Aux difficultés de maîtrise de la langue française s'ajoutent de ce fait celles propres au discours mathématique. Comment alors faire la part, dans la production d'un élève, entre la consistance sous-jacente du raisonnement mathématique et les erreurs d'expression qui peuvent rendre parfois incompréhensible ou contradictoire le propos écrit ? Chaque enseignant a souvent ses convictions en la matière et a élaboré ses propres règles d'exigence ; ce qui, pour l'un, est implicite ou relève d'une convention doit être explicité ou évité pour l'autre. Les différences de point de vue font partie de la richesse de notre système d'enseignement ; la confrontation des élèves avec des personnalités diverses facilite leur prise d'autonomie, dès lors que cette diversité ne va pas jusqu'à la confusion. Chaque enseignant gardera ici le cap sur l'objectif essentiel, à savoir rendre les élèves capables de produire un texte écrit clair, précis et logiquement articulé.
Certains élèves peuvent avoir besoin de clarifier divers niveaux de langage ou d'écriture utilisés en mathématiques. On peut, pour ceux-là, s'inspirer de la classification faite en français, où l'on distingue les niveaux suivants : *soutenu* (vocabulaire et syntaxe recherchés, précis), *courant* (vocabulaire usuel et correct), *familier* (langue peu surveillée qui présente des écarts avec le vocabulaire et la syntaxe corrects) et *relâché* (langue très libre et souvent incorrecte) (voir *Méthodes et pratiques du français au lycée,* Magnard, 2000). En mathématiques, le langage pourra être *familier* voire *relâché* au brouillon ou

lors de certaines prises de notes ; il sera *soutenu* lors de l'écriture des théorèmes et des phases essentielles de résolution ; il pourra être *courant* dans tous les autres cas.
L'utilisation de symboles mathématiques ($\mathbb{R}$, $\in$, $\cap$, $\mapsto$, $\subset$…) est indispensable mais doit rester modérée. Une place à part est néanmoins à faire aux connecteurs logiques ($\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$) : leur utilisation ne doit pas prendre la place de liens de langage tels que *d'où, donc, on en déduit que, il s'ensuit que…* ; toute rédaction doit comporter une part de phrases en langue française. Quant aux quantificateurs « pour tout… » et « il existe… », présents en permanence dans la plupart des propositions mathématiques, ils pourront être abrégés (en particulier au brouillon) à l'aide des symboles $\forall$ ou $\exists$, que l'on pourra introduire au fur et à mesure de l'année.
On propose ci-dessous quelques exemples. Ils n'ont pas vocation à être normalisateurs : ils illustrent l'importance fondamentale du bon sens et le refus d'un formalisme excessif et stérilisant.

Trouver deux réels a et b tels que, pour tout réel x différent de 1, on ait $\frac{x+2}{x-1} = a + \frac{b}{x-1}$ (1).

Formulation 1 : Pour tout réel x différent de 1, on a : $\frac{x-1+3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$.

Dans des cas élémentaires, comme ici, cette formulation suffit largement.

Formulation 2 : Pour tout réel x différent de 1, $a + \frac{b}{x-1} = \frac{ax - a + b}{x-1}$.

Pour avoir (1), il suffit donc d'avoir $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 2 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$.

Le raisonnement par condition suffisante (aucune unicité n'est ici demandée) permet de répondre à toutes les questions de ce type.

Formulation 3 : Pour tout réel x différent de 1, $a + \frac{b}{x-1} = \frac{ax - a + b}{x-1}$.

On a (1) si et seulement si les numérateurs sont égaux pour tout réel x différent de 1. Or, deux polynômes sont égaux pour une infinité de valeurs si et seulement s'ils ont mêmes coefficients.

On a donc (1) pour tout réel x différent de 1 si et seulement si $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 2 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$.

Cette formulation, un peu caricaturale dans ce cas élémentaire, est d'un formalisme exagéré à ce niveau d'études.

Plaidoyer pour les brouillons

La recherche d'une solution à un problème nécessite souvent d'essayer plusieurs pistes, d'avancer dans des raisonnements et des calculs ne demandant à être justifiés que s'ils mènent au résultat. Et si tel est le cas, il convient de prendre du recul par rapport au chemin parcouru, de vérifier qu'il n'est pas inutilement sinueux, que les notations sont pertinentes ; les modes de travail face à un brouillon, qui est un texte privé dont la structure n'est pas linéaire, ou face à une copie à remettre à un professeur, ne sont pas identiques. On peut comparer les brouillons aux cahiers de croquis du peintre : esquisse de l'ensemble du tableau, études. L'usage de crayons effaceurs ou autre matériel analogue conduit aujourd'hui les élèves à faire peu de brouillons : il convient éventuellement de leur faire sentir qu'ils perdent ainsi un espace de liberté formateur. C'est aussi en retravaillant un exercice fait au brouillon que les méthodes et idées ayant conduit à sa résolution s'inscrivent dans la mémoire de l'élève.

Quelle place pour l'histoire des mathématiques ?

On relira à ce propos le troisième paragraphe du programme de mathématiques de première que le texte ci-dessous de Jean-Toussaint Desanti éclaire.
« … Ils apprendront aussi que les mathématiques ont leur mémoire ; et que, comme toute mémoire, elle comporte des replis, des lieux cachés, qu'il importe de débusquer pour les ramener au jour. Pourquoi les ramener au jour ? et pour quel bénéfice ? Faut-il, pour "apprendre les mathématiques", parcourir encore tous les chemins du passé ; revivre encore tous ces détours, affronter de nouveau, comme s'ils étaient les nôtres, ces problèmes aujourd'hui résolus ? Tous, certainement pas. Qui le pourrait jamais ?…
Les mathématiques ne sortent pas toutes faites de la tête du maître qui écrit au tableau noir. Elles ne résident pas, toutes faites, dans le traité, si achevé en sa belle ordonnance. Nullement. Leur état présent et décanté, par quoi nous commençons à les apprendre, n'est lui même qu'une figure d'équilibre, précieuse aujourd'hui, mais transitoire comme d'autres qui l'ont précédé et dont elle porte la marque. Apprendre à déchiffrer ces marques, c'est réveiller la mémoire. Le moins qu'on puisse y gagner, c'est un peu d'humour. On apprendra la peine qu'a coûté le moindre "pont aux ânes". Mais on y gagnera bien davantage encore : plus de conscience ; une autre clarté que celle qui naît de la stricte observance de ces procédures, parce qu'elle concerne les motivations qui ont exigé ces procédures mêmes. "Pourquoi des mathématiques ?" dit-on. Et on ajoute : "À quoi bon ?" Un titre comme celui-ci montre comment "des mathématiques" se sont produites. Il montre quelles sortes de travaux, non homogènes, cette production a coûté, à quelles exigences, à quelles contraintes externes et internes de tels travaux ont dû se plier. En cela, il peut permettre de répondre à la double question : "Pourquoi ?" et "À quoi bon ?" »
Introduction à *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales* de Dahan-Dalmedico A. et Peiffer J., Seuil, coll. « Points Sciences ».

Ainsi, tout rapport aux mathématiques s'enracine dans leur histoire passée, mais aussi dans l'histoire présente, dans leur lien avec les autres disciplines, notamment la physique, dans l'appréhension de la transformation profonde liée au développement de l'informatique, dans leur usage social et dans l'image que la société renvoie de cette discipline.
Alors, comment concilier tout cela dans un temps limité d'enseignement ? Rappelons qu'il faut avant tout… faire des mathématiques. Aussi convient-il de bien choisir, parmi les nombreuses questions dont l'histoire est riche, une ou deux d'entre elles en fonction d'un lien étroit avec le programme ; mais le choix est difficile, d'autant plus que certaines pages d'histoire des mathématiques peuvent se poser en obstacle pour accéder à une nouveau concept (par exemple en probabilités).

Organisation du travail des élèves

Le programme ne donne aucune indication de progression pédagogique et il n'est pas non plus linéaire : on ne peut donc pas, comme dans certains programmes antérieurs, bâtir un cours en partant de la première ligne du programme et en continuant jusqu'à la dernière.
Des indications globales de durée sont données pour chacun des trois grands titres : environ 14 semaines pour l'analyse, 11 semaines pour la géométrie et 6 semaines pour les probabilités.
Rappelons comme cela a déjà été fait dans le document de première que l'efficacité de l'enseignement est à optimiser en jouant sur les divers temps du travail des élèves, en classe entière, en demi-classe ou en travail personnel : les paragraphes précédents, ainsi que le paragraphe 4 du programme de première S, donnent de nombreuses pistes pour adapter des activités à ces divers temps.

Analyse

Un concept important : celui d'équation différentielle

On a évoqué plus haut l'importance de la modélisation dans la pratique scientifique ; dans de nombreuses situations (exemples page suivante), la traduction mathématique va mettre en jeu des fonctions et des relations entre ces fonctions et/ou leurs dérivées. Il importe donc que les élèves se familiarisent avec ce type de relations, et ce, dès le début de l'année scolaire. Le paragraphe introductif du chapitre II.1 du programme est très explicite : « On privilégiera les problèmes mettant en jeu des liens entre une fonction et sa dérivée première ou seconde. » L'étude des variations d'une fonction à l'aide de sa dérivée appartient bien sûr à cette catégorie de problèmes : elle a été abordée en première et sera poursuivie systématiquement en terminale. Mais on n'utilise alors qu'une infime partie de l'information donnée par cette dérivée, à savoir son signe ; les élèves ont déjà vu en première que l'on pouvait aller plus loin puisqu'ils ont été amenés à « construire point par point un ou deux exemples d'approximation de courbe intégrale définie par : $y' = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$ en utilisant l'approximation $\Delta f \approx f'(a)\,\Delta t$ » (l'écriture $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$ devra aussi être familière aux élèves). C'était un premier contact avec le concept d'équation différentielle, que l'on réactivera dès le début de terminale et à l'occasion de recherches de primitives.
Le travail des élèves sur l'année de terminale peut être décomposé en plusieurs parties : un travail sur la fonction exponentielle en début d'année ; puis, au cours de l'année on étudiera l'équation $y' = ay + b$: les élèves doivent savoir que par un point quelconque, il passe une solution unique. Enfin, on rencontrera des exemples divers d'équations différentielles : il importe de donner des exercices où apparaissent des équations différentielles autres que $y' = ay + b$ mais comme aucune connaissance spécifique à ce sujet n'est au programme, on donnera toutes les indications utiles. On fera vivre le concept régulièrement dans l'année.
On choisira avec soin une ou deux situations menant à une équation différentielle simple. Les élèves seront guidés dans le travail de traduction mathématique. Cette étape est délicate : s'y confronter au moins une fois est indispensable, mais aucune compétence n'est exigible à ce sujet pour l'examen du baccalauréat. Une équation étant posée ou donnée, les élèves pourront vérifier si telle ou telle fonction déjà connue en est solution ; sinon, ils pourront être amenés à en approcher une à l'aide de la méthode d'Euler vue en première. Des exemples de telles situations sont donnés ci-dessous.
On signalera, si besoin est, que l'écriture $y' = ay + b$ est consacrée par l'usage, mais on évitera tout formalisme et toute définition générale à propos des équations différentielles. L'importance de ce chapitre ne réside pas dans la multiplicité des types d'équations qu'on peut envisager de résoudre, mais dans les idées qui sous-tendent cette notion. Il s'agit d'équations dont l'inconnue est une fonction, définie sur l'ensemble des réels ou sur un intervalle imposé par la situation originelle (ou de façon arbitraire). On pourra reprendre une ou deux équations du cours de physique ; à l'occasion de problèmes d'études de fonctions et de calculs de primitives, on ne s'interdira pas d'étudier des propriétés de solutions d'équations différentielles : le travail sur les équations différentielles renforce l'acquisition d'automatismes sur les calculs de primitives ; on pourra par exemple faire le lien entre la recherche d'une primitive de $y'y$ et la recherche de solutions de l'équation $yy' = a$.

Remarque – Le programme, dans la colonne *Commentaires*, délègue au cours de physique l'introduction de solutions des équations différentielles $y'' + \omega^2 y = 0$; cela signifie simplement que l'étude générale de ces équations n'est pas au programme de mathématiques. Ce commentaire témoigne par ailleurs d'un souci de vision croisée des diverses disciplines où, par exemple, le professeur de mathématiques peut s'inspirer d'une situation cinématique pour présenter la dérivée et le professeur de physique introduire un concept mathématique pour modéliser un problème ; une telle vision est conforme tant à la réalité de l'élève, individu unique face aux multiples exigences de chaque discipline, qu'à celle des mathématiques (il n'y pas lieu d'opposer mathématiques « utiles » et mathématiques « pour l'honneur de l'esprit humain ») ou de la physique (dont le langage naturel est celui des mathématiques).

Deux exemples

La radioactivité

Cet exemple est développé en annexe, dans un document commun aux trois matières scientifiques (mathématiques, physique, sciences de la vie et de la Terre) ; il propose un travail en plusieurs étapes sur le thème de la radioactivité : modélisation et traitement mathématique peuvent y être menés conjointement en mathématiques, physique et géologie ; une progression y est suggérée. Ce travail permet d'aborder relativement tôt dans l'année l'étude de la fonction exponentielle. Une annexe au document (partie I) montre comment l'existence de cette fonction peut être directement prouvée : une telle démonstration n'est pas au programme mais il convient de mentionner son existence. On revient de toute façon sur l'existence après l'intégration, à partir de la primitive de $1/x$ (l'existence de l'aire sous une courbe se conçoit plus aisément que celle d'une solution de l'équation $y' = y$). Le développement de la partie II offre par contre un exemple de la puissance et de l'élégance des mathématiques et fournit l'occasion de faire de vraies démonstrations en analyse : il serait bon que chaque élève puisse y accéder.

La chute d'un corps

Il est important que, dans l'enseignement de mathématiques, soient reprises une ou deux des équations traitées en physique en classe terminale.
Voici comment on peut résumer la problématique générale de l'utilisation des équations différentielles en physique. Il nous suffira ici de considérer la catégorie importante des phénomènes qui se déroulent sur une certaine durée. Le physicien relève l'évolution temporelle d'un certain type de phénomènes. Il obtient ainsi par des mesures les valeurs prises en fonction du temps par les variables qui décrivent le phénomène. Et ensuite il cherche à déduire ces fonctions d'une loi « instantanée », comme par exemple : à chaque instant, « l'accélération est proportionnelle à la force », ou encore « la force de frottement est proportionnelle à la vitesse ». De telles lois instantanées permettent d'écrire l'équation différentielle du phénomène. Les solutions de cette équation, correspondant aux diverses conditions initiales possibles, redonnent, si tout va bien, les évolutions temporelles observées. Les physiciens valident l'équation différentielle qui sert de modèle en vérifiant que, dans la limite des erreurs de mesure, les évolutions temporelles ainsi déduites sont conformes à la réalité expérimentale.
Prenons l'exemple de la chute d'une bille dans un milieu visqueux. Une observation attentive de la vitesse du centre d'inertie de la bille montre l'existence, au bout d'un certain temps, d'un mouvement limite nettement différent du mouvement initial. L'interprétation des observations conduit le physicien à proposer une modélisation de la force de frottement exercée par le milieu fluide sur la bille. Cette modélisation est nécessaire pour établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse du centre d'inertie de la bille. L'étude mathématique de l'équation différentielle donne une solution analytique que le physicien utilise pour vérifier, *a posteriori*, la validité du modèle qu'il vient d'établir.
Au début du mouvement la croissance de la vitesse avec le temps s'interprète comme dans le cas de la chute d'un solide dans un fluide non visqueux : tant que la vitesse est faible, on néglige les forces de frottement du fluide. En première approximation, la bille n'est alors soumise qu'à son poids et à la poussée d'Archimède qui s'oppose au poids de la bille. La bille est plus dense que l'eau, la résultante de ces deux forces est dirigée vers le bas et de norme $f = m'g$, avec $m' < m$ où m est la masse de la bille.

Après une phase intermédiaire, le mouvement observé de la bille est un mouvement uniforme. La vitesse ne varie plus au cours du temps : à la précision des mesures près, la vitesse du centre d'inertie de la bille a atteint une valeur limite. Cette vitesse limite dépend de la masse de la bille et du milieu visqueux.
L'application de la deuxième loi de Newton permet au physicien de poser l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v :

$$m.\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = f + m'.g$$

où f est la force de frottement. La force de frottement s'oppose au déplacement. Pour une bille de faible diamètre et un milieu suffisamment visqueux, l'observation du mouvement de la bille conduit à considérer que, pour ces conditions expérimentales, $f = -kv$.
L'équation différentielle devient donc :

$$m.\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -kv + m'g.$$

La solution générale de l'équation différentielle précédente conduit à une loi d'évolution temporelle de la vitesse liant la vitesse v au temps :

$$v(t) = v_\infty (1 - e^{-t/\tau}),$$

où v_∞ est la vitesse limite, soit $v_\infty = m'g/k$ et où τ est appelé le temps caractéristique ; mathématiquement, la vitesse limite n'est jamais atteinte, mais au bout de quelques temps caractéristiques, on ne peut plus en pratique distinguer $v(t)$ de v_∞ ($e^{-3} = 0{,}05$, $e^{-5} = 0{,}007$, $e^{-10} = 4{,}5 \times 10^{-5}$). Le temps caractéristique τ vaut ici m/k. On notera que la tangente à l'origine à la courbe représentative de la solution a pour équation $v = v_\infty t/\tau$ et coupe l'asymptote au temps $t = \tau$; le temps caractéristique se trouve ainsi lié à la première phase du mouvement (où on néglige les forces de frottement) et au mouvement limite : c'est ainsi que les physiciens interprètent ce paramètre.
Il est intéressant de noter que les grandeurs utilisées par le physicien ne sont pas, en général, des « nombres purs » mais des grandeurs dimensionnées ; or la fonction exponentielle ne peut être définie que pour des nombres. Dans une écriture telle que e^{-kt} où t serait un temps, le paramètre k est nécessairement l'inverse d'un temps.

1) Problèmes géométriques. Recherche de courbes conditionnées par la sous-tangente ou la sous-normale

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, soit Γ la courbe d'équation $y = f(x)$, où f est une fonction définie et dérivable sur intervalle I, dont la dérivée ne s'annule pas.
À tout point $M = (x_M ; y_M)$ de Γ, on associe les points H, T, N définis comme suit : H est le projeté orthogonal de M sur Ox, T est le point d'intersection de l'axe Ox et de la tangente en M à Γ et N est le point d'intersection de l'axe Ox et de la normale à Γ en M.

a) Déterminer les cordonnées de H, T, N en fonction de x_M, $f(x_M)$, $f'(x_M)$.
b) Déterminer les fonctions f telles que $x_M - x_T$ soit constant.
c) Déterminer les fonctions f telles que $x_M - x_N$ soit constant.
d) Déterminer les fonctions f telles que le point N soit fixe.

2) Équation logistique

Une modélisation possible de l'évolution de certaines populations conduit à l'équation différentielle $\mathrm{d}P / \mathrm{d}t = kP$ (où k est un paramètre strictement positif) et aboutit à la croissance exponentielle $P(t) = P(0)exp(kt)$. Cette modélisation n'est pas pertinente quand t devient grand et d'autres équations ont été proposées pour tenir compte des facteurs qui limitent l'accroissement des populations réelles (taille du territoire et quantité de nourriture).
L'équation logistique, proposée par Verhulst en 1838, est de la forme $\mathrm{d}P /\mathrm{d}t = aP(m - P)$.
Les élèves peuvent commencer par déterminer les solutions constantes : les deux possibilités étant $P(t) = 0$ pour tout t, ou bien $P(t) = m$ pour tout t ; ensuite, ils peuvent déterminer le signe de $P'(0)$ selon que $0 < P(0) < m$ ou $m < P(0)$; compte tenu du problème, on étudie ci-dessous les solutions telles que $P(t) \geqslant 0$ pour tout t.
À ce stade, on peut avoir une idée intuitive du comportement des solutions, éventuellement confortée par le recours à la méthode d'Euler.
Pour résoudre l'équation, on se limite aux solutions telles que $P(t)>0$ pour tout t, et on fait le changement de fonction défini par $y(t) = 1/P(t)$ pour tout t.

L'équation en y est alors $y' = a - amy$ que l'on résout en $y(t) = 1/m\ [1 + C\exp(-amt)]$ puis en :

$$P(t) = m/(1 + C\exp(- amt)) \text{ où } C = m/P(0) - 1.$$

Suites et fonctions

On pourra illustrer par un exemple la réflexion sur le passage du discret au continu.

Exemple

Capitalisation : suite ou fonction, quel est le bon modèle ?
Soit un capital C_0 placé au taux annuel de 100τ % et C_n le capital au bout de n années : $C_n = C_0\ (1 + \tau)^n$.
– Capitalisation par quinzaine : u_n le capital au bout de n quinzaines :
$u_n = C_0\ (1 + \tau/24)^n$; $C_1 = u_{24}$.
– Capitalisation quotidienne : v_n le capital au bout de n jours :
$v_n = C_0\ (1 + \tau/360)^n$; $C_1 = v_{360}$.
– Capitalisation continue :
$C_1 = C_0e^{\tau}$ et par extension capital à l'instant x (l'unité étant l'année) ; $C(x) = C_0e^{\tau x}$.
On pourra se reporter au document d'accompagnement de la série ES, au paragraphe sur les limites.

Suites adjacentes

Nos premiers pas dans l'univers numérique ont été guidés par deux idées simples mais bien distinctes : d'une part, nous pouvons effectuer dans ce domaine les quatre opérations du calcul élémentaire (addition, soustraction, multiplication, division). D'autre part, nous pouvons comparer deux nombres réels, c'est-à-dire distinguer un plus petit et un plus grand. Les quatre opérations s'étendent sans grande difficulté au cadre élargi des nombres complexes, comme l'apprennent les élèves de terminale S. L'opération de comparaison reste en revanche confinée aux réels, puisqu'elle est intimement liée à la droite géométrique : nous disposons sur l'axe réel de la notion d'avant et après, mais il n'y a rien d'analogue sur le plan.

L'étude des suites de nombres réels intègre naturellement ces deux aspects tout en visant à munir les élèves d'une intuition du continu numérique. L'aspect algébrique fait l'objet de règles opératoires simples (par exemple : la somme de deux suites convergentes est convergente, et la limite de la somme est la somme des limites) assez intuitives pour être facilement utilisables par les élèves. La démonstration des formules algébriques concernant les limites n'est pas ici la préoccupation essentielle, mais il convient pourtant de dire aux élèves que ces règles se démontrent rigoureusement dès lors qu'on dispose d'une définition précise de la limite.

Les questions qui relèvent de la comparaison des réels sont plus subtiles, puisqu'elles ouvrent la voie aux résultats du type « segments emboîtés », au caractère complet de la droite réelle, en bref aux diverses formes d'un théorème d'existence délicat. Ces idées, au carrefour du calcul et de la géométrie, ont nourri depuis longtemps la réflexion des mathématiciens. Elles sont à la base de notre perception du continu numérique, et peuvent aider les élèves à comprendre la nécessité de définitions précises. Il peut être instructif, par exemple, de tester leur intuition géométrique en leur demandant si entre deux points distincts de la droite, il en existe une infinité d'autres.

Le programme se propose d'enrichir cette intuition à l'aide du théorème des suites adjacentes, qu'on peut formuler ainsi : soit (u_n) une suite croissante de nombres réels, soit (v_n) une suite décroissante de nombres réels, telles que $u_n \leqslant v_n$ pour tout n et $\lim\ (v_n - u_n) = 0$. Alors les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite l, qui est l'unique nombre réel tel que $u_n \leqslant l \leqslant v_n$ pour tout n. Ce résultat, clairement faux si on se limite aux nombres rationnels, est lié à la définition des nombres réels.

La convergence d'une suite (u_n) vers l s'exprime, comme suggéré par le programme, en disant que tout intervalle ouvert contenant l contient tous les u_n à partir d'un certain rang. On peut aussi dire que cet intervalle contient tous les u_n sauf un nombre fini,

mais cette formulation brise l'analogie avec les limites de fonctions. Cette définition de la limite permet un début de travail rigoureux. Bien qu'il ne s'agisse pas d'en faire un usage intensif, le fait de présenter dans quelques cas simples les démonstrations qu'elle permet de développer est un objectif du programme d'analyse. La construction axiomatique de l'ensemble des nombres réels est hors programme ; mais le choix fait (partir, comme si c'était un axiome, de la propriété des suites adjacentes) permet d'établir avec cohérence et rigueur les propriétés caractéristiques de la droite réelle.
Il est donc important que les élèves manipulent ce résultat pour en comprendre la portée. Voici quelques pistes dans ce but, qui pourraient faire l'objet de devoirs :
– Établir la validité de la méthode de dichotomie : si on part d'un intervalle fermé borné I_0, qu'on le partage en deux intervalles fermés de longueurs égale I et I', qu'on choisit l'un d'entre eux noté I_1 sur lequel on effectue à nouveau cette opération, on construit par récurrence une suite I_n d'intervalles dont l'intersection est un point.
– Déduire de la méthode de dichotomie que toute suite croissante majorée converge. Montrer inversement que si l'on admet que toute suite croissante majorée converge, on peut en déduire le théorème des suites adjacentes et donc la validité de la méthode de dichotomie.
– Si une fonction f est continue, alors (par le résultat sur la limite de la composée d'une suite et d'une fonction) si $\lim (x_n) = a$ on a $\lim f(x_n) = f(a)$. Montrer alors par dichotomie le théorème des valeurs intermédiaires, en choisissant les intervalles aux extrémités desquels les valeurs de la fonction sont de signes opposés. On pourra aussi faire remarquer que le théorème des valeurs intermédiaires, lorsqu'on l'applique par exemple à la fonction carré, oblige de même à sortir du cadre des nombres rationnels.
Montrer que tout nombre réel positif x est limite de deux suites adjacentes de rationnels décimaux ; en déduire l'existence du développement décimal d'un nombre réel. Cet exercice est délicat ; on pourra éventuellement attirer l'attention des élèves sur l'usage de la fonction discontinue « partie entière » dans l'obtention des termes du développement décimal (discontinuité inévitable puisqu'on ramène la description du continu numérique à une notation discrète), sur l'utilisation du caractère archimédien de la droite réelle, et sur des exemples de non-unicité du développement décimal. Les élèves pourront ainsi faire le lien entre la somme d'une série géométrique et l'égalité $1 = 0{,}99999\ldots$, et percevoir comment la théorie des nombres réels prolonge le calcul pratique qu'ils effectuent à la main ou sur calculatrice ou tableur avec un nombre fini de décimales.
On utilisera les suites adjacentes pour définir certains objets ou encadrer des réels.

– Existence de $\exp(x)$ (voir annexe du document sur la radioactivité).
– Encadrement du nombre π à l'aide de périmètres ou d'aires de polygones réguliers. Cet encadrement conduit à des calculs assez longs, et à l'utilisation de la dérivée de $\sin(x)$ en 0. Si le temps manque pour faire ces calculs, on pourra insister sur l'évidence géométrique du caractère adjacent des suites utilisées.
– Encadrement d'un réel par des rationnels (voir exemple 2 sur la « duplication du cube », page 14).

– Étude de suites adjacentes associées à des situations ou problèmes étudiés dans la classe (par exemple en prolongement de l'exemple 1 sur « l'art de moyenner » : étude des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ (avec $b > a > 0$), $u_{n+1} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}}$ (moyenne harmonique de u_n et v_n) et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ (moyenne arithmétique de u_n et v_n) pour tout n ; ces deux suites sont adjacentes et de produit constant : elles convergent donc vers la moyenne géométrique de a et b.

On pourra observer numériquement la rapidité de convergence de quelques-uns des exemples ci-dessus, mais aucune compétence n'est exigible à ce propos.

Le raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence peut s'énoncer ainsi : soit P(n) une propriété de l'entier positif ou nul n. Si on a P(0) et que pour tout $n \geqslant 0$, P(n) implique P(n + 1), alors on a P(n) pour tout $n \geqslant 0$. Il est important de faire remarquer aux élèves qu'on peut également appliquer ce principe à partir d'un certain rang n_0, en leur donnant des exemples simples où la récurrence ne s'initialise pas en 0.
Si un problème en requiert l'usage, on peut présenter le « principe de récurrence fort », qui s'énonce ainsi : soit P(n) une propriété de l'entier positif ou nul n. Si on a P(0), et que pour tout $n > 0$, on a l'implication « si on a P(k) pour tout k strictement inférieur à n, alors on a P(n) », alors on a P(n) pour tout $n \geqslant 0$.

– Ces deux formes sont logiquement équivalentes, et encore équivalentes à l'énoncé : « tout ensemble non vide d'entiers positifs admet un plus petit élément », ou à l'énoncé : « toute suite décroissante d'entiers positifs est constante à partir d'un certain rang ». Mais on ne peut pas bien sûr entraîner les élèves dans ces subtilités, ni leur faire établir l'équivalence des différentes formes du principe de récurrence.
– On ne multipliera pas les exemples de « paradoxes » démontrés à l'aide d'une récurrence subtilement incorrecte, mais on montrera sur des exemples l'usage positif et puissant qu'on peut en faire.

La difficulté conceptuelle du principe de récurrence est qu'il faut bien comprendre ce qu'on fait quand on suppose P(n) pour démontrer P(n + 1). Les élèves peuvent en effet avoir l'impression de supposer ce qu'ils veulent démontrer et donc qu'il n'y a rien à faire, ou au contraire que l'argumentation est un cercle vicieux. La mise en forme d'une démonstration par récurrence est difficile, et il pourra être utile de proposer un schéma de rédaction. Quelques exercices seront sans doute plus efficaces qu'un discours abstrait pour leur faire saisir que la récurrence permet de démontrer une infinité de propositions parce que le pas qui permet de passer d'une de ces propositions à la suivante est toujours le même. Une image classique à ce sujet est celle d'un escalier (infini) gravi par un marcheur (infatigable) qui cependant ne pourrait pas sauter des marches. Une autre image est celle de sucres disposés verticalement les uns à coté des autres (chaque sucre fait tomber le suivant à condition qu'on pousse le premier), ou celle de l'hérédité d'une propriété de la génération n à la génération n + 1.

Limites et comportements asymptotiques

Comme il est dit plus haut, la notion de limite traverse tout le programme d'analyse du cycle terminal : c'est un concept mathématique important, intuitif mais difficile à manipuler avec rigueur à ce niveau. Son appropriation ne peut être achevée à l'issue de la classe terminale, mais il est souhaitable que tous les élèves, quel que soit leur cursus ultérieur, aient entrevu l'intérêt et la place d'une définition formelle. Le programme se limite pour ce faire aux limites à l'infini ; il demande que soit ensuite démontré le théorème dit des « gendarmes » pour les fonctions, en prolongeant simplement ce qui a été fait en première pour les suites. On pourra aussi démontrer une ou deux *règles opératoires* évoquées dans le programme mais ces démonstrations ne sont pas un objectif premier à ce niveau d'études (ni *a fortiori* un élément à évaluer à l'examen du baccalauréat) ; leur technicité et leur caractère abstrait les rendent difficiles. On justifiera néanmoins tous les résultats énoncés à l'aide d'arguments intuitifs, tout en soulignant qu'une démonstration formelle existe.
Le théorème des « gendarmes » sera étendu au cas de limites infinies : dans ce cas, on ne recherchera pas bien sûr un encadrement de la fonction ou de la suite étudiée mais, selon que la limite est $+\infty$ ou $-\infty$, une minoration ou une majoration.
Le programme n'évoque pas explicitement la compatibilité de l'ordre et du passage à la limite, à savoir le théorème suivant (énoncé ici à l'infini) : « Si, pour x assez grand, on a $f(x) \leqslant g(x)$, et si $\lim\limits_{+\infty} f = l$ et $\lim\limits_{+\infty} g = l'$, alors $l \leqslant l'$. » Mais il serait dommage de

se priver de son usage lors de certains développements en classe ou en travaux à la maison ; ce résultat est simple, et il y aurait avantage à le démontrer pour travailler sur la définition formelle (et développer un raisonnement par l'absurde élémentaire).

En reprenant le vocabulaire des « tuyaux » utilisé dans le document d'accompagnement de première : supposons $l > l'$; soit deux « tuyaux » centrés respectivement en l et l', de rayons inférieurs à $\frac{l-l'}{2}$; alors ces deux « tuyaux » sont disjoints et celui centré en l est au-dessus de celui centré en l' ; pour x assez grand, $f(x)$ sera dans le premier « tuyau » et $g(x)$ dans le deuxième, et donc on aura $f(x) > g(x)$; ce qui est contraire à l'hypothèse sur f et g.

Les élèves ont énoncé en première des règles de calcul relatives aux sommes et produits de limites de fonctions ; ils ont aussi étudié le comportement de fonctions rationnelles élémentaires au voisinage des points où elles ne sont pas définies. On fera le point sur toutes ces règles et on les complètera, en particulier avec les quotients. À propos de ces derniers, on pourra parler de limite à droite ou à gauche en a.
Pour les comportements asymptotiques des fonctions usuelles (polynômes, fonctions rationnelles, logarithmes ou exponentielles), il est recommandé d'insister sur l'intuition et la compréhension de ce qui se passe : intuition éclairée par des approches numériques sur calculatrice ou tableur, démonstration complète dans quelques cas particuliers repérés dans le programme, utilisation directe de règles dites *opératoires* comme dans les exemples élémentaires ci-dessous.

Calculs de limites

1) Soit f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 3}{-x^2 + x}$.

Pour la limite en $+\infty$, il suffira d'écrire l'enchaînement : $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{-x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$.
(On a utilisé la *règle opératoire* : à l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.)
Pour la limite en 1, comme $\lim\limits_{x \to 1}\left(x^3 - 2x + 3\right) = 2$, $\lim\limits_{x \to 1}\left(-x^2 + x\right) = 0$ et que $-x^2 + x$ est négatif à droite de 1, on a : $\lim\limits_{1} f = -\infty$.

2) Soit f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+x)^2}$

On a directement : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ car, en l'infini, e^x l'emporte sur toute fonction puissance et donc sur tout polynôme en x.

3) Soit f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^{x^2-2}}{(1+x)^2}$.

Les élèves devraient voir directement que la limite en $+\infty$ vaut $+\infty$: l'exponentielle l'emporte sur la puissance. Un enchaînement fondé sur les règles données en cours peut ensuite être établi :

– par exemple en écrivant $f(x) = \dfrac{e^x}{\left(1+x\right)^2} \times e^{x^2-x-2}$; on se ramène à l'exemple précédent et à un cas de fonction composée ;
– ou en utilisant l'inégalité $x < x^2 - 2$ pour x assez grand ($x > 2$), d'où $e^x < e^{x^2-2}$, d'où la limite par comparaison avec la limite de l'exemple 2.
4) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$. Sur un exemple aussi simple, l'élève pourra énoncer directement que la limite en $+\infty$ est $+\infty$.
5) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$. En $+\infty$, on observe une indétermination ; la mise en place des règles opératoires durant le cours et les traitements antérieurs d'exemples incitent à mettre en facteur le terme « le plus fort ».

Sauf intention pédagogique particulière, on évitera tout exemple artificiellement compliqué ou construit pour exhiber des pièges : l'objectif est celui d'une bonne compréhension globale. Des calculs plus fins de limites relèvent du niveau d'études ultérieure.

Langage de la continuité

La notion de continuité dans le langage courant est synonyme d'absence de rupture pour passer d'un point à un autre, d'un état à un autre et est ainsi associée à un mouvement ou un changement d'état ; intuitivement, la continuité d'une fonction sur un intervalle I signifie qu'on peut tracer sa représentation graphique sans lever le crayon (dans une telle représentation, les traits verticaux ne sont bien sûr pas admis).
La traduction mathématique de la notion intuitive de continuité en un point (propriété locale), puis sur un intervalle de $\mathbb{R}$ permet à l'enseignant d'avoir un discours cohérent : on admettra que les fonctions construites par sommes, produits, compositions à partir des fonctions usuelles (polynômes, logarithme, exponentielle) sont continues, en indiquant que les démonstrations reposent sur des manipulations de la définition ; démontrer qu'une fonction est continue n'est pas un objectif du programme, et la définition ne sera mise en œuvre que sur un ou deux exemples de fonctions admettant des discontinuités (fonction « partie entière » notamment).
Comme on s'intéresse ultérieurement aux fonctions qui transforment les sommes en produit ou vice-versa, on pourra démontrer que les seules fonctions continues transformant les sommes en sommes sont les fonctions linéaires, et rappeler à cette occasion qu'en physique et en biologie, ce qu'on appelle fonction linéaire est une fonction telle que les accroissements de la fonction sont proportionnels à ceux de la variable, *i.e* les fonctions affines du cours de mathématiques.
Le théorème des valeurs intermédiaires est utilisé sous une forme intuitive dans les exemples 1 et 2 du paragraphe « Enseigner les mathématiques : résoudre des problèmes ».

> Une démonstration de ce théorème consiste à se ramener au cas d'une fonction f continue sur $[a, b]$, telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On construit alors par dichotomie deux suite adjacentes (a_n) et (b_n) :
> 1) $a = a_0$ et $b = b_0$;
> 2) si $f((a_n + b_n)/2) \geqslant 0$, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$;
> 3) si $f((a_n + b_n)/2) < 0$, $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$.
> Soit c la limite commune de (a_n) et (b_n) ; alors $(f(a_n))$ converge vers $f(c)$, d'où $f(c) \leqslant 0$; $(f(b_n))$ converge vers $f(c)$ d'où $f(c) \geqslant 0$; il s'ensuit que $f(c) = 0$.

Sur un tableau de variations d'une fonction f, on peut lire les intervalles où celle-ci est continue et strictement monotone. On pourra déduire directement l'existence et l'unicité de la solution d'une équation $f(x) = k$ à partir du tableau de variations. Il ne s'agit pas pour autant qu'un tel tableau soit un passage obligé dans une rédaction.

Fonctions

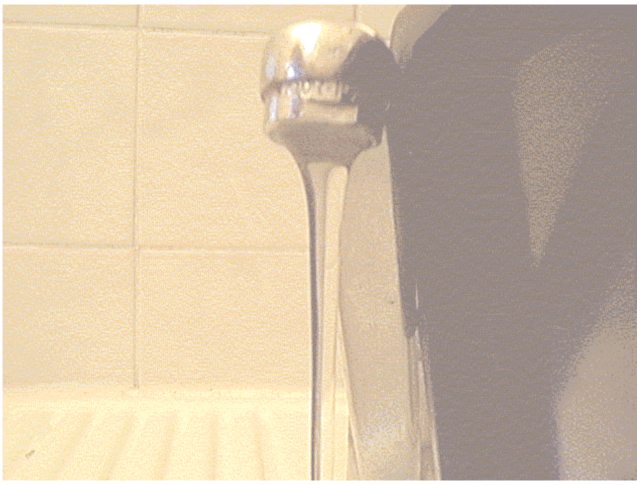
Les élèves se sont habitués depuis la classe de seconde au fait qu'en toute science, les grandeurs ne sont pas seulement envisagées du point de vue de leur mesure directe, mais aussi de leur dépendance vis-à-vis d'autres grandeurs, d'où le concept de fonction. En terminale, il peut être utile de rappeler à travers un ou deux exemples que des fonctions variées se trouvent dans des problèmes même relativement simples. Il est aussi indispensable d'étudier des fonctions en tant que telles afin d'acquérir des techniques de calcul, des automatismes et des images mentales.
L'exemple 2 indique le type de fonctions trigonométriques qu'on peut étudier. Par ailleurs, on étendra à la fonction tangente le type de calculs faits sur les fonctions sinus et cosinus (voir document d'accompagnement de première, page 65). On notera, en lien avec la physique, que les fonctions du type $\alpha\sin(\omega t + \varphi)$ sont des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$).

Exemples

I. Un problème de robinet revisité

Considérons l'écoulement d'eau d'un robinet à débit constant. Lorsque l'eau qui s'écoule n'est pas turbulente, le jet possède sur une certaine longueur une forme stable bien régulière : quelle est cette forme ? Si on regarde cet écoulement, voit-on un ruban de largeur constante ?

L'observation (voir photo ci-dessous et l'expérience de chacun) montre que le « ruban » va en s'amincissant vers le bas. On veut étudier ce phénomène.



Supposons que le robinet se termine par une partie cylindrique de rayon intérieur r. Désignons par v_0 la vitesse de l'eau à la sortie. Alors, le débit du robinet, c'est-à-dire le volume d'eau qu'il expulse par unité de temps, vaut $D = \pi v_0 r_0^2$.

Nous supposons ce débit constant. On peut à ce stade comprendre qualitativement pourquoi le ruban va en s'amincissant : si le débit est constant, comme la vitesse de l'eau augmente (« l'eau tombe »), le rayon diminue. Cette constatation, immédiatement intuitive pour certains, ne permet cependant pas de prévoir comment va décroître le rayon : en $1/\ln(x)$, $1/x^2$, $1/x$, $1/\sqrt{x}$, etc. ? Quelqu'un qui n'a jamais fait le type de calculs proposés ci-dessous ne peut pas avoir l'intuition du type de décroissance qui va se produire.

Plus précisément : dès sa sortie du robinet, l'eau est en chute libre et pendant quelques instants, on peut négliger les forces de frottement. La vitesse à l'instant t et la distance $x(t)$ parcourue par une molécule d'eau s'écrivent respectivement, en prenant $x(0) = 0$:

$$v(t) = gt + v_0, \text{ et } x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t,$$

d'abord en exprimant la vitesse en fonction de x et ensuite en exprimant que le débit est constant à toutes les abscisses (il n'y a nulle part accumulation d'eau).

Pour arriver à la vitesse en fonction de x, on élimine t entre $v(t)$ et $x(t)$. Cela donne :

$$t = \frac{v(t) - v_0}{g} \text{ et } x(t) = \frac{v(t)^2 - v_0^2}{2g}.$$

$$v(x) = v_0(1 + ax)^{1/2} \text{ avec } a = \frac{2g}{v_0^2} \quad (4).$$

Le débit s'écrit :

$$D = \pi r^2(x) v(x) \quad (5).$$

En éliminant v entre (4) et (5), on obtient :

$$r(x) = \left(\frac{D}{\pi v(x)}\right)^{1/2} = \left(\frac{D}{\pi v_0 (1 + ax)^{1/2}}\right) = r_0 (1 + ax)^{-1/4}.$$

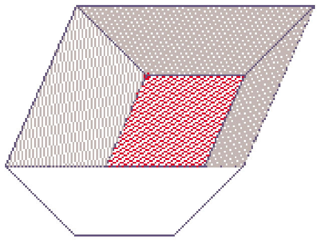
La décroissance de r est ainsi dans un premier temps en $x^{-1/4}$. Mais le jet d'eau n'est pas stable sur une grande durée : il finit par se casser, et de toute façon, il faudrait pour une étude sur un temps plus long tenir compte des forces de frottement (voir paragraphe sur la chute des corps).

Voici quelques données numériques à ce propos, pour $r_0 = 0{,}05$ dm (D est en L/min).

x	0,1	0,5
D = 1	0,033	0,023
D = 2	0,042	0,032
D = 5	0,048	0,042

II. Une feuille qu'on plie

On plie dans le sens de la longueur en trois parties égales une feuille de papier rectangulaire. Le rectangle du milieu reste posé sur la table (voir figure ci-contre).



Quelle même inclinaison par rapport à la table doit-on donner aux deux rectangles extérieurs si on veut que le volume de la portion d'espace limitée par la feuille, un plan horizontal posé sur les rectangles extérieurs et deux plans verticaux adossés à la feuille soit maximal ?

Que se passe-t-il si la largeur des rectangles extérieurs est différente de celle du rectangle horizontal ?

On appelle a la largeur des trois rectangles, c leur longueur et α l'angle entre la table et un des rectangles extérieurs, avec α dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $V(\alpha) = ca^2 \sin\alpha\,(1 + \cos\alpha)$.

Le volume est maximal pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Dans le second cas, qui dépasse le niveau exigible, on appelle a la largeur des rectangles extérieurs et b la largeur du rectangle posé sur la table. On a : $V(a) = ca \sin\alpha\,(b + \alpha \cos\alpha)$. Le volume est maximal pour α tel que $\cos\alpha = u$ avec $u = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4a}$ (on remarque que u est élément de]0, 1[pour tous a et b strictement positifs).

Calcul intégral

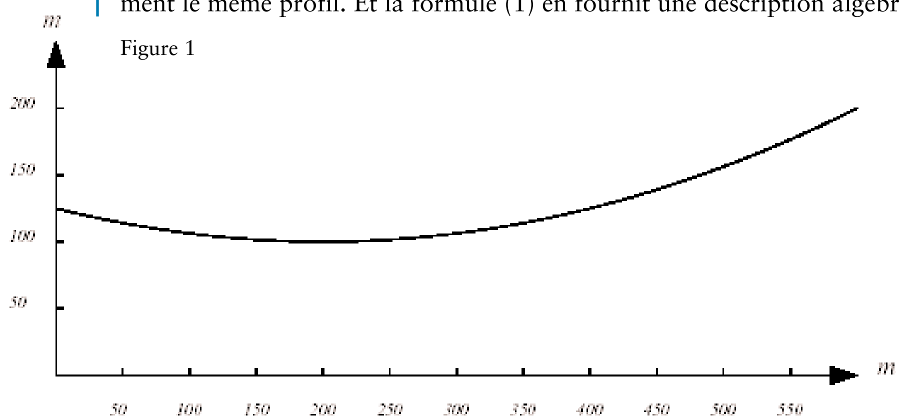
On trouvera ci-dessous une présentation du calcul intégral, dont l'objectif premier est une bonne compréhension du concept d'intégrale : on a veillé à la progressivité de cette présentation et à la diversité des points de vue ; on y a repéré certains sauts épistémologiques ; le lien entre calcul intégral et primitive y est particulièrement mis en valeur. On attend des élèves, au départ, qu'ils connaissent le lien de la dérivée d'une part avec la pente d'une tangente, et de l'autre avec la vitesse.

I. Un terrain

I.1. On connaît le profil

La figure 1 ci-dessous, sur laquelle les distances et les hauteurs sont indiquées en mètres, montre le profil d'un terrain. Le tableau 1 page suivante décrit numériquement le même profil. Et la formule (1) en fournit une description algébrique.

Figure 1



d en m	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
$h(d)$ en m	125,00	114,06	106,25	102,10	100,00	102,10	106,25	114,07	125,00	139,06	156,25	176,56	200

Tableau 1

$$h(d) = \frac{d^2}{1600} - \frac{d}{4} + 125 \quad (1)$$

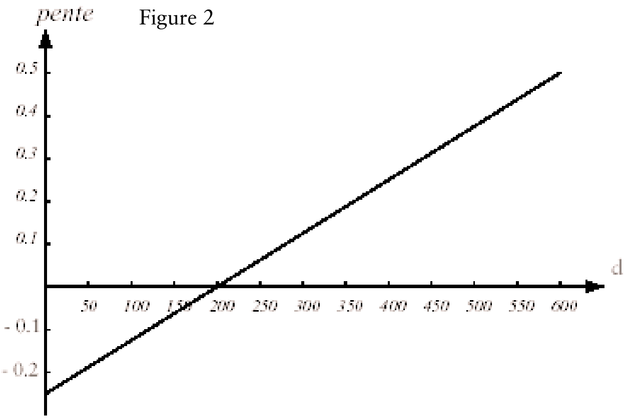
Question 1
On voudrait niveler le terrain décrit ci-dessus. À quelle hauteur faut-il situer le terrain nivelé pour que les remblais équilibrent exactement les déblais ?
On suggère de répondre à cette question dans un premier temps en ne se servant que de la figure 1. Ensuite, on ne s'appuiera que sur le tableau 1. Et enfin, on se servira uniquement de la formule (1).

Question 2
Toujours en ce qui concerne le même terrain, on demande d'évaluer sa pente en chaque point. On suggère à nouveau de répondre à la question en se servant uniquement d'abord de la figure 1, puis du tableau 1 et enfin de la formule (1).

Éléments de réponse
Le plus souvent, lorsque les élèves doivent trouver l'aire sous une courbe en ne disposant que du graphique de celle-ci, ils remplissent approximativement la surface en question par un assemblage de rectangles et de triangles, dont ils additionnent ensuite les aires.
Le fait de partir du tableau 1 les porte à utiliser des rectangles ou des trapèzes jointifs dont ils additionnent les aires.
S'ils ne connaissent pas encore l'usage de la primitive pour intégrer, ils n'ont pas d'autre recours au vu de la formule (1) que de revenir à la vue graphique ou à la vue numérique des choses.
Dans cette question, l'intégrale est une aire au sens propre du terme : quelque chose que l'on peut évaluer en m^2.
Il n'y a aucune chance que les élèves évoquent la fonction aire, c'est-à-dire la fonction qui donne l'aire sous la courbe entre l'origine et une abscisse courante. *A fortiori*, ils n'identifieront pas la hauteur du terrain au taux de variation de la fonction aire.
Par conséquent, la question posée conduit à associer fortement la notion d'intégrale à celle d'aire, mais elle ne suggère en aucune façon la réciprocité de l'intégrale et de la dérivée.

I.2. On connaît la pente

Figure 2



La figure 2, sur laquelle les distances sont indiquées en mètres, montre la pente d'un sentier sur une distance de 600 m. Le tableau 2 fournit numériquement les mêmes pentes. Et la formule (2) en fournit une description algébrique.

d en m	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
$p(d)$ en m	-0,25	-0,1875	-0,125	-0,625	0,000	0,0625	0,125	0,1875	0,25	0,3125	0,3750	0,4375	0,5

Tableau 2

$$p(d) = \frac{d}{800} - \frac{1}{4} \quad (2)$$

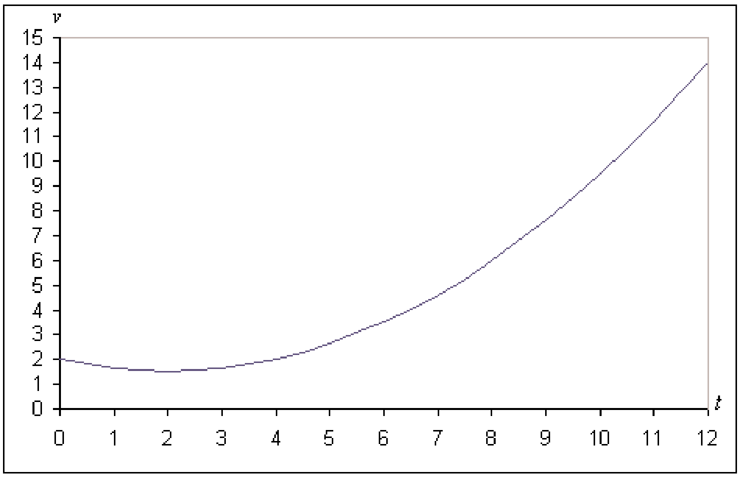
Question 3
La figure 2 donne les pentes. Il n'est donc pas possible de construire le profil sur cette figure. On s'attend donc à ce que les élèves commencent tout de suite un graphique du profil.
Une première façon consiste à choisir une hauteur de départ, puis à avancer pas à pas sur de petites distances, sur chacune desquelles on maintient une pente constante, donnée par la courbe des pentes.
Une deuxième façon consiste à dessiner, dans le système d'axes où on veut représenter le profil, un champ d'éléments de contact, puis à dessiner le profil à vue en partant d'une hauteur choisie arbitrairement à l'abscisse 0.
Des réponses analogues peuvent être développée au départ du tableau 2.
D'autre part, s'ils sont déjà familiers de la dérivée et de son interprétation comme pente d'une tangente, ils ont une petite chance d'arriver à penser que l'anti-dérivée de la fonction (2) peut les aider à trouver le profil.
Dans cette question, la pente est une vraie pente : elle prend son sens dans le champ supposé uniforme de la pesanteur.
Notons enfin que les élèves n'ont aucune chance d'interpréter la fonction aire sous le graphique des pentes comme donnant le profil du terrain.

II. Un mouvement

II.1. On connaît la vitesse

La figure 3 donne la vitesse d'un mobile pendant un intervalle de temps de 12 secondes. Le tableau 3 fournit la même information numériquement, et la formule (3) l'exprime algébriquement.

Figure 3



t en s	v(t) en m/s
0	2
1	1,625
2	1,5
3	1,625
4	2
5	2,625
6	3,5
7	4,625
8	6
9	7,625
10	9,5
11	11,625
12	14

Tableau 3

$$v(t) = \frac{t^2}{8} - \frac{t}{2} + 2 \quad (3)$$

Question 4
Déterminer, en fonction du temps, l'espace parcouru par le mobile. Dans un premier temps, on résoudra la question en ne s'appuyant que sur la figure 3. Ensuite on partira du tableau 3, et enfin de la formule (3).
Déterminer les positions connaissant les vitesses pourrait s'avérer utile par exemple à un bateau perdu au milieu de l'océan par temps de brouillard et avec tous ses instruments de navigation en panne. On suppose toutefois que le bateau serait encore capable de mesurer sa vitesse par rapport à l'eau.

Éléments de réponse
La vitesse et l'espace parcouru sont des notions assez familières. On s'attend à ce que, devant établir l'espace parcouru en fonction du temps, les élèves commencent par dessiner des axes gradués en secondes et en mètres. Une première façon de répondre à la question consiste à enchaîner des mouvements uniformes de durées brèves. Une autre

consiste à dessiner un champ d'éléments de contact et à tracer à l'estime le diagramme des espaces parcourus. Dans les deux cas, il faut choisir une position de départ.
Si les élèves sont familiers de la dérivée, ils ont une chance de penser à la primitive de la fonction (3).
Notons qu'ici les positions sont de vraies positions : elles se mesurent – à l'échelle –, en mètres à partir d'une origine. Mais les pentes ne sont pas de vraies pentes.
Les élèves n'ont dans un premier temps aucune chance d'identifier la fonction aire (qui n'est pas une vraie aire) sous la courbe des vitesses, comme donnant les positions du mobile.

II.2. On connaît la masse et la force
Un objet pesant un kg est soumis pendant 12 secondes à une force donnée en fonction du temps par la figure 4. La même force est donnée de seconde en seconde par le tableau 4. Elle est enfin exprimée algébriquement par la formule (4).

t en s	$f(t)$ en N
0	-0,5
1	-0,25
2	0
3	0,25
4	0,5
5	0,75
6	1
7	1,25
8	1,5
9	1,75
10	2
11	2,25
12	2,5

Tableau 4

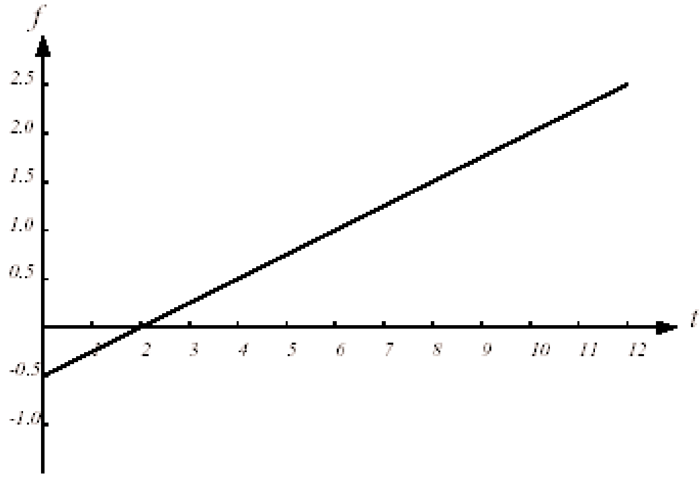


Figure 4

$$f(t) = \frac{t}{4} - \frac{1}{2} \quad (4)$$

Question 5
Déterminer, en fonction du temps, d'abord l'accélération du mobile, puis sa vitesse et enfin sa position. On résoudra la question par le moyen qui apparaîtra le plus commode.
Déterminer les positions à partir de la force s'avère utile dans les circonstances suivantes : dans un sous-marin en plongée, incapable de mesurer sa vitesse par rapport à l'eau et ayant perdu l'usage de tous ses autres instruments de navigation, on mesure l'accélération du bâtiment par la déformation d'un ressort auquel une masse est accrochée. Il s'agit là effectivement au départ d'une mesure de force. Un tel dispositif ne peut être utilisé que dans un mouvement en ligne droite. Dans la pratique, on mesure trois composantes de la force à l'aide d'un dispositif gyroscopique.

Éléments de réponse
Puisque la masse du corps mentionné dans l'énoncé est égale à 1 kg, l'accélération est numériquement égale à la force. Et donc le graphique de l'accélération s'obtient à partir de celui de la force en considérant que l'axe des ordonnées est gradué, non plus en newton, mais en m/s^2.
L'accélération est un concept beaucoup plus abstrait que la vitesse : elle est le taux de variation de cette dernière. Peut-on espérer que les élèves, ayant déjà à ce stade résolu quelques problèmes d'intégration dans des contextes divers, arriveront à choisir leur méthode en connaissance de cause : le passage par les primitives s'impose dans ces conditions.

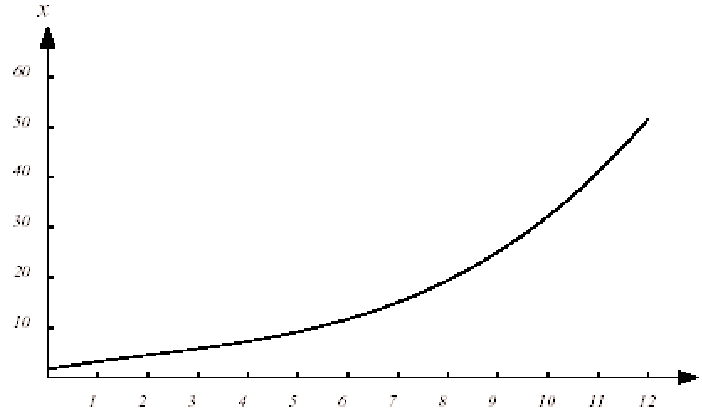
II.3. On connaît le mouvement

La figure 5, sur laquelle les distances sont indiquées en mètres et les temps en secondes, décrit le mouvement d'un mobile pesant 1 kg pendant un intervalle de temps de 12 secondes. Le tableau 5 décrit numériquement le même mouvement. Et la formule (5) en fournit une expression algébrique.

t en s	$f(t)$ en N
0	2,0000
1	3,7917
2	5,3333
3	6,8750
4	8,6667
5	10,9583
6	14,0000
7	18,0417
8	23,3333
9	30,1250
10	38,6667
11	49,2083
12	62,0000

Tableau 5

Figure 5



$$f(t) = \frac{t^3}{24} - \frac{t^2}{4} + 2t + 2 \quad (5)$$

Question 6

Déterminer, en fonction du temps, la force qui a été nécessaire pour communiquer ce mouvement au mobile.

Une question analogue – et peut-être motivante pour certains élèves –, pourrait être : quelle force doit développer un moteur pour communiquer à une auto de 800 kg, en 12 secondes, une vitesse de 80 km/h ?

Ces deux questions se résolvent par de simples dérivations. Nous les proposons ici dans l'idée que, pour bien comprendre le théorème fondamental de l'analyse, il est bon d'avoir pratiqué autant l'aller que le retour.

III. Commentaires

Il s'agit d'un ensemble de questions stylisées à l'extrême et très systématiques. Les fonctions en jeu sont simples, de sorte que les élèves se concentrent sur la nature des phénomènes, plutôt que sur des difficultés techniques.

Les contextes évoqués sont porteurs d'intuitions significativement différentes et complémentaires. Les concepts étudiés – les dérivées successives, les intégrales successives et les primitives –, trouvent leur plénitude de sens dans les liens qu'ils entretiennent entre eux, mais aussi dans les questions concrètes qu'ils éclairent (terrain et mouvement). D'autre part, les trois modalités d'expression des données – graphique, tableau et formule –, induisent des procédés de résolution porteurs de sens eux aussi, et de technicités variées. Il faut avoir quelques fois laborieusement intégré une fonction par voie graphique ou numérique pour saisir le miracle de la primitive, qui ramène l'intégration à une simple différence.

Le lien implicite aux équations différentielles est aussi à souligner : les équations différentielles les plus simples sont sans doute celles de la forme $f'(t) = g(t)$ et elles ont pour expression géométrique un champ d'éléments de contact.

Le principe général que ces quelques questions ont aussi pour fonction d'illustrer est qu'une certaine richesse de liens conceptuels provoque la mobilité de la pensée et la joie de réfléchir.

Cette présentation sera complétée par l'approche théorique demandée par le programme : par encadrement à l'aide de deux suites adjacentes. On pourra également s'inspirer du travail sur l'aire sous une arche de parabole présenté dans le document d'accompagnement de l'option de la série L ; ce dernier document propose notamment une démonstration par les aires de la relation fonctionnelle caractéristique des logarithmes.

Géométrie

Nombres complexes

L'introduction des racines « imaginaires » des nombres négatifs permet de trouver des solutions aux équations réelles du second degré à discriminant négatif. Mais ce n'est pas pour cela qu'elles ont d'abord été introduites. En effet, les formules de résolution de l'équation du deuxième degré n'ont pas de sens dans le cadre réel précisément lorsque l'équation n'a pas de racines réelles. Il peut alors paraître artificiel de parler de racines dans un cadre étendu dont rien ne motive ou ne justifie l'existence.
Mais le troisième degré nous confronte à une situation très différente. Rappelons que la formule de résolution de l'équation du troisième degré $x^3 + ax = b$ a été obtenue au début du XVI^e^ siècle par Scipione dal Ferro, sous la forme :

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Il est remarquable de constater que c'est dans le cas où l'équation a trois racines réelles que le discriminant $\Delta = 27b^2 + 4a^3$, qui figure sous le radical, est négatif. Par conséquent, c'est dans le cas où le nombre de racines réelles est maximal que la formule de résolution n'a plus de sens. Ce fait troublant a été constaté par les algébristes italiens peu après la découverte de dal Ferro, puisque vers la fin du XVI^e^ siècle, Bombelli, en appliquant la formule à l'équation $x^3 = 15x + 14$, ose écrire l'égalité $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ et donne correctement les règles de calcul des nombres complexes, sans employer toutefois la notation moderne. Remarquons, pour interpréter convenablement l'égalité ci-dessus, que $(2 + i)^3 = 2 + 11i$.

Cette extension du champ numérique n'a bien sûr été admise que progressivement, et il ne pouvait en être autrement puisqu'à l'époque les nombres négatifs eux-mêmes n'avaient pas acquis droit de cité, ce qui conduisait les algébristes à considérer différents cas là où nous ne voyons qu'une seule équation. Sous la plume de Leibniz, pourtant innovateur et utilisateur des nombres complexes, nous lisons un siècle plus tard : « Ces expressions ont ceci d'admirable que dans le calcul elles n'enveloppent rien d'absurde ni de contradictoire, et que cependant on ne peut en donner d'exemple dans la nature, c'est-à-dire dans les choses concrètes. » L'histoire fournit divers exemples du cheminement qui part d'un besoin mathématique et, par la mise au point d'un outil, la définition d'une notation, le dégagement d'un concept, parvient à la formalisation d'une nouvelle notion. Le calcul complexe, dont on a constaté l'efficacité avant de pleinement la comprendre, illustre ce cheminement.
La terminologie moderne a reçu en héritage de l'embarras des précurseurs la terminologie des nombres « imaginaires », qui à vrai dire ne sont pas plus imaginaires que les nombres réels ne sont réels. L'exponentielle complexe, entrevue par Leibniz et étudiée par Euler, puis la correspondance entre points du plan et nombres complexes, certainement évidente pour le jeune Gauss quand il démontre en 1797 que tout polynôme à coefficients complexes a une racine complexe, ont cependant contribué à dissiper le mystère qui entourait encore cette notion. Les élèves du XXI^e^ siècle, qui la découvrent par l'intermédiaire du plan complexe, devraient accepter facilement qu'un objet mathématique dont ils possèdent une représentation si commode puisse être manipulé sans risque de contradiction.

Concluons sur la formule de dal Ferro en rappelant qu'Euler a montré comment choisir les déterminations des racines cubiques qui figurent dans la formule pour obtenir trois racines et non neuf, puis que Lagrange a observé que l'expression $(x_1 + jx_2 + j^2x_3)^3$, où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine cubique de l'unité, ne prend que deux valeurs distinctes lorsqu'on permute les racines x_1, x_2, x_3 de l'équation. Cette remarque cruciale, qui permet de ramener le troisième degré au deuxième et explique l'existence de la formule de résolution, servira de point de départ à Galois qui montre en 1830 l'impossibilité de la résolution par radicaux de l'équation générale du cinquième degré. Sa démonstration, qui repose sur l'analyse de l'ensemble des permutations des cinq racines, est l'acte de naissance de la théorie des groupes.

Calculer dans $\mathbb{C}$

Le point M du plan de coordonnées (a,b) peut être identifié naturellement d'une part au vecteur $\overrightarrow{OM}$ et d'autre part au nombre complexe $a + ib$. Cette identification montre que $a + ib = 0$ si et seulement si $a = b = 0$. L'addition des nombres complexes correspond dans cette identification à l'addition des vecteurs, déjà connue des élèves. On s'autorisera à exprimer en termes complexes les notions affines déjà rencontrées par les élèves : milieu de deux points, barycentres. Notons que l'identification entre nombres complexes et points du plan aide à comprendre pourquoi on ne peut pas comparer deux nombres complexes. Les élèves doivent être convaincus du fait que i n'est ni plus petit, ni plus grand que 0.
En posant $i^2 = -1$, on déduit la formule de multiplication de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Il est essentiel que les élèves comprennent que les parties réelle et imaginaire d'un produit ne sont pas les produits des parties réelles et imaginaires des facteurs, d'autant plus qu'une confusion est à craindre avec l'expression du produit scalaire de deux vecteurs. Après avoir introduit les règles du calcul algébrique sur les nombres complexes, on les interprétera géométriquement, en commençant par les cas simples : on montrera que la multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel k correspond à une homothétie de centre O et de rapport k, cependant que la multiplication par i induit la rotation d'angle $\pi/2$, ce qui devrait convaincre les élèves que la multiplication par un nombre complexe représente une transformation du plan dans lui-même. Dans l'enseignement de spécialité, cette méthode sera systématiquement utilisée dans l'étude des similitudes planes.

On introduira le conjugué d'un nombre complexe et son module, et on montrera par un calcul direct que si $z \neq 0$ alors $1/z = \bar{z}/|z|^2$. On remarquera que la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est égale au module de l'affixe de M, et donc que, d'après l'inégalité triangulaire, on a $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

On ne s'interdira pas de parler du « corps des complexes » et d'expliquer brièvement la signification du mot « corps » dans ce contexte. Mais il est clair qu'aucune connaissance dans ce domaine n'est exigible. Notons au passage que cette structure de corps dont on équipe le plan n'a pas d'analogue dans l'espace $\mathbb{R}^3$.
Il est facile de constater que tout polynôme du deuxième degré à coefficients réels a deux racines dans $\mathbb{C}$ (éventuellement confondues en une racine réelle). La résolution des équations du deuxième degré à coefficients complexes n'est pas au programme. L'énoncé du théorème de d'Alembert-Gauss est susceptible d'intéresser les élèves de ce niveau, mais on ne saurait y faire allusion que très brièvement.

L'exponentielle complexe

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe de module 1. On a donc $x^2 + y^2 = 1$, et la paramétrisation du cercle unité, bien connue des élèves, permet d'affirmer l'existence d'un angle θ, défini à un multiple de 2π près, tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.

Les formules de trigonométrie déjà étudiées énoncent que

$$\sin(\theta + \theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' \quad (1)$$

et

$$\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \quad (2).$$

Si l'on pose *a priori*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (3)$$

les formules (1) et (2) ci-dessus permettent de montrer immédiatement que :

$$e^{i(\theta + \theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}.$$

Cette équation justifie *a posteriori* la notation exponentielle complexe, puisque les élèves ont vu en analyse que les fonctions exponentielles étaient caractérisées par leur équation fonctionnelle. Il parait difficile à ce niveau de procéder à une justification plus rigoureuse de l'égalité (3), qui nécessiterait l'usage des développements en série. Par contre, il est crucial de parler de l'argument d'un nombre complexe, défini à $2k\pi$ près, et de s'assurer que les élèves connaissent et savent utiliser la forme polaire $z = |z|e^{i\theta} = \rho e^{i\theta}$.

La formule (3) permet en retour de retrouver très facilement les formules d'addition (1) et (2), et les formules de duplication qui en sont un cas particulier. Les élèves devraient apprécier ce moyen de soulager leur mémoire.

Les questions liées à la mesure des angles et au logarithme complexe sont délicates. Terminons ce paragraphe par un hommage à Leibniz, qui écrivait en 1712 : « Pour n'être ni positif ni négatif, il faut que le logarithme de – 1 ne soit pas véritable mais imaginaire. C'est pourquoi le rapport qui lui correspond ne sera pas véritable mais imaginaire. En voici une autre preuve. S'il existait un vrai logarithme de – 1, c'est-à-dire du rapport de – 1 à + 1, en le divisant par deux nous obtiendrions le logarithme de $\sqrt{-1}$, or $\sqrt{-1}$ est une quantité imaginaire. Nous aboutirions donc au logarithme véritable d'une quantité imaginaire, ce qui est absurde. »

Nombres complexes et problèmes géométriques

Ce document propose d'introduire les nombres complexes comme affixes des points du plan. Il devient dès lors évident qu'une fonction affine de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ correspond à une transformation du plan dans lui-même. On pourra attirer l'attention sur le fait que le graphe d'une telle application n'est pas accessible à la visualisation puisque l'espace physique ne nous prodigue que trois dimensions. Mais il est important que les élèves sachent reconnaître la forme complexe des translations, des rotations et des homothéties du plan, et l'utiliser dans le cadre de problèmes géométriques simples. Une étude plus poussée des similitudes et de la composition de ces transformations est réservée à l'enseignement de spécialité.

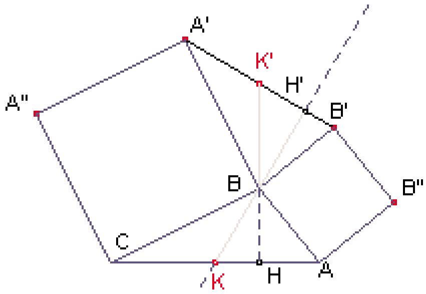
Exemples de problèmes géométriques

Les exemples proposés ci-dessous sont classiques ; ils illustrent plus particulièrement le paragraphe introductif du chapitre II.2 de géométrie du programme : « mettre en œuvre toutes les connaissances de géométrie de l'ensemble du cursus scolaire » ; « privilégier les problèmes dont les procédés de résolution peuvent avoir valeur de méthode » ; « choisir l'outil de résolution le plus pertinent »… Le procédé de construction de ces exemples (compléter un triangle, un quadrilatère à l'aide de triangles ou quadrilatères de même nature) permet de présenter des situations à la fois élémentaires et intéressantes. Dans le cas où l'on souhaite privilégier le traitement avec les nombres complexes, on n'oubliera pas de solliciter d'abord l'intuition des élèves : l'observation des figures permet de conjecturer les propriétés et d'orienter le calcul pour les démontrer.

Des carrés autour d'un triangle

Situation 1

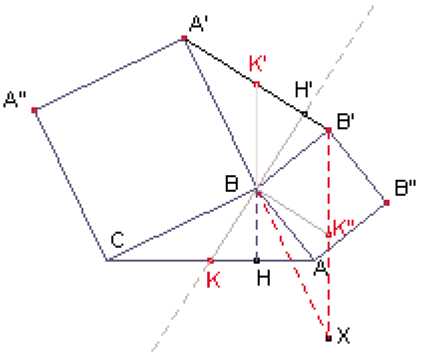
Soit ABC un triangle quelconque ; on construit à l'extérieur de ce triangle les carrés ABB'B" et CBA'A".



Alors la médiane issue de B du triangle ABC est aussi hauteur du triangle BB'A' (et symétriquement, la médiane issue de B du triangle BA'B' est aussi hauteur du triangle ABC).

– La preuve est immédiate à l'aide des nombres complexes. Dans le plan complexe d'origine B, $\overrightarrow{BK}$ a pour affixe $(a + c)/2$; B' et A' ont pour affixes respectives ia et $-ic$ et donc $\overrightarrow{B'A'}$ a pour affixe $i(a + c)$: d'où le résultat. Le calcul prouve en outre que A'B' = 2BK.

– On obtient une autre solution à l'aide de la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



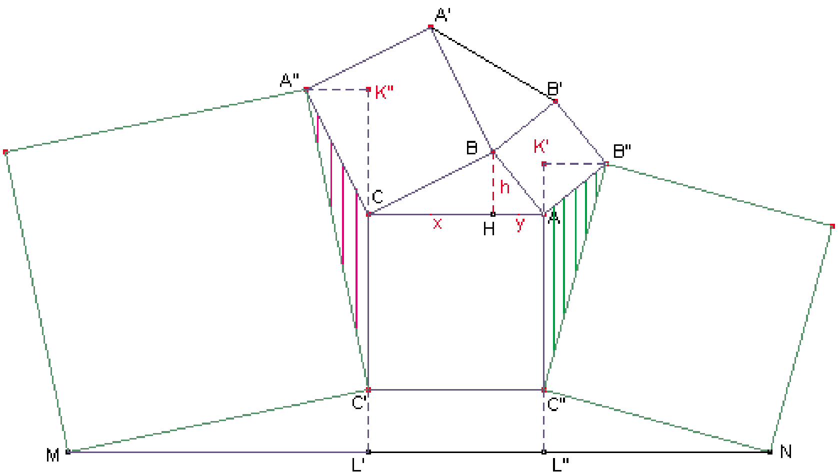
Soit B'BX l'image du triangle ABC par cette rotation. Les points A', B et X sont alignés. Soit K" l'image de K, alors (BK")//(A'B') puisque B et K" sont les milieux de deux côtés du triangle XA'B'. (BK") est perpendiculaire à (BK) : d'où le résultat.

– On peut aussi traiter le problème à l'aide du produit scalaire : $2\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{A'B'} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}).(\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{BA'}) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA'} = 0$, puisque les deux produits scalaires $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA'}$ sont égaux (définition du produit scalaire).

Remarque – On peut aussi s'intéresser à la nature du triangle KO_1O_2, où O_1 et O_2 sont les centres des deux carrés ; on prouve que celui-ci est rectangle isocèle.

Situation 2

On construit des carrés sur les côtés *A"C'* et *B"C"* extérieurs à la figure (dessin ci-dessous). Le parallélisme de (*MN*) et (*AC*) semble flagrant. Comment le prouver ?



– Preuve avec les nombres complexes.

Dans le plan complexe d'origine *B*. Soient *a* et *c* les affixes des points *A* et *C*. On calcule facilement les affixes des points *A"* $[c(1 - i)]$, *C'* $[c - i(a - c)]$, *B"* $[a(1 + i)]$, *C"* $[a - i(a - c)]$ puis celles de *M* et *N*. On aboutit à $\overrightarrow{MN}$ d'affixe $4(a - c)$. D'où le parallélisme conjecturé ; on a de plus $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{CA}$.

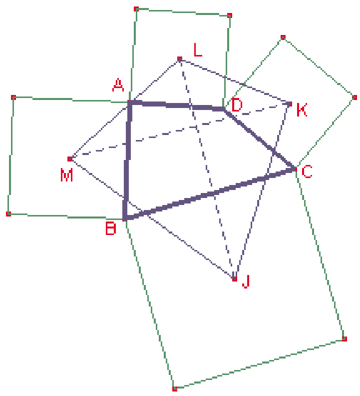
– La solution géométrique est plus délicate.

Soit *H* le pied de la hauteur issue de B et posons $CH = x$, $HA = y$ et $BH = h$.

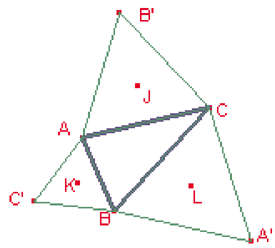
Considérons les projections orthogonales L' et K'' des points M et A'' sur la droite (CC') d'une part et les projections orthogonales L'' et K' des points N et B'' sur la droite (AC''). Par rotation de centre C, on obtient $A''K'' = BH = h$. Il est facile d'établir que les triangles $C'A''K''$ et $MC'L'$ sont isométriques d'où $C'L' = h$. On établit de même que $C''L'' = h$ ce qui permet de conclure que $C'L'L''C''$ est un rectangle et que $(MN) // (CA)$. On obtient facilement $MN = 4CA$ (en effet $ML' = C'K'' = AC + x$; $NL'' = AC + y$;…).

Remarque – Quel(s) résultat(s) supplémentaire(s) a-t-on si le triangle ABC est rectangle en B ?
On peut montrer, par exemple, que, sous cette hypothèse, la somme des aires des carrés de côté A"C' et B"C" vaut cinq fois l'aire du carré de côté A'B'.

Des carrés autour d'un quadrilatère
On construit les 4 carrés qui s'appuient extérieurement sur les côtés d'un quadrilatère.
Soient M, J, K et L ces centres.
Les diagonales du quadrilatère $MJKL$ sont égales et perpendiculaires.
$MJKL$ est un carré lorsque $ABCD$ est un parallélogramme.
Le traitement complexe, bien que calculatoire, permet ici de conclure très vite. On peut aussi utiliser une rotation d'angle droit et de centre le milieu de $[BD]$, et s'appuyer sur la remarque de la situation 1 ci-dessus.



Des triangles équilatéraux autour d'un triangle
À l'extérieur d'un triangle ABC, on construit les triangles équilatéraux qui s'appuient sur les côtés. On note J, K et L les centres de ces triangles équilatéraux.
Les triangles ABC, $A'B'C'$ et JKL ont même centre de gravité.
Le triangle JKL est équilatéral.
Là aussi, le traitement complexe s'avère très efficace. Une résolution à l'aide de rotations est plus délicate (elle suppose l'intervention d'une composée de rotations, notion peu familière pour la plupart des élèves).



Géométrie dans l'espace

Une présentation possible du produit scalaire dans l'espace

Lors de l'étude du produit scalaire dans le plan, il a été établi que lorsque le plan était rapporté à une base orthonormale, le produit scalaire du vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (x,y) et du vecteur $\vec{v}'$ de coordonnées (x',y') était égal à : $\vec{v}.\vec{v}' = xx' + yy'$.
On peut introduire le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace en étendant cette formule aux triplets de coordonnées. Donc, si l'espace est rapporté à une base orthonormale, le produit scalaire du vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (x,y,z) et du vecteur $\vec{v}'$ de coordonnées (x',y',z') est égal à : $\vec{v}.\vec{v}' = xx' + yy' + zz'$. (1)

Pour comprendre que cette définition est intrinsèque, c'est-à-dire indépendante de la base orthonormale choisie, on observe que d'après le théorème de Pythagore, lorsqu'un vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées (x,y,z) dans une base orthonormale, alors le carré $\|\vec{v}\|^2$ de sa longueur est donné par : $\|\vec{v}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Or $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}.\vec{v}$. Un calcul direct établit alors que : $\vec{v}.\vec{v}' = \frac{1}{2}\left[\|\vec{v} + \vec{v}'\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}'\|^2\right]$ (2).

Cette expression montre également que la restriction à un plan du produit scalaire, tel qu'on vient de le définir dans $\mathbb{R}^3$ coïncide avec la notion déjà définie et étudiée dans le plan. D'après le théorème de Pythagore et sa réciproque, $\vec{v}.\vec{v}' = 0$ si et seulement si les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont perpendiculaires. Puisque la formule (2) montre que la notion définie étend le cas plan, on peut parler de l'angle θ entre deux vecteurs de l'espace, à l'aide de la formule : $\vec{v}.\vec{v}' = \|\vec{v}\| \times \|\vec{v}'\| \times \cos\theta$.

On pourra noter la difficulté liée à l'absence d'orientation naturelle sur un plan de l'espace, qui fait qu'on ne définit cet angle qu'au signe près.
La formule (1) permet de vérifier immédiatement que le produit scalaire est symétrique et bilinéaire. On pourra retrouver, grâce à cette propriété de bilinéarité, des résultats vus en classe de seconde tels la caractérisation d'une droite orthogonale à un plan (« un vecteur est orthogonal (ou normal) à un plan si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan ») ou le théorème dit « des trois perpendiculaires ».

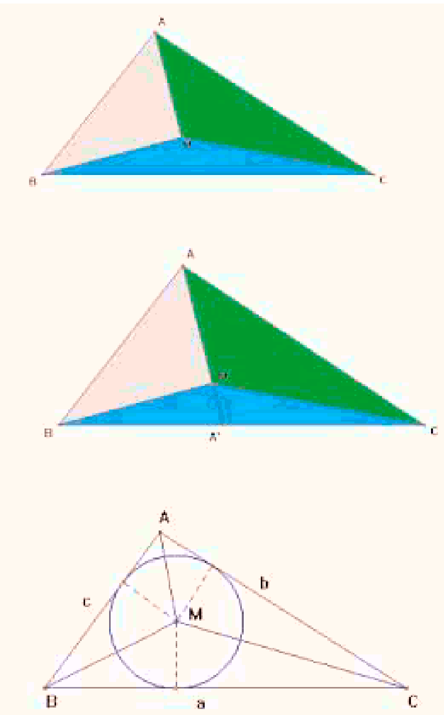
Droites et plans de l'espace

Au cours de leur scolarité, les élèves ont étudié des objets simples du plan et de l'espace (droites, plans, cercles, sphères, triangles) à l'aide de méthodes diverses. En terminale, l'objectif est de prolonger cette étude en équilibrant les points de vue algébrique et géométrique.
Un point essentiel est la capacité à traduire en langage algébrique les problèmes géométriques et, inversement, d'interpréter géométriquement les calculs algébriques. Il n'y a pas lieu d'établir une opposition entre les méthodes de géométrie pure et les méthodes de géométrie analytique (calcul vectoriel ou calcul avec de coordonnées) : dans les deux cas, les élèves doivent améliorer leur vision des relations entre objets mathématiques, ceux-ci pouvant être aussi bien des objets géométriques que leurs représentations analytiques (coordonnées, équations). À ce titre, on pourra donner des exemples de démonstrations de propriétés géométriques à l'aide de ces deux méthodes.
Les élèves traiteront de situations où il s'agit, à partir de points, droites, plans… donnés dans un repère par leurs coordonnées ou leurs équations, d'en déterminer d'autres caractérisées par des conditions géométriques. Pour ce faire, on se placera toujours dans un repère orthonormal.
Ces exercices aident à renforcer les capacités des élèves dans les calculs algébriques, mais leur intérêt va au-delà de l'aspect mécanique des calculs : les élèves apprennent ainsi à organiser leurs calculs et à les présenter de façon à mettre en évidence la signification géométrique de chaque étape. On insistera sur le fait qu'un exercice de géométrie analytique ne consiste pas à enchaîner sans commentaire des calculs formels, mais au contraire d'expliquer clairement ce que l'on est en train de calculer.
Ces problèmes sont indissociables de l'étude des systèmes linéaires : les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues s'interprètent comme des intersections de deux droites du plan, les systèmes de deux ou trois équations linéaires à trois inconnues comme des intersections de deux ou trois plans de l'espace. Il n'est pas demandé d'étude générale des systèmes linéaires 3×3 (la méthode du pivot de Gauss n'est pas au programme, l'utilisation systématique et codifiée d'opérations élémentaires sur les lignes non plus) ; les systèmes liés à tel ou tel problème seront résolus avec les mêmes méthodes que celles utilisées antérieurement pour les systèmes 2×2 (substitution ou combinaison élémentaire) en veillant à contrôler les équivalences entre les systèmes écrits : l'objectif est donc ici que les élèves acquièrent une maîtrise raisonnée des systèmes linéaires à deux ou trois inconnues sans qu'il soit nécessaire de viser une mécanisation complète des calculs.
On utilisera les diverses représentations des droites et des plans : caractérisation barycentrique ; équation cartésienne d'un plan de l'espace ; représentation paramétrique ou parfois système de deux équations cartésiennes d'une droite de l'espace ; et, bien sûr, équation cartésienne ou représentation paramétrique d'une droite du plan (cette dernière notion étant à présenter en même temps dans le plan et l'espace).

Certains problèmes mettront en œuvre la notion de partie convexe (le terme lui-même n'est pas au programme), sous-jacente à la définition du segment [AB] (resp. du triangle plein ABC) comme ensemble des barycentres à coefficients positifs de A et B (resp. de A, B, C). On pourra retrouver cette notion lors de situations se traitant à l'aide de demi-espaces ou de demi-plans : ce sera l'occasion d'aborder des systèmes simples d'inéquations linéaires.
On continuera à traiter de situations planes, dans le prolongement de ce qui a été fait en première et en cohérence avec les autres parties du programme (nombres complexes, équations différentielles…).

1) Le tétraèdre : étude géométrique ou étude algébrique (avec produit scalaire, ou dans un repère convenablement choisi)
– Étude du tétraèdre régulier ABCD (en liaison avec la molécule de méthane CH_4, dans laquelle l'atome de carbone occupe le centre de la molécule et les quatre atomes d'hydrogène sont disposés à égale distance du centre et sont équidistants entre eux) : orthogonalité des arêtes opposées ; hauteurs (AA'), (BB')… où A' (resp. B'…) est le centre de la face BCD (resp. CDA…) ; calcul de l'angle $\widehat{BOC}$; recherche du point A" de [AA'] tel que l'angle $\widehat{BA"C}$ soit droit…
– Condition pour que les hauteurs d'un tétraèdre soient concourantes : il faut et il suffit que deux couples d'arêtes opposées soient orthogonales, le troisième couple l'est alors aussi. (On dit alors que le tétraèdre est orthocentrique.)
– Condition pour que les arêtes opposées d'un tétraèdre aient même longueur : il faut et il suffit que les bimédianes (droites joignant les milieux de deux arêtes opposées) soient perpendiculaires aux arêtes opposées.

2) Ensemble de points équidistants



– Ensemble des points équidistants de deux points (plan médiateur).
– Ensemble des points équidistants de trois points non alignés (résolution géométrique, résolution analytique) ; dans le cas où les trois points sont dans un plan parallèle à l'un des plans de base du repère, équation du cylindre perpendiculaire à ce plan, de base le triangle défini par ces points.
– Ensemble des points équidistants de quatre points non coplanaires (résolution géométrique, résolution analytique) ; sphère circonscrite à un tétraèdre.
– Ensemble des points équidistants de deux plans.

3) Élection au pays des Cartes (exemple 1 du document d'accompagnement de première ES, p. 21-22) : géométrie analytique

4) Recherche des points du plan où passent deux tangentes à une parabole (resp. à un cercle) faisant un angle droit

5) Caractérisation barycentrique d'un point M intérieur à un triangle ABC, avec des aires
M est barycentre des points A, B et C pondérés respectivement par les aires des triangles MBC, MCA et MAB.

Indication : on montre dans un premier temps que A' est barycentre de B et C pondérés respectivement par les aires de MCA et MAC. Pour cela, on établit les égalités suivantes $\dfrac{A'B}{A'C}=\dfrac{\mathscr{A}(MA'B)}{\mathscr{A}(MA'C)}=\dfrac{\mathscr{A}(AA'B)}{\mathscr{A}(AA'C)}=\dfrac{\mathscr{A}(AMB)}{\mathscr{A}(AMC)}$ (la dernière égalité se déduisant de l'avant-dernière), d'où l'on déduit : $\mathscr{A}(AMC)\overrightarrow{A'B}+\mathscr{A}(AMB)\overrightarrow{A'C}=0$.

Application : le barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c) où a, b et c sont les longueurs des côtés opposés à A, B et C est le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle ABC.
Problème : Recherche du centre d'inertie d'un triangle formé de barres de métal homogènes et de même section

6) Représentation d'objets pondérés selon 3 critères a, b, c (resp. 4 critères a, b, c, d)

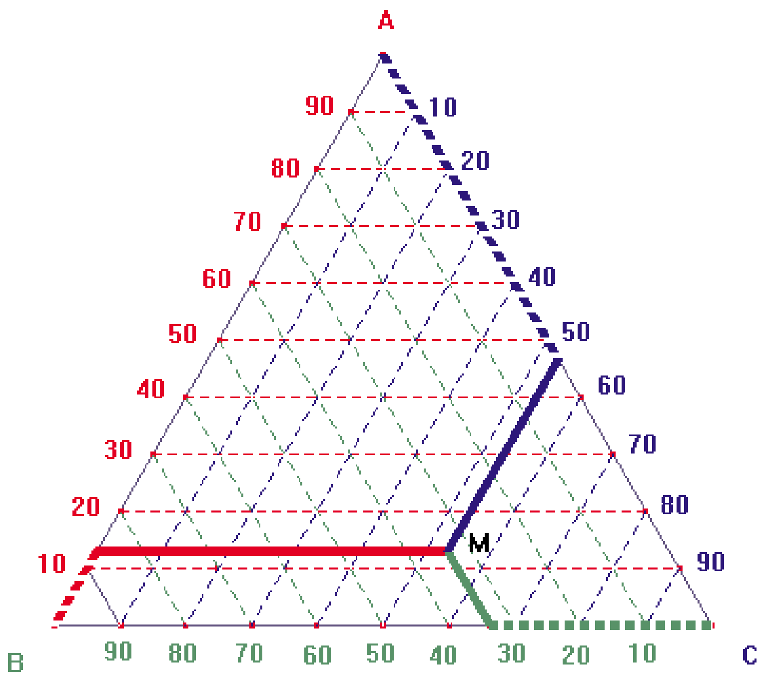


Diagramme triangulaire
(Le triangle ABC ci-contre est équilatéral.)
Expliquer pourquoi le point M est barycentre de A, B et C pondérés par les coefficients respectifs (lus sur le diagramme) 12, 34 et 54. (Faire le lien avec l'exemple 5 ci-dessus ; justifier ici que les aires des triangles MBC, MCA et MAB sont proportionnelles aux segments en pointillés gras respectivement rouge, vert et bleu ; observer que la somme des longueurs des trois segments en pointillés est constante et égale à la longueur du côté du triangle équilatéral, chaque côté étant gradué de 0 à 100.)
Ce type de schéma permet par exemple de situer des pays en fonction de la répartition en pourcentage de leur population selon les trois critères : (a) moins de 20 ans, (b) 20 à 50 ans, (c) au-delà de 50 ans ; les pays « jeunes » seront plus proches de A et les pays « vieux » plus proches de C.

Diagramme tétraédrique
On peut de façon analogue montrer que tout point M intérieur au tétraèdre régulier ABCD est barycentre des sommets A, B, C et D pondérés par les volumes respectifs de MBCD, MCDA, MDAB et MABC, et construire des diagrammes tétraédriques adaptés à une répartition selon 4 critères.

7) Du triangle rectangle au tétraèdre trirectangle
OABC est un tétraèdre tels que les arêtes OA, OB et OC soient deux à deux orthogonales. Le théorème de Pythagore relatif aux longueurs des côtés du triangle rectangle a un analogue avec les aires des faces du tétraèdre trirectangle !

Programme de spécialité

Arithmétique

L'arithmétique, ayant pour objet l'étude des nombres entiers, est une des branches les plus élémentaires des mathématiques. Avec peu d'outils théoriques, on y démontre des résultats non triviaux. C'est aussi l'une des branches les plus difficiles et l'une des seules où des conjectures et des théorèmes dont l'étude théorique est redoutable peuvent être facilement énoncés. Sa place dans l'enseignement de spécialité se justifie à plusieurs titres :
– son introduction dans l'enseignement de spécialité, à l'occasion de la précédente rénovation de programme, a été un succès tant auprès des élèves que des enseignants ;
– il paraît judicieux de proposer dans la partie spécialité un chapitre relativement indépendant du programme du tronc commun : c'est le cas avec l'arithmétique, peu étudiée dans le cursus antérieur, et que l'on peut aborder sans être pénalisé par d'éventuels échecs dans d'autres chapitres ;
– les applications de l'arithmétique (codages, clés de contrôle…) ont remis ce domaine sous les feux de l'actualité : l'étude de ce chapitre donne quelques éléments pour mieux comprendre les enjeux de ces applications ;
– la démarche mathématique comporte des phases expérimentales que les documents d'accompagnement ont soulignées à plusieurs reprises ; c'est particulièrement le cas en arithmétique où des calculs à la main ou avec une machine permettent de conjecturer des résultats. Quant aux démonstrations, elles revêtent souvent un caractère original (en comparaison de celles présentes en géométrie ou analyse) et formateur ;
– enfin, il ne faut pas négliger la possibilité de construire quelques algorithmes simples puis de les mettre en œuvre sur calculatrice programmable ou tableur.

Division euclidienne

On étendra la division aux éléments de $\mathbb{Z}$, le diviseur étant un entier naturel et le reste un entier naturel strictement inférieur au diviseur.
Si le tableur ou la calculatrice utilisée par l'élève ne permet pas une division euclidienne directe avec des dividendes négatifs, la mise en place d'un programme de calcul peut être envisagé. On évitera d'étendre cette division aux diviseurs négatifs : les congruences se feront toujours modulo un entier naturel et une telle extension n'apporte ici rien de plus.

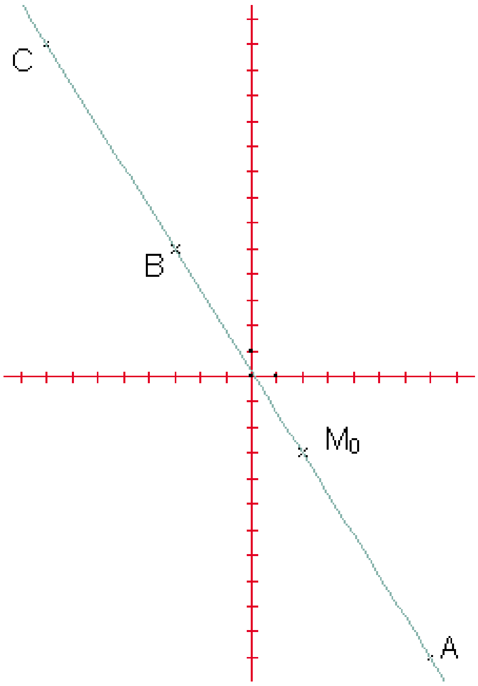
Équations diophantiennes

Diophante d'Alexandrie, vers les années 250 de notre ère, recherchait déjà systématiquement les solutions en nombres entiers (ou rationnels) d'une équation ou d'un système d'équations ; d'où le nom d'équations diophantiennes donné aux équations polynomiales à coefficients entiers dont on cherche des solutions entières (ou rationnelles).
Les exemples qui suivent montrent la diversité des méthodes que l'on peut mettre en œuvre pour résoudre, au niveau de la terminale, de telles équations.

1) On pourra commencer par étudier quelques équations dont le traitement est simple :
- $5x^2 + y^2 = 45$ (peut se résoudre par essais successifs puisque x et y sont bornés).
- $2x^2 - y^2 = 5$. En raisonnant modulo 5, on montre qu'il n'y a pas de solution.
- $7x^2 + 2y^3 = 3$. En raisonnant modulo 7, on montre qu'il n'y a pas de solution.

En dehors des cas où on peut balayer en un temps manifestement court l'ensemble des nombres où peut se trouver la solution, serait-il plus simple de démontrer qu'il n'y a pas de solutions que de les trouver toutes ? Les exemples ci-dessous illustrent cette interrogation.

2) Étude de l'équation $a\,x + b\,y = c$ où a, b, c sont des entiers relatifs non nuls ; on cherche des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
On pourra motiver l'étude de cette équation par la recherche des points à coordonnées entières situés sur une droite dont la pente et l'ordonnée à l'origine sont des nombres rationnels.



a) Un exemple
Si on connaît une solution, on sait trouver les autres, selon la méthode illustrée ci-dessous.
L'équation $8x + 5y = 1$ a au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$: $x_0 = 2$, $y_0 = -3$ (point M_0 sur le dessin ci-contre).
Par suite (x, y) est solution de l'équation si :
$8(x - x_0) + 5(y - y_0) = 0$. Doù une relation de proportionnalité entre $x - x_0$ d'une part et $y - y_0$ d'autre part.
Ce qui conduit à :
$x = 2 + 5\,k$ et $y = -3 - 8k$, $k \in \mathbb{Z}$.
A, B, C représentés ci-contre correspondent respectivement à $k = 1, -1$ et -2.
b) La recherche d'une solution particulière de l'équation peut se faire de façon intuitive, par balayage ou en utilisant l'algorithme d'Euclide.
– Par balayage. Prenons l'exemple numérique suivant : $47x + 35y = 1$.
On peut écrire $y = -47/35x + 1/35$, essayer toutes les valeurs de x de 0 à 34 jusqu'à trouver une valeur entière de y. On peut démontrer que si l'on n'en trouve pas entre 0 et 34, alors l'équation n'a pas de solution. Cela conduit à un algorithme simple à mettre en place mais peu performant car induisant des temps de calcul importants lorsque que l'entier b est grand.
– En utilisant l'algorithme d'Euclide. Reprenons l'équation $47x + 35y = 1$:
$47 = 35 \times 1 + 12$; $35 = 12 \times 2 + 11$ et $12 = 11 \times 1 + 1$ (ce qui prouve en passant que 47 et 35 sont premiers entre eux). En « remontant » on obtient alors :
$1 = 12 - 11 \times 1 = 12 - (35 - 12 \times 2) = 3 \times 12 - 35 = 3 \times (47 - 35 \times 1) - 35 = 3 \times 47 - 4 \times 35$.
$x = 3$ et $y = -4$ sont donc solutions de $47x + 35y = 1$.
L'algorithme d'Euclide pour a et b entiers strictement positifs permet ainsi l'obtention rapide du P.G.C.D. mais la « remontée », utile pour obtenir une solution particulière comme ci-dessus pour 47 et 35, nécessite la mise en mémoire des résultats intermédiaires.

Algorithme de calcul de P.G.C.D.
Donnée : deux entiers a et b, $a > b$.
Résultat : P.G.C.D.(a,b).
Règle :

tant que $b > 0$, **faire**
  $r \leftarrow a - b$ * ent $(a\,/\,b)$
  //reste dans la division euclidienne de a par b
  $a \leftarrow b$
  $b \leftarrow r$
Retourner a

Dans l'écriture ci-dessus, la ligne $b \leftarrow r$ signifie que dans le registre noté r, on met la valeur r ou le contenu d'un registre dont le nom est r. « Retouner a » signifie que le résultat de l'algorithme est dans le registre dont le nom est a. Les phrases en italiques précédées de // sont des commentaires et ne font pas partie de l'algorithme. L'écriture de tels algorithmes n'est pas standardisée ; bien que ce ne soit pas exigible, il est utile que les élèves sachent lire et comprendre une écriture ci-dessus ou une du même genre.

Algorithme « avec remontée »
L'algorithme suivant permet d'obtenir les coefficients de l'identité de Bézout (voir aussi sur le cédérom).
Dans le cas où les nombres a et b ne sont pas premiers, il donne les coefficients u et v tels que $ua + vb =$ P.G.C.D. (a, b) :

Donnée : deux entiers a et b, $a > b$.
Résultat : (p,u,v) où $p =$ P.G.C.D. (a,b), u et v tels que $au + bv = p$.
Règle :
$u1 \leftarrow 1$, $v1 \leftarrow 0$, $u2 \leftarrow 0$, $v2 \leftarrow 1$
  tant que $b > 0$ **faire**
    $q \leftarrow \text{ent}(a / b)$, $r \leftarrow a - q * b$
    //calcul du quotient q et du reste r
    $a \leftarrow b$, $b \leftarrow r$,
    //prépare l'étape suivante
    $ut \leftarrow u1 - u2 * q$
    //détermine z et t tels r = u2a + v2b (a et b données de départ)
    $vt \leftarrow v1 - v2 * q$, $u1 \leftarrow u2$, $v1 \leftarrow v2$
    *//détermine u2 et v2 tels que r = u2*a + v2*b, (a et b données de départ)*
    $u2 \leftarrow ut$, $v2 \leftarrow vt$
    $p \leftarrow a$, $u \leftarrow u1$, $v \leftarrow v1$
  Retourner (p, u, v)
On pourra suivre pas à pas le « déroulement » de cet algorithme pour $a = 47$ et $b = 35$ jusqu'au résultat final : $p = 1$, $u = 3$ et $v = -4$.
c) L'étude systématique suivante pourra être envisagée mais aucun résultat n'est exigible.
Dans le cas général de l'équation $ax + by = c$, lorsque c vaut 1, l'existence de solutions est liée au fait que a et b sont premiers entre eux (théorème de Bezout) ; plus généralement, il existe toujours une solution lorsque $c =$ P.G.C.D. (a, b).
Il n'y a pas de solution lorsque c n'est pas un multiple du P.G.C.D. p de a et b car p divisant a et b diviserait aussi $a\,x + b\,y$ sans diviser c.
Lorsque c est un multiple de p, en posant $a = pa'$, $b = pb'$, $c = pc'$, l'équation $ax + by = c$ équivaut à $a'x + b'y = c'$ où a' et b' sont premiers entre eux. Il existe donc deux entiers u et v tels que $a'u + b'v = 1$. L'équation précédente s'écrit donc $a'x + b'y = c'\,(a'u + b'v)$ ou encore :
$a'(x - c'u) = b'(c'v - y)$. D'après le théorème de Gauss b' divise $x - c'u$. Il existe donc un entier k tel que $x = c'u + kb'$ et $y = c'v - ka'$. (Réciproque évidente.)

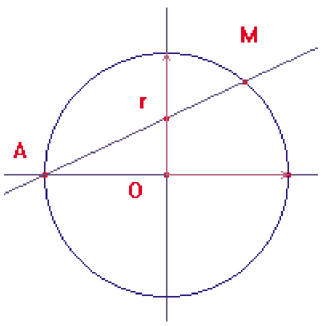
3) Équation dite « de Pythagore »

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

On va chercher les solutions (x,y,z) où x, y et z sont des entiers strictement positifs.
En posant pose $u = x / z$ et $v = y / z$, l'équation devient :

$$u^2 + v^2 = 1 \quad (2)$$

où u et v sont des nombres rationnels strictement positifs.



On peut avoir une vision géométrique de l'équation (2) : on cherche les points du cercle unité, à coordonnées rationnelles positives. Soit M un tel point, de coordonnées (u, v), la droite (AM), où A, de coordonnées -1 et 0, a pour équation $y = r(x + 1)$, avec $r = v/(u + 1)$, nombre rationnel compris entre 0 et 1.
Réciproquement, si $y = r(x + 1)$, avec r rationnel compris entre 0 et 1, alors l'intersection de cette droite avec le cercle trigonométrique est le point de coordonnées :

$$(1 - r^2)/(1 + r^2) \text{ et } 2r/(1 + r^2).$$

C'est donc un point à coordonnées rationnelles. On a ainsi toutes les solutions de (2). La résolution complète de (1) nécessite un argument supplémentaire. En division par le P.G.C.D. de x, y et z, on se ramène au cas où x, y, z sont premiers entre eux dans leur ensemble, ce qui entraîne ici qu'ils sont premiers entre eux deux à deux. On établit alors que l'un des entiers x ou y est pair, et, après échange éventuel, on suppose que y est pair. On démontre alors l'existence de deux entiers p et q tels que $x = p^2 - q^2$, $y = 2pq$, $z = p^2 + q^2$. Cela résulte de la résolution de (2) et de l'écriture $r = p/q$ (écriture irréductible); il est également possible d'éviter le passage par les solutions rationnelles en partant de la relation $y^2 = (z - x)(z + x)$.

– Une généralisation de l'équation (1) :

On cherche les solutions entières strictement positives de $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = z^2$.

On se ramène comme précédemment à $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = 1$, où $u_1, \ldots, u_k$ sont des nombres rationnels positifs.

Supposons qu'on ait une solution $(u_1, \ldots, u_n)$ et posons $r_k = u_k/(u_1 + 1)$, $k = 2, \ldots, n$.

En remplaçant u_k par $r_k(u_1 + 1)$, on obtient une équation du second degré en u_1, admettant (-1) et $\dfrac{1-\left(r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2\right)}{1 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2}$ comme racines. On peut alors écrire : $u_k = \dfrac{2r_k}{1 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2}$, $2 \leqslant k \leqslant n$ où les nombres r_k sont des rationnels strictement positifs dont la somme des carrés est strictement inférieure à 1.

Réciproquement, partant de nombres r_k, $k = 2, \ldots, n$, rationnels strictement positifs dont la somme des carrés est strictement inférieure à 1, et en posant $u_1 = \dfrac{1-\left(r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2\right)}{1 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2}$ et $u_k = \dfrac{2r_k}{1 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2}$, $2 \leqslant k \leqslant n$, on a une solution de l'équation.

– Une seconde généralisation :

On cherche les solutions entières strictement positives de l'équation : $x^n + y^n = z^n$, $n > 2$. Mais, comme le disait déjà Fermat à son époque, il manque ici de place pour montrer qu'il n'y a pas de telle solution ; et ce résultat n'est pas au programme de la terminale S !

Congruences dans $\mathbb{Z}$

L'addition, la soustraction et la multiplication sont compatibles avec les relations de congruence dans $\mathbb{Z}$; ce n'est pas le cas de la division : on illustrera ce fait à l'aide de contre-exemples. Les congruences permettent en particulier de trouver facilement les restes de divisions de grands nombres entiers, comme dans les exemples suivants :

1) Pour trouver le reste de la division de 275^{275} par 7, on remarque que le reste de la division de 275 par 7 est 2 et donc que $275^{275} \equiv 2^{275}$ (modulo 7). De plus $2^3 \equiv 1$ (modulo 7) et, par suite, $2^{275} \equiv 4$ (modulo 7). Le reste est donc 4. Par une autre méthode, 271 est le plus grand entier premier inférieur à 275, dans ces conditions, d'après le petit théorème de Fermat, $2^{271} \equiv 2$ (modulo 7) et par suite $2^{275} \equiv 32 \equiv 4$ (modulo 7).

Les congruences sont à la base de la classique « preuve par 9 ».

$10 \equiv 1$ (modulo 9) et donc $10^n \equiv 1$ (modulo 9).

Si un nombre s'écrit $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$ en base 10, alors il est congru à :

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \text{ (modulo 9)}.$$

2) 45 caméléons dans une île peuvent prendre l'une de ces trois couleurs : jaune, gris, bleu. Au départ, il y a 17 jaunes, 15 gris et 13 bleus. Lorsque deux d'entre eux sont ensemble, ils cherchent à être de la même couleur :

– ou bien ils ont déjà la même couleur : ils se regardent et voyant qu'ils ont la même couleur, ils la gardent ;

– ou bien ils ont des couleurs différentes : en tel cas, ils prennent tous les deux la troisième couleur. Par exemple deux caméléons de couleur jaune et bleue deviennent gris après leur rencontre.
Est-il possible qu'après un certain nombre de rencontres, les caméléons aient la même couleur ?
Supposons qu'après k rencontres il y ait j_k, g_k et b_k caméléons de couleur respective jaune, grise et bleue ; alors, après la rencontre $(k + 1)$, soit rien n'a changé, soit deux des nombres ont diminué d'une unité, et le troisième a augmenté d'une unité. On remarque alors que $j_{k+1} - g_{k+1}$ vaut alors soit $j_k - g_k$, soit $j_k - g_k + 3$, soit $j_k - g_k - 3$. Ainsi, le reste de la division par 3 de $j_k - g_k$ reste invariant lorsqu'on passe de k à $k + 1$ rencontres. Mais on part de $j_0 - g_0 = 2$, d'où $j_k - g_k \equiv 2$ (modulo 3). Cependant, si les caméléons sont de la même couleur après n rencontres alors $j_n - g_n$ vaut 0, 45 ou (– 45) et est donc congru à 0 modulo 3. Les caméléons ne pourront donc jamais tous être de la même couleur.

3) Clés de contrôle
Le calcul des clés de contrôle des numéros INSEE, de comptes bancaires ou d'ISBN fait intervenir des divisions de grands nombres, impossibles à réaliser sur des calculatrices standard ; la décomposition de ces nombres en sommes et produits de nombres plus petits et l'utilisation des congruences est alors un moyen efficace de déterminer ces clés (voir document d'accompagnement de l'option mathématique en série L).
De tout temps, des personnes ont voulu coder leurs messages pour en garantir la confidentialité. Une simple permutation de lettres constitue déjà un codage. Ce codage est très facile à « casser » si on dispose des probabilités d'apparition des lettres de l'alphabet (voir sur le cédérom).

Petit théorème de Fermat

On se limitera essentiellement, en terminale, à l'énoncé et à une ou deux démonstrations de ce théorème.

Théorème

Soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p alors :
$a^{p-1} - 1$ est divisible par p.

Remarque – Il est équivalent de montrer que $a^p - a$ est divisible par p. En effet, $a^p - 1 = a\,(a^{p-1} - 1)$ et d'après le théorème de Gauss, le produit $a(a^{p-1} - 1)$ est divisible par p si et seulement si a ou $(a^{p-1} - 1)$ le sont.

Démonstration 1

p ne divise aucun nombre de la suite a, $2a$, $3a$,…, $(p - 1)a$. En effet, d'après le théorème de Gauss, si p divisait un de ces produits ka, p diviserait k puisque a et p sont premiers entre eux. Ceci est impossible puisque $1 < k < p$.
De plus, les restes des divisions de a, $2a$, $3a$,…, $(p - 1)a$ par p sont tous différents. Si on trouvait des restes identiques pour ka et $k'a$ ($k > k'$) alors le reste de $(k - k')a$ par p serait nul, ce qui est impossible d'après ce qui précède. À l'ordre près, les restes de a, $2a$, $3a$,…, $(p - 1)a$ par p sont 1, 2, 3,…, $p - 1$.
Le produit $a \times 2a \times 3a \times \ldots \times (p - 1)a = (p - 1)!a^{p-1}$ a pour reste de la division par p le produit $1 \times 2 \times \ldots \times (p - 1) = (p - 1)!$ Soit $(p - 1)!\ (a^{p-1} - 1) \equiv 0$ modulo p. D'où le résultat.

Une démonstration particulièrement courte consiste à utiliser le théorème de Lagrange (l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe) et à l'appliquer au groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$; c'est en fait la même que la démonstration 1.

Démonstration 2

La formule du binôme permet d'écrire, pour tout entier b :

$$\left(b+1\right)^p = b^p + 1 + \sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}b^i,$$

où $\binom{p}{i} = \dfrac{p\left(p-1\right)\ldots\left(p-i+1\right)}{1\times 2\times\ldots\times i}$. Comme p est premier et $i < p$, aucun nombre parmi 2, 3,…, i ne divise p et $\binom{p}{i}$ est divisible par p. Par suite $(b + 1)^p \equiv b^p +1$ (modulo p).

On a alors : $a^p \equiv (a-1)^p + 1 \equiv (a-2)^p + 1 + 1 \equiv (a-3)^p + 3 \equiv \ldots \equiv (a-a)^p + a$ (modulo p), soit : $a^p \equiv a$ (modulo p).

Démonstration 3

On donne ici une démonstration *combinatoire*, qui fournit au passage une interprétation du quotient $(a^p - a)/p$.

Considérons un polygone régulier $(A_0, \ldots, A_{p-1})$ ayant p sommets et étudions les façons de le colorier avec a couleurs. Le nombre total de coloriage est a^p. Parmi ces coloriages, il en existe a qui sont unicolores. Il s'agit donc de montrer que le nombre de coloriages multicolores du polygone est multiple de p. Or, étant donné un coloriage, il est possible d'en déterminer $p - 1$ autres par les rotations R_k d'angles $2k\pi/\mathrm{p}$ $(1 \leqslant \mathrm{k} \leqslant p-1)$: si $(c_0,\ldots,c_{p-1})$ représente le coloriage initial, alors le coloriage final est représenté par $(c'_0,\ldots,c'_{p-1})$ caractérisé par la condition $c'_j = c_r$ où r est le reste de $j + k$ dans la division euclidienne par p. On montre qu'on obtient, avec le coloriage initial, p coloriages distincts : en effet, si un coloriage $(c_0,\ldots,c_{p-1})$ est invariant par une rotation R_k $(1 \leqslant k \leqslant p-1)$, alors, par récurrence sur n, on doit avoir $c_0 = c_j$ lorsque j est le reste de la division euclidienne de nk par p. Comme p est premier, quand n parcourt $[0, p-1]$, on obtient, pour j, toutes les valeurs de $[0, p-1]$ (géométriquement, on parcourt les sommets du polygone en appliquant successivement une certaine rotation et en reliant les sommet successifs, on obtient un polygone convexe ou étoilé) : cela prouve que les seuls coloriages invariants par R_k sont les coloriages unicolores. Les coloriages multicolores sont au nombre de $a^p - a$ et peuvent être rassemblés par groupes de p. Donc $a^p - a$ est multiple de p. Le quotient $(a^p - a)/p$ peut s'interpréter comme le nombre de coloriages multicolores comptés à rotation près.

Nombres premiers

Les nombres premiers constituent les briques à partir desquelles est bâti l'édifice de la théorie de nombres. La démonstration de leur infinitude est une illustration ancienne et convaincante de la puissance du raisonnement mathématique, qu'il faut savoir faire partager aux élèves. Les énoncés des propriétés des nombres premiers qui sont démontrées et de celles qui sont conjecturées peuvent remplir un livre.

La documentation (y compris sous une forme accessible aux élèves) est abondante. Les parutions des années 1999 et 2000 – promue année mondiale des mathématiques – ont donné une mesure de la place de l'arithmétique au sein des mathématiques (J.-P. Delahaye, *Les Merveilleux Nombres premiers*, Belin ; Ian Stewart, *L'Univers des nombres*, Belin ; Simon Singh, *Histoire des codes secrets*, J.-C. Lattès ; etc.). Des ouvrages à visée pédagogique sont aussi disponibles (« Secret des nombres », n° hors-série 6 de la revue *Tangente*, le n° 85 de mars-avril 2002 de cette revue, ainsi les deux tomes *Arithmétique* et *TI-89/92 en terminale S*, C. Vassard et *alii.*, CNDP, 2001, dont le contenu est aisément transposable, pour ce qui est du calcul instrumenté, à tout autre matériel que celui du titre).

On a longuement (et vainement à ce jour) cherché une formule simple permettant de dire rapidement si tel entier est premier ou non. Les algorithmes les plus simples pour tester la primalité d'un nombre entier sont :

– le crible d'Ératosthène : il a l'avantage de fournir une liste de nombres mais nécessite la mise en mémoire de ces nombres ;

– la recherche des éventuels diviseurs impairs, en s'arrêtant à $\sqrt{n}$: si n est le produit de deux nombres entiers, l'un est plus petit que $\sqrt{n}$ et l'autre plus grand.

Mais ces algorithmes ne peuvent pas fonctionner pour des nombres ayant plusieurs dizaines de chiffres. La multiplication de grands nombres premiers est en pratique irréversible et les applications de cette en sont importantes (code RSA, voir sur le cédérom). Citons à ce propos M. Demazure :

« Depuis leurs origine, l'algèbre et l'arithmétique mêlent deux traditions, théorique et pratique, que l'on peut symboliser par les noms d'Eudoxe et de Diophante, bien que leurs origines soient sûrement bien antérieures. Et de toujours y a été présente de façon confuse la distinction entre calculs théoriquement possibles et calculs effectivement réalisables. Mais ce n'est que récemment, dans le double développement des théories de la complexité et des outils informatiques, que les idées se sont éclaircies, que des énoncés précis ont pu être formulés et que des applications souvent spectaculaires ont été développées.

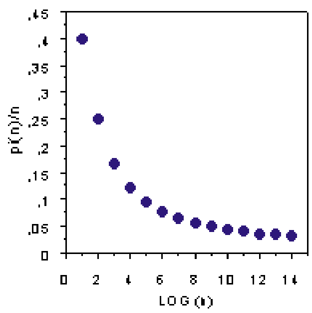
C'est ainsi par exemple que la sécurité des transactions interbancaires par voie électronique repose essentiellement aujourd'hui sur la difficulté de la décomposition des grands nombres en facteurs premiers, alors même que cette difficulté n'est à ce jour pas prouvée. Étrange revanche pour une discipline, la théorie des nombres, jusque là modèle même d'inutilité. Qu'on ne s'y méprenne pas : loin de moi l'idée qu'on pourrait "justifier" l'arithmétique par la banque (non plus que l'inverse d'ailleurs !). »

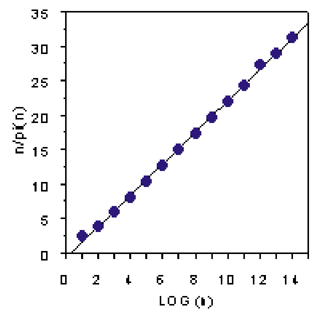
Introduction au *Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes*, Éditions Cassini, 1997.

Les mathématiciens continuent aussi à s'intéresser à la répartition dans $\mathbb{N}$ des nombres premiers.

Soit $\pi(n)$, le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n ; le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de $\pi(n)$, à propos desquelles divers quotients et représentations graphiques peuvent être étudiés.

$\log(n)$	$\pi(n)$
1	4
2	25
3	168
4	1229
5	9592
6	78498
7	664579
8	5761455
9	50847534
10	455052512
11	4118054813
12	36607912018
13	346065536839
14	3204941750802





La pente de la droite tracée sur le graphique est 2,27 et $\ln(10) \approx 2{,}30$. Aurait-on là la trace d'une loi de répartition des nombres premiers ?

À la fin du XVIIIe siècle, Gauss, âgé de quinze ans, aurait conjecturé que pour n grand, $\dfrac{\pi(n)\ln(n)}{n} \approx 1$. Un siècle plus tard, Charles de la Vallée Poussin et Jacques Hadamard ont démontré le « théorème des nombres premiers », soit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi(n)\ln(n)}{n} = 1.$$

Mais l'histoire de la répartition des nombres premiers n'est pas finie. Une des plus grandes conjectures des mathématiques aujourd'hui, certains disent la plus centrale, peut être énoncée sous la forme suivante :

Conjecture de Riemann : il existe une constante C telle que pour tout entier naturel $n > 2$:

$$|\pi(n) - li(n)| \leq C\sqrt{n}\ln(n) \text{ avec } li(n) = \int_2^n \frac{dt}{\ln(t)}.$$

Pouvoir énoncer aux élèves le théorème des nombres premiers ainsi que la conjecture de Riemann est en soi une application du logarithme et de l'intégrale introduits par ailleurs. Un tel énoncé illustre de plus le lien profond entre l'arithmétique et l'analyse.

Similitudes

Au cours des années antérieures, les élèves ont étudié les triangles semblables (définis par l'égalité des angles ou par l'existence d'un coefficient d'agrandissement-réduction). Ils ont étudié des exemples de transformations (translations, homothéties, rotations) soit en classe de première soit dans le tronc commun de terminale en liaison avec leur forme complexe. Dans ces études, les transformations agissent d'abord sur une configuration (collège, seconde), puis sur le plan entier. Les composées des transformations étudiées ne sont pas envisagées systématiquement ni *a fortiori* le groupe qu'elles constituent. L'objectif de ce chapitre de spécialité est une étude des similitudes du plan.

Pourquoi l'étude des similitudes ?

– Une telle étude permet d'abord une synthèse de tous les aspects de géométrie plane étudiés jusque là et rappelés ci-dessus.
– Elle permet ensuite de construire un ensemble théorique consistant ; les élèves de spécialité pourront ainsi être confrontés à une expérience mathématique fondamentale : celle de bâtir un « morceau » de l'édifice mathématique ; on retrouve l'un des objectifs visés par certains programmes antérieurs à travers la classification des isométries planes.
– Cette étude peut être menée à bien dans le cadre théorique et pratique dont disposent les élèves ; c'est l'une des motivations du choix de l'outil complexe pour le traitement théorique de cette étude, compte tenu du temps disponible (en terminale mais aussi en première). Les exercices s'appuieront bien sûr sur le calcul complexe ; mais, une fois les résultats théoriques acquis, on veillera à choisir des situations sollicitant l'intuition géométrique ou le raisonnement géométrique « pur » et on évitera de ramener systématiquement tout problème géométrique à un calcul algébrique sur les complexes. On trouvera plus loin des exemples d'exercices illustrant ce propos.

Quelle étude théorique ?

Le texte qui suit répond à une demande souvent formulée lors de la mise en consultation de ce programme. Il montre un cheminement possible avec les élèves.

> L'objectif de la spécialité est une étude des similitudes du plan, définies par une condition de conservation : on appelle similitude du plan toute transformation du plan qui conserve les rapports de distances. C'est donc le choix d'une définition en « compréhension » ou « descriptive »: on donne la condition que doivent vérifier les similitudes et non la liste des similitudes. Sur la définition, certaines propriétés sont immédiates : la composée de deux similitudes, la réciproque d'une similitude sont encore des similitudes. On dispose d'autre part des exemples que les élèves ont rencontrés antérieurement.
> Les questions suivantes sont alors naturelles : quelle est la forme générale d'une similitude plane ? Que peut-on dire de la composée de deux similitudes simples (par exemple la composée d'une homothétie et d'une rotation de centres différents) ? Quelles sont les similitudes envoyant une configuration donnée en une autre configuration ?
> On précise ci-dessous les contenus et une progression possible. Le contexte est celui du plan orienté ; la donnée d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ permet d'utiliser le plan complexe $\mathbb{C}$.
>
> **Remarque sur le langage**
> Une transformation est par définition une bijection T du plan dans lui-même : cela signifie qu'à tout point M est associé un unique point noté T(M), de sorte que, pour tout point N, il existe un unique point M du plan tel que T(M) = N. La transformation réciproque T' est définie par la condition T'(N) = M si et seulement si T(M) = N.

Les notions générales de bijection et de bijection réciproque ne sont pas au programme. Cependant, ces termes pourront être utilisés à l'occasion de l'étude des exemples de bijections du programme : exponentielle et logarithme, puissance n et racine n-ième, transformations géométriques.

Généralités sur les similitudes du plan

Par définition une similitude (plane) est une transformation du plan (bijection du plan dans lui-même) qui conserve les rapports de distances. On démontrera que cela équivaut à l'existence d'un réel k tel que la transformation multiplie les distances par k. Ce réel k est appelé rapport de la similitude.

Par exemple, translations, homothéties, symétries axiales sont des similitudes dont on précisera le rapport ; dans le plan complexe, les transformations de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ (a complexe non nul) sont des similitudes de rapport $|a|$.
De plus, la composée de deux similitudes, l'application identité, la réciproque d'une similitude sont des similitudes. Le rapport de la composée de deux similitudes est le produit des rapports des deux similitudes.
La définition des similitudes met en évidence une propriété de conservation, ce qui entraîne aussitôt les propriétés liées à la composition. Il est souhaitable de faire remarquer que la composition des similitudes n'est pas commutative en donnant des exemples purement géométriques ou par calcul complexe (compositions de deux transformations $z \mapsto az + b$).
On démontrera qu'une similitude envoie tout triangle sur un triangle semblable et qu'elle conserve les angles.
Réciproquement, une transformation ayant l'une de ces deux propriétés est une similitude, mais ce résultat n'est pas au programme : le professeur conserve la liberté de le faire ou non en exercice.
Une isométrie est définie comme transformation du plan qui conserve les distances : c'est donc une similitude de rapport 1. Translations, symétries axiales, rotations sont des exemples d'isométries.

Étude des similitudes directes

Par définition, une similitude directe est une similitude qui conserve les angles orientés.
De façon plus explicite, une similitude s est directe si, pour tous points A, B, C, D tels que A ≠ B et C ≠ D, on a :

$$\left(\overrightarrow{s(A)s(B)};\overrightarrow{s(C)s(D)}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \text{ (angles orientés de vecteurs).}$$

Par exemple, translations, homothéties, rotations sont des similitudes directes ; dans le plan complexe, les transformations $z \mapsto az + b$ sont des similitudes directes.
La composée de deux similitudes directes et la réciproque d'une similitude directe sont des similitudes directes.
On pourra dire que deux triangles semblables sont directement semblables s'il y a égalité des angles orientés correspondants. On pourra dire qu'ils sont inversement semblables si les angles correspondants sont opposés.

Remarques – On démontrera qu'une similitude directe envoie tout triangle sur un triangle directement semblable. En exercice, on peut établir la réciproque. On peut aussi remarquer qu'une transformation du plan est une similitude directe si et seulement si elle conserve les angles orientés (car elle envoie alors tout triangle sur un triangle directement semblable) mais il n'est pas indispensable d'entrer dans ces détails.

Le programme demande d'établir la forme complexe des similitudes directes. Pour cela, un moyen efficace est d'établir la propriété suivante qui exploite les connaissances acquises sur les nombres complexes :
Si s est une similitude directe du plan complexe, si p, q, r sont les affixes de trois points distincts et si p', q', r' sont les affixes de leurs images par s, alors $(r' - p')/(q' - p') = (r - p)/(q - p)$.
On démontre cette propriété par égalité des modules et des arguments.

Forme complexe des similitudes directes

Le résultat central est le suivant. Les similitudes directes du plan complexe sont les transformations de la forme $z \mapsto az + b$, où a et b sont deux nombres complexes, a étant non nul.
En effet, soit s une similitude directe ; si z est un nombre complexe, il suffit d'appliquer la propriété précédente à $(p,q,r) = (0,1,z)$ pour obtenir $(z' - p')/(q' - p') = (z - 0)/(1 - 0)$, et donc $z' = (q' - p')z + p'$, où p', q', z' désignent les affixes des images par s des points d'affixes $0,1,z$. Il en résulte que s est de la forme $z \mapsto az + b$ où a est non nul.
Réciproquement, pour a non nul, $z \mapsto az + b$ définit une similitude directe.

Angle d'une similitude directe

Soit s une similitude directe. L'angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{s(A)s(B)}\right)$ ne dépend pas des points distincts A et B. On l'appelle angle de la similitude. L'angle de la composée de deux similitudes directes est égal à la somme des angles des deux similitudes.
Ces propriétés se démontrent avec la forme complexe ; on fera observer que la mesure de l'angle de la similitude est l'argument de a dans l'expression $z \mapsto az + b$.

Point fixe d'une similitude directe

Une similitude directe qui n'est pas une translation admet un unique point fixe. On dit que c'est le centre de la similitude. Cela résulte de la forme complexe des similitudes.
Les moyens géométriques de déterminer le point fixe d'une similitude directe sont hors programme.

Description géométrique complète des similitudes directes

Soit s une similitude directe de rapport k, et d'angle θ. Deux cas sont possibles :
• s est une translation (se produit si $k = 1$ et $\theta = 0$ modulo 2π) ;
• s possède un unique point fixe Ω et est la composée (commutative) de l'homothétie de centre Ω et de rapport k et de la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Une propriété utile du centre d'une similitude directe

Soit O le centre d'une similitude directe. Soient M et N deux points quelconques du plan, M' et N' leurs images. Alors les triangles OMM' et ONN' sont directement semblables.

Similitudes directes et couples de points

Soient A, B, A', B' quatre points du plan tels que A ≠ B et A' ≠ B'. Alors il existe une unique similitude directe s telle que s(A) = A' et s(B) = B'.
Pour démontrer ce résultat, on cherche a et b tels que la similitude soit donnée par $z \mapsto az + b$. Cela revient à résoudre un système de deux équations à deux inconnues.
On peut aussi établir alors qu'étant donnés deux triangles directement semblables, il existe une unique similitude directe qui envoie le premier sur le second.

Application à l'étude des déplacements

Un déplacement est, par définition, une similitude directe de rapport 1, autrement dit une isométrie qui conserve les angles orientés.
Il résulte de l'étude générale que tout déplacement est soit une translation, soit une rotation.

La construction géométrique, sans indication, du centre de la composée de deux rotations de centres distincts, ou du centre de la composée d'une rotation et d'une translation n'est pas exigible. Cependant, les élèves doivent savoir démontrer qu'un point défini par une construction géométrique donnée est le centre d'une telle composée en vérifiant que c'en est un point fixe. Par exemple, étant donné un triangle ABC, soit r (resp. r') la rotation de centre B et d'angle $2\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$ (resp. de centre C et d'angle $2\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$); montrer que $r \circ r'$ est la rotation de centre A et d'angle $2\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$).

La construction géométrique du centre de la composée de deux rotations de centres distincts, ou du centre de la composée d'une rotation et d'une translation ne sont pas au programme.

Effet des similitudes directes sur certaines configurations

Comme conséquence de la détermination complète des similitudes directes, on déterminera l'image par une similitude directe d'un barycentre. On étudiera l'effet d'une similitude directe sur une droite, un segment, un cercle.
Ces propriétés seront fréquemment utilisées dans les exercices d'études de configurations ou de recherche de lieux géométriques exploitant les similitudes directes.

Remarque sur la méthode d'étude des similitudes directes

Dans un souci d'efficacité, le programme privilégie les nombres complexes pour établir les résultats sur les similitudes directes. Les éviter nécessiterait de plus longs développements, (étude préalable des déplacements, puis composition de déplacements et d'homothéties).
Cependant, la résolution d'exercices et de problèmes ne se limitera pas à du calcul dans le plan complexe : le professeur veillera à équilibrer les deux aspects en proposant aussi bien des exercices utilisant les nombres complexes que des exercices où les similitudes apparaîtront de façon purement géométrique.

Étude générale des similitudes planes

L'étude des similitudes quelconques passe par les résultat suivants.
1) Une similitude qui admet trois points fixes non alignés est l'identité.
2) Une similitude qui admet deux points fixes distincts A et B est l'identité ou la symétrie axiale d'axe (AB).
Pour démontrer (1), on commence par remarquer que le rapport de la similitude est 1 donc que c'est une isométrie ; on observe alors que s'il existait un point M dont l'image M' était distincte de M, tout point fixe de la similitude appartiendrait à la médiatrice de [MM'], en contradiction avec le fait qu'il y a trois points fixes non alignés.
Pour établir (2), s désignant la similitude en question, on considère un point C n'appartenant pas à la droite (AB) et C' = s(C) : si C' = C, s est l'identité d'après (1) ; sinon, la droite (AB) est la médiatrice de [CC'] et on constate que la composée de s et de la symétrie axiale d'axe (AB) laisse fixe A, B,C et est donc l'identité, ce qui montre que s coïncide avec la symétrie axiale d'axe (AB).

Forme géométrique des similitudes non directes

Une similitude non directe peut s'écrire sous la forme $\sigma o h$, où σ est une similitude directe et h une symétrie axiale.
En effet, soient A, B deux points distincts et A', B' leurs images par la similitude indirecte s. Notons σ la similitude directe qui envoie A et B sur A' et B'et σ' la similitude réciproque de σ. Alors $\sigma' o s$ est une similitude qui admet A et B comme points fixes et qui n'est pas l'identité : c'est donc une symétrie axiale, ce qui entraîne le résultat voulu.

Forme complexe des similitudes quelconques

On pourra établir le théorème suivant, en utilisant le raisonnement précédent où A et B sont les points d'affixes 0 et 1 :
Théorème : Toute similitude du plan complexe est de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ (a complexe non nul).

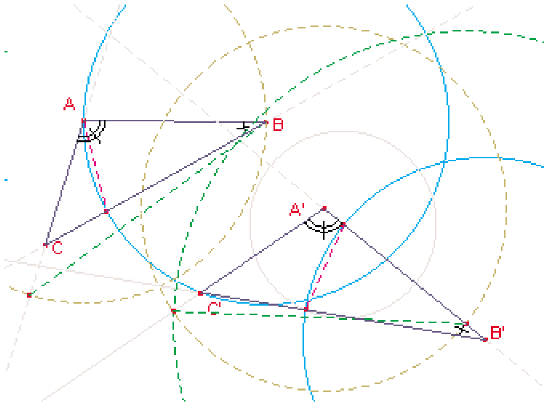
Effet des similitudes quelconques sur certaines configurations

Par composition avec une symétrie axiale (ou par représentation complexe) l'effet d'une similitude non directe sur un barycentre, une droite, un segment, un cercle se déduit de l'effet par une similitude directe.
Cela achève les connaissances exigibles sur les similitudes quelconques. En particulier, les élèves n'ont pas à connaître leur forme réduite, à savoir : une similitude indirecte de rapport 1 (antidéplacement) est la composée commutative d'une symétrie axiale

et d'une translation de vecteur parallèle à l'axe de la symétrie ; une similitude indirecte de rapport k différent de 1 est la composée commutative d'une symétrie axiale et d'une homothétie de rapport k et de centre appartenant à l'axe de la symétrie. Il est possible cependant de faire des exercices sur ce genre de thème, mais le cas des similitudes directes doit être privilégié.
La détermination de la composée de deux symétries axiales n'étant pas au programme, les exercices y ayant recours doivent être accompagnés des indications utiles.

Exemples de configurations et constructions (sans calcul complexe)

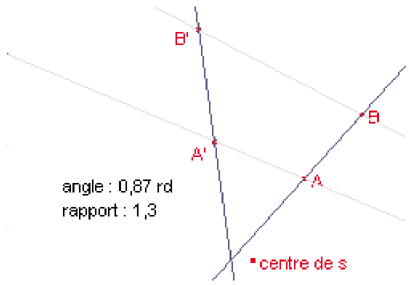
1) Rappel des résultats de seconde

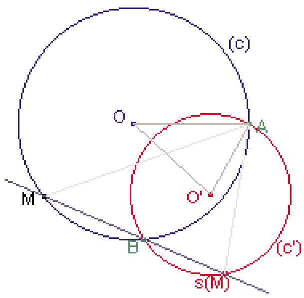


a) Soient quatre points A, B, A' et B' tels que A ≠ B et A' ≠ B'. Construire (à la règle et au compas) l'image d'un point C par la similitude directe (resp. indirecte) transformant (A,B) en (A',B'). Envisager tous les cas de figures.
(Travail à proposer par groupe de deux élèves.)

b) Soit *s* une similitude directe à centre transformant (A,B) en (A',B') (on pourra supposer les points deux à deux distincts).

Alors (AA') et (BB') sont parallèles si et seulement si (AB) et (A'B') passent par le centre de la similitude.



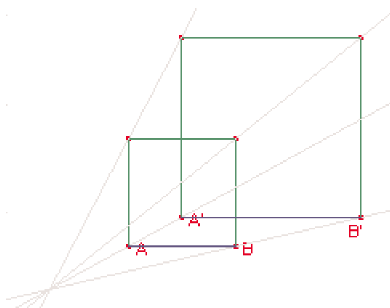


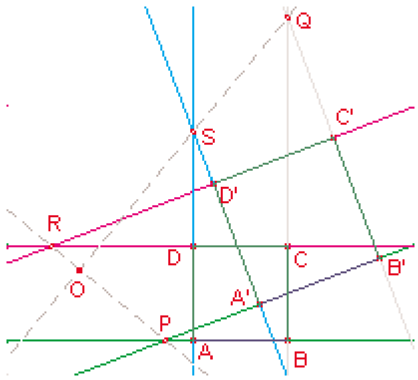
c) (C) et (C') sont deux cercles de centres O et O', sécants en A et B. Soit *s* la similitude directe de centre A telle que *s*(O) = O'.
Alors pour tout point M de (C), *s*(M) est le point d'intersection de la droite (BM) et de (C').

2) Détermination du centre de similitude par des carrés auxiliaires

Soient ABCD et A'B'C'D' deux carrés directs.
a) Il existe une unique similitude directe *s* tel que *s*(A) = A', *s*(B) = B', *s*(C) = C', *s*(D) = D'.

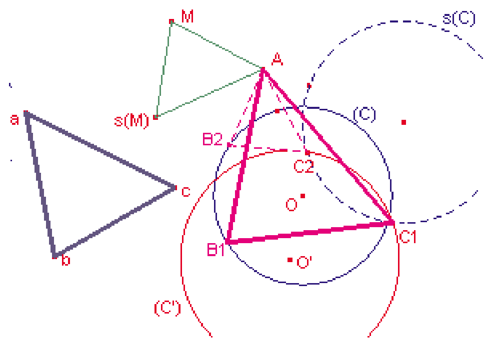
b) On suppose (AB) et (A'B') parallèles. Que dire de *s* ?





c) On suppose (AB) et (A'B') non parallèles. Soient P, Q, R, S les points d'intersection respectifs des couples de droites (AB) et (A'B'), (BC) et (B'C'), (CD) et (C'D'), (DA) et (D'A').
Le point d'intersection de (PR) et (QS) est le centre de s.

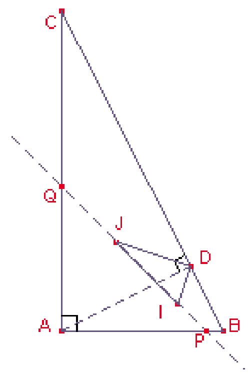
Indications :
a) L'existence et l'unicité de la similitude directe telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$ est du cours. Il suffit de vérifier qu'on a de plus $s(C) = C'$ et $s(D) = D'$: cela résulte du fait que l'image du carré direct ABCD est un carré direct $A'B'C_1D_1$, ce qui impose $C_1 = C'$ et $D_1 = D'$.
b) Lorsque (AB) et (A'B') sont parallèles, la similitude s est une translation ou une homothétie (similitude directe d'angle nul) selon que AB = A'B' ou AB ≠ A'B'. Dans le second cas, le centre de l'homothétie est le point d'intersection des droites (AA') et (BB').
c) Les points P et R sont tels que $(Ps(P))$ et $(Rs(R))$ sont parallèles à (A'B') et (C'D'). D'après l'exemple 1.b le centre O appartient donc à la droite (PR) ; il appartient de même à la droite (QS). De plus, ces droites sont orthogonales



3) Problème de construction
Construire un triangle directement semblable à un triangle donné abc, connaissant la position de A et sachant que B et C sont situés sur deux cercles (C) et (C') donnés.

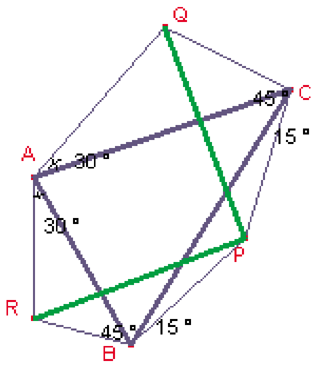
Indications : Soit s la similitude directe de centre A telle que pour tout point M distinct de A, le triangle $AMs(M)$ soit directement semblable à abc. On obtient C comme intersection de (C') et de l'image de (C) par s. Selon le cas, il existe deux solutions, une solution ou aucune solution.

4) Étude d'une configuration
Soit ABC un triangle direct rectangle en A et soit D le pied de la hauteur issue de A. On note I et J les centres des cercles inscrits dans les triangles ABD et ACD. La droite (IJ) coupe AB en P et AC en Q.
a) Des triangles directement semblables : ABD, ADC, DJI.
b) Le triangle APQ est isocèle.



Indications : Les triangles DAB et DCA sont directement semblables par la similitude s de centre D, d'angle droit $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ (= π/2) et de rapport DA/DB = DC/DA. Alors $s(I) = J$.
DIJ et DBA sont deux triangles directement semblables. L'angle de la similitude qui envoie le premier sur le second est égal à π/4 modulo π. C'est aussi l'angle entre (IJ) et (AB) qui vaut donc π/4 (modulo π).

5) Étude d'une configuration (voir triangles autour d'un triangle dans le paragraphe sur la géométrie plane)
On construit extérieurement à un triangle ABC donné, les triangles PBC, QCA et RAB tels que $\widehat{PBC} = \widehat{PCB} = 15°$, $\widehat{QCA} = \widehat{RBA} = 45°$, $\widehat{QAC} = \widehat{RAB} = 30°$. Alors PQ = PR et (PQ) orthogonal à (PR).



Indications : Considérer les similitudes directes u et v de centres respectifs B et C et telles que u(R) = A et v(A) = Q et étudier v o u ; introduire le point T tel que le triangle BCT soit équilatéral extérieurement à ABC.
On peut aussi utiliser le calcul complexe (voir exemple 8 ci-dessous).

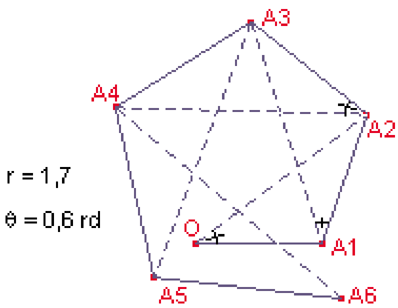
En utilisant les nombres complexes

6) Soit z un nombre complexe non nul.
Dans le plan complexe, soient A, B, C, D, E les points d'affixes z, z^2, z^3, z^4, z^5.
a) Si A, B, C, D sont sur un même cercle (Γ), alors E est aussi sur ce cercle.
b) Déterminer les nombres complexes z tels que A, B, C, D, E soient sur un même cercle.
Remarque – L'appel à l'intuition géométrique serait ici maladroit.
Solution : Soit s la similitude donnée par $u \mapsto zu$. Si A, B, C, D sont sur un même cercle (Γ), alors B, C, D, E sont éléments du cercle image de (Γ) par s, nécessairement confondu avec (Γ). Pour que les cinq points soient sur un même cercle, il faut donc que $|z|$ soit égal à 1. Réciproquement, si $|z| = 1$, les points A, B, C, D, E appartiennent au cercle de centre O de rayon 1.

7) On suppose que A' et B' sont les images de A et B par une similitude directe de centre O.
Alors B et B' sont les images de A et A' par une similitude directe de centre O.
Indication : Réponse immédiate avec les complexes. Cela se résume en l'implication : $a'/a = b'/b \Rightarrow (a'/b' = a/b)$.

8) Condition sur les affixes pour qu'un triangle soit équilatéral (resp. rectangle isocèle, resp. rectangle, resp. isocèle).

9) **Spirale** (voir la spirale proposée dans le paragraphe « Suites » du document d'accompagnement de première S)
Soit r un réel strictement positif et soit θ un réel tel que $0 < \theta < \pi/2$. Pour tout point P, on note s_P la similitude de centre P, de rapport r et d'angle θ. On définit la suite de points $A_1 = A$, $A_{n+2} = s_{A_n}(A_{n+1})$ et z_n désigne l'affixe de A_n.

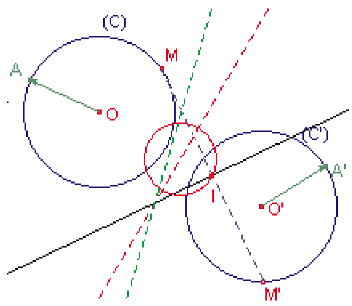


1) Il existe une similitude directe f telle qu'on ait $f(A_n) = A_{n+1}$ pour tout entier n.

Indication : Considérer la suite $u_n = a_{n+1} - (re^{i\theta} - 1)a_n$ où a_n est l'affixe de A.
2) On pose $r = 1/\cos(\theta)$.
– Les points (A_n) appartiennent alors à deux droites fixes orthogonales.
– Calculer θ pour que la suite soit périodique.
– Démontrer que $A_{n+1}A_{n+2}$ est orthogonal à $A_{n+1}A_n$.
Construire A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 lorsque $a = i$ et $\theta = \pi/3$.

3) On pose $r = 2\cos(\theta)$
– Alors f est une rotation.
– Déterminer θ pour que la ligne polygonale O,A_1, A_2..A_n soit fermée.
– Faire la construction lorsque $a = i$ et $\theta = \pi/6$.

Problèmes de lieux



10) Soient (C) et (C') deux cercles du plan de centres O et O' et de même rayon R. Soit A un point de (C) et A' un point de (C') tels que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{O'A'}$ soient distincts.

À tout point M de (C) on associe le point M' de (C') tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{O'A'};\overrightarrow{OM})$ modulo 2π.

a) La médiatrice de [MM'] passe par un point fixe.

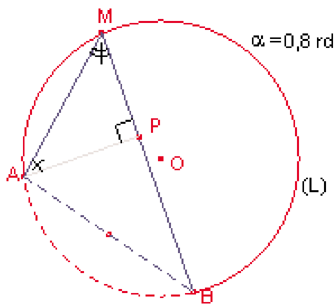
b) Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I de [MM'].

Solution :

a) M' est l'image de M par une certaine rotation; la médiatrice de [MM'] passe par le centre Ω de cette rotation.

b) I est l'image de M par une certaine similitude *s* ; I décrit le cercle image de (C) par *s*.

11) Arc capable

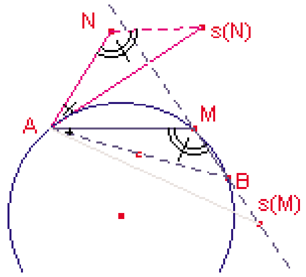


Soient A et B deux points distincts et α un nombre réel. On veut montrer que l'ensemble L des points M tels que $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \alpha$ (modulo π) est un cercle passant par A et B privé de A et B.

– Soit M un point de L ; soit P le projeté orthogonal de A sur la droite (BM). Montrer que la similitude *s* de centre A telle que *s*(P) = M ne dépend pas de M. En déduire que L est inclus dans (C'), image par s du cercle de diamètre [AB].

– Réciproquement, montrer que tout point de (C') distinct de A et B appartient à L.

Remarque – On peut ensuite utiliser ce résultat dans d'autres exercices sous sa forme géométrique ou complexe (mais ce résultat n'est pas exigible).



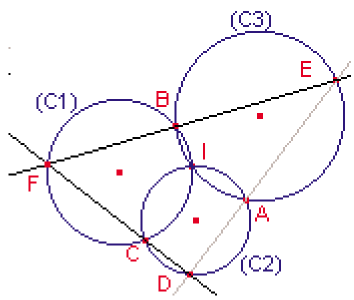
12) (S'appuyant sur 11.) Soient A et B deux points distincts et *s* une similitude directe de centre A. Déterminer les points M du plan tels que B, M, *s*(M) soient alignés.

Soient *s* et *s'* deux similitudes directes. Déterminer les points du plan tels que M, *s*(M), *s'*(M) soient alignés.

Indication : Il s'agit d'un cercle (ou d'une droite) à chaque fois.

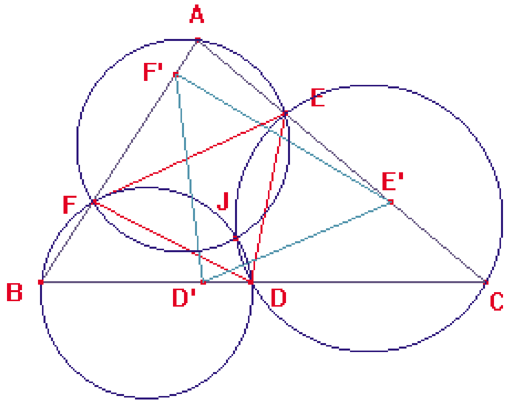
Prolongements

13) (S'appuyant sur 11.)



a) Trois cercles (C_1), (C_2), (C_3) ont un point commun I et se coupent en A, B, C. Une droite passant par A coupe (C_2) et (C_3) en D et E. Démontrer que (CD) et (EB) se coupent en un point F situé sur (C_1). Démontrer que lorsque la droite passant par A varie, les triangles DEF obtenus sont deux à deux semblables.

b) Lorsqu'un triangle DEF varie en restant inscrit dans un triangle ABC donné et en restant semblable à lui-même, démontrer que le lieu des centres des similitudes obtenues est un point.



Indication : Pour a), on peut par exemple considérer les trois similitudes de centre I qui transforment respectivement (C_1), en (C_2), (C_2),en (C_3), (C_1), en (C_3), et on utilise le résultat de l'exemple 1.c).
Pour b), on suppose que D est (BC), E sur (AC) et F sur (AB) ; soit J le centre de la similitude qui fait passer de DEF à un triangle semblable D'E'F' inscrit dans ABC ; on peut montrer que J appartient aux cercles DCE et de même aux cercles FBD et FEA.

Remarque – Étant donné un triangle ABC et un autre DEF inscrit dans ABC, on a ainsi un moyen de construire des triangles semblables à DEF et inscrits dans ABC.

Sections planes de surfaces

Les fonctions de deux variables sont d'un intérêt considérable dans le développement de la pensée mathématique. En effet, elles sont les seules, parmi les fonctions de n variables (avec $n \geqslant 2$) dont on peut *voir* le graphe. Elles sont une source irremplaçable d'intuitions sur ces fonctions qui, parce qu'elles comportent plus d'une variable, obligeront ultérieurement à généraliser les notions de dérivée (dérivées partielles) et de différentielle. Ce passage par les fonctions de deux variables est d'autant plus utile que dans l'enseignement supérieur, il n'est pas rare que l'on aborde sans ménagement les fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$.
Un autre intérêt de l'étude des fonctions de deux variables est de montrer par des exemples que la notion de fonction recouvre davantage que le champ – parfois un peu trop figé dans l'esprit des élèves – des fonctions réelles d'une variable réelle ; les élèves ont d'ailleurs le plus souvent oublié les fonctions de deux variables manipulées dès l'école élémentaire à travers les quatre opérations de l'arithmétique ($x + y$, $x - y$, xy et x/y).
Il s'agit de plus de faire le lien entre des questions de géométrie dans l'espace et des méthodes de nature algébrique liées à l'équation $z = f(x,y)$ et d'obtenir des résultats non triviaux à partir de remarques simples.
Toute étude générale des surfaces ou des fonctions de deux variables est hors programme. Ce chapitre de spécialité a un contenu modeste, mais son importance conceptuelle ne doit pas être sous-estimée.

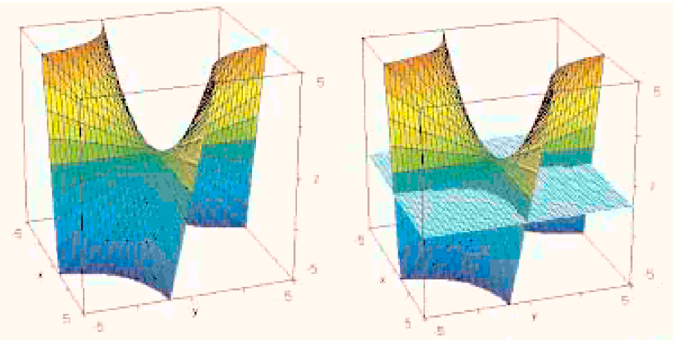
Exemples d'activités introductives

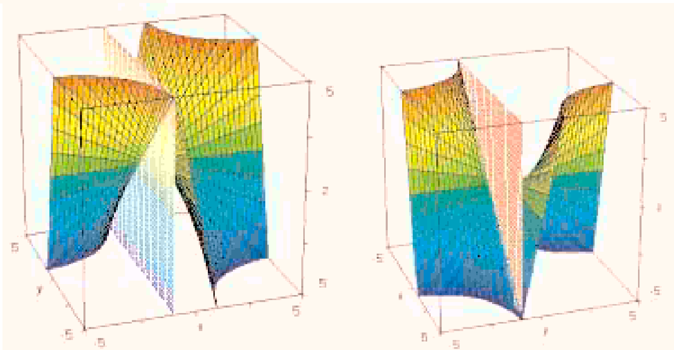
Un préalable utile pourra être de faire découvrir aux élèves la forme générale des courbes de niveau d'une surface topographique autour respectivement d'un sommet, d'un fond et d'un col. On prendra garde qu'en général, les courbes de niveau à l'altitude exacte du col (deux lignes qui se croisent) ne sont pas présentes sur les cartes. Inversement, à partir d'une carte topographique, on pourra chercher à reconstituer le profil de la ligne joignant deux points donnés.

1) On a représenté une surface dans le cube $[-5;5]^3$, puis les sections de cette surface par des plans. Déterminer, par lecture graphique, l'équation de chacun de ces plans. On sait que cette surface a pour équation l'une des équations suivantes :

$$x^2 + y^2 = z \; ; \; xy = z^2 \; ; \; xy = z.$$

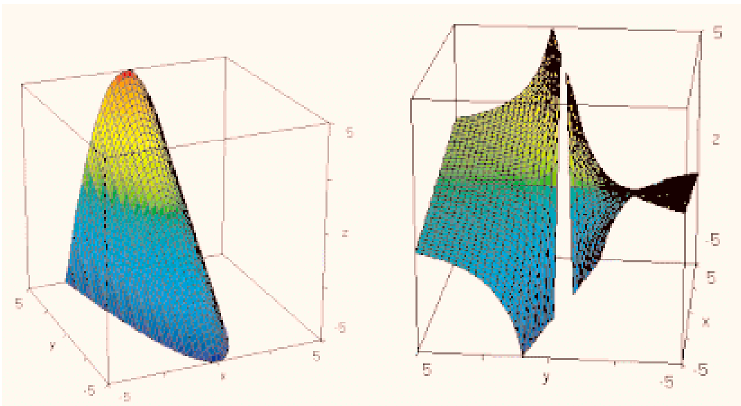
Quelle est la bonne équation ? Quelle est, dans chacun de ces plans, l'allure de la courbe de niveau ? En donner une équation dans un repère du plan que l'on précisera.

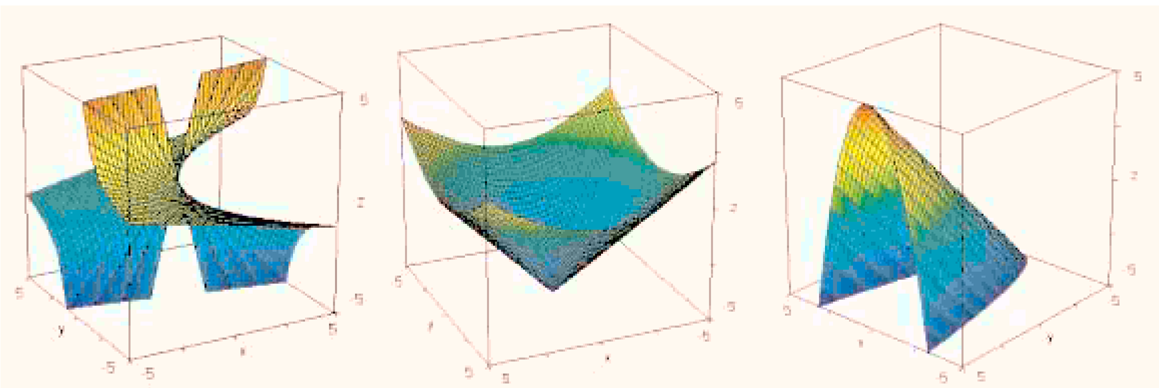




2) On a donné ci-dessous cinq représentations (dans le cube $[-5;5]^3$) de trois surfaces dont les équations sont données ci-dessous. Associer à chaque représentation son équation.
Équations :

(1) $z = \dfrac{x}{y}$ (2) $z = y - x^2$ (3) $x^2 + y^2 = (z + 5)^2$





Le travail consistera donc le plus souvent à partir d'une surface d'équation $z = f(x,y)$ et à étudier les sections par des plans parallèles aux plans de coordonnées. L'intersection avec un plan $z = k$ fournit dans l'espace une courbe Γ_k définie par le système d'équations $f(x,y) = k$, $z = k$. On représentera dans le plan Oxy les courbes Γ_k' définies par $f(x,y) = k$. On distinguera clairement les courbes Γ_k (dans l'espace) des courbes Γ_k' qui en sont les projetées orthogonales sur le plan Oxy. Un travail analogue sera fait avec les sections par des plans $x = k$ ou des plans $y = k$. Pour ces derniers plans, on remarquera que ces sections sont des graphes de fonctions d'une variable et les élèves traiteront des exemples tels $f(x,y) = xy$ ou $f(x,y) = x^2 + y^2$. On pourra éventuellement étudier les familles de courbes associées.

Concernant les cylindres $x^2 + y^2 = r^2$ et les cônes $z^2 = m^2(x^2 + y^2)$, il s'agit de prolonger le travail commencé en première. Les élèves doivent savoir le lien entre leur équation et leur nature géométrique. Ils justifieront sur leur équation que ce sont des réunions de droites. La notion générale d'hyperbole étant hors programme, on ne déterminera pas la nature géométrique de l'intersection du cône $z^2 = m^2(x^2 + y^2)$ avec un plan $y = k$ (ou $x = k$) : on se contentera de la considérer comme réunion des graphes de $z = m\sqrt{x^2 + k^2}$ et $z = -m\sqrt{x^2 + k^2}$ et de la représenter.

Pour le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$, on pourra préciser la nature géométrique de l'intersection avec des plans parallèles aux plans de coordonnées ; on fera remarquer la position de la surface par rapport au plan Oxy. À l'aide d'outils logiciels, on donnera une représentation en perspective de la surface et des sections étudiées.

Pour l'hyperboloïde $z = xy$, le même travail sera fait ; on fera remarquer que cette surface est réunion de droites ; on insistera également sur la position de cette surface par rapport au plan Oxy.

3) Paraboloïde hyperbolique

– Un exercice préparatoire : deux équations pour l'hyperbole équilatère.

a) Étudier la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$. Domaine, limites, asymptotes, et tracer son graphe.

b) Tracer le lieu H des points (x,y) tels que $y^2 - x^2 = 1$.

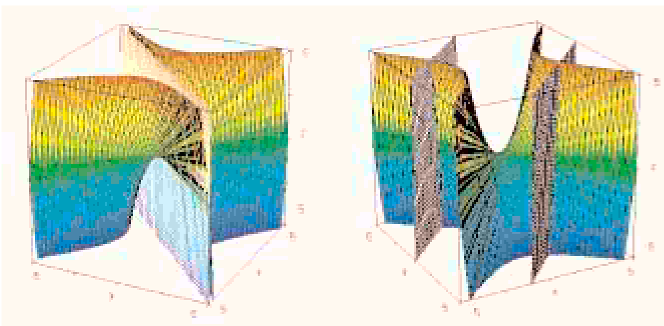
– Surface d'équation $z = x^2 - y^2$.

a) Tracer l'intersection de cette surface par le plan horizontal $z = a$, pour $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$.

b) Quelle est l'intersection de la surface avec le plan vertical $y = a$?
Étudier succinctement la courbe obtenue, et donner la hauteur du minimum .
Quel est le maximum de m_a, pour a variant dans $\mathbb{R}$?
Faire la même étude, *mutatis mutandis*, pour le plan $x = a$.

c) Cette surface contient-elle des droites ?

d) Étudier l'intersection de la surface avec le plan $x - y = a$ puis avec le plan $x + y = a$, et revenir sur la question 3.



Section par les plans suivants :
$x - y = 0$
$x - y = -5$
$x - y = 4$

4) On considère le lieu des points (x, y, z) tels que $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.

– Étudier l'intersection de cette surface par les plans horizontaux. Quels sont les points de la surface les plus proches de l'axe Oz ?

– Étudier l'intersection de cette surface avec le plan $x = z$, et montrer qu'elle est constituée de deux droites parallèles. En considérant de même le plan $x = -z$, montrer que, par tout point de la surface, passent deux droites contenues dans la surface.

Un autre type d'exercice consiste en l'étude d'une surface donnée par une équation $z = f(x,y)$ plus générale que les précédentes. Le schéma d'un tel exercice peut être le suivant : étude des sections par des plans $y = k$; représentation graphique de ces sections ; pour k donné, étude des extremums de la fonction $x \to f(x,k)$; dans le cas où on trouve un unique extremum en $x = g(k)$, on peut représenter la courbe du plan Oxy donnée par les points $(g(k),k)$; on utilisera un logiciel pour visualiser la surface et interpréter les calculs. Il n'est pas question de multiplier des problèmes de ce genre, mais simplement de montrer sur un ou deux exemples bien choisis comment il est possible d'exploiter les fonctions d'une variable pour l'étude de questions portant sur des fonctions de deux variables.
Pour les élèves, une des difficultés principales sera de maîtriser des études de fonctions avec des paramètres. C'est pourquoi on se limitera à des exemples simples.
On devrait par ailleurs tirer de chaque équation ce que des considérations élémentaires permettent d'obtenir, par exemple :
– si l'équation ne fait intervenir que x^2, et non x, alors la surface obtenue est symétrique par rapport au plan $x = 0$;
– la quantité $x^2 + y^2$ étant le carré de la distance du point considéré à l'axe Oz, si, dans l'équation de la surface, x et y n'interviennent qu'à travers $x^2 + y^2$ alors l'équation de la surface ne dépend que de z et de la distance à l'axe Oz : elle est donc de révolution par rapport à cet axe.

Annexe
Radioactivité
terminale S

Introduction

Ce document est le fruit d'un travail commun entre les groupes d'experts sur les programmes scolaires de sciences physiques, mathématiques et sciences de la vie et de la Terre

Parmi les quatre interactions fondamentales qui structurent le monde naturel, gravitation, interaction électromagnétique, interaction forte et interaction faible, trois sont à l'œuvre dans le noyau de l'atome, les deux dernières l'étant de façon spécifique. Curieusement, la première information en est venue, il y a un siècle, non à partir des noyaux les plus stables qu'elles sont susceptibles d'édifier, mais au contraire des noyaux à la limite de stabilité, les noyaux dits radioactifs. De l'origine de l'énergie solaire au maintien d'une Terre chaude et dynamiquement active, de l'origine des éléments chimiques à celle des rayons cosmiques, de la fabrication d'armes terrifiantes à la production d'énergie, de la gestion des déchets nucléaires à l'imagerie médicale ou la médecine curative, les phénomènes nucléaires ont modifié notre vision du monde et pénétré nombre d'activités humaines. Il est important que les élèves de lycée en aient une première perception, en ce qui concerne tant le phénomène physique que ses applications technologiques et géologiques.
Le présent document propose une convergence thématique sur la radioactivité, entre la physique, les mathématiques et les sciences de la Terre. À un premier niveau, la fonction exponentielle, que les élèves découvrent en terminale, s'enrichit à l'évidence d'apparaître dans une expression qui permet d'obtenir l'âge des roches les plus anciennes de la Terre et d'autre planètes du système solaire. De plus, en cours de physique de terminale S, on mesure en diverses occasions des grandeurs physiques dont le taux de variation est proportionnel à la grandeur elle-même : décroissance radioactive, charge et décharge d'un condensateur, effet d'une bobine à induction dans un circuit à courant variable, chute d'un mobile en présence de forces de frottements etc. Il est intéressant que les élèves associent directement cette propriété à la fonction exponentielle.
Ceci suggère d'introduire la fonction exponentielle à partir de l'équation différentielle $y' = y$. La progression dans le programme de mathématique s'en trouve modifiée, par rapport à la façon de faire traditionnelle où l'exponentielle est introduite comme fonction réciproque du logarithme ou à partir de l'extension des fonctions puissances. La notion d'équation différentielle, c'est-à-dire d'une équation où *l'inconnue est une fonction* est nouvelle pour les élèves et sera introduite tôt dans l'année. Cette introduction est justifiée par l'exemple de la loi macroscopique de la désintégration radioactive à la fois simple et riche dans ses applications. C'est ce que propose le nouveau programme de mathématiques et que développe le présent document. Du point de vue strictement mathématique, les diverses façons d'introduire la fonction exponentielle sont équivalentes. Elles ne le sont pas du point de vue de la physique et de l'intuition.

Le thème « Radioactivité » conduit naturellement à aborder en mathématiques la notion de loi de probabilité à densité continue. La physique aborde la question sous l'angle macroscopique (et empirique) du nombre moyen de noyaux radioactifs se désintégrant dans l'unité de temps. Mais la mise en place du modèle qui, partant des hypothèses de base concernant la désintégration d'un noyau individuel, permet d'établir la loi de probabilité de la durée de vie d'un noyau radioactif est effectuée dans le programme de mathématiques. À l'issue du parcours, on peut voir comment un processus fondamentalement aléatoire peut conduire à un comportement macroscopique déterministe.
Si les découpages disciplinaires ont certes leur fonction (après tout, ils correspondent pour une part à la structuration de la nature et à notre façon de l'appréhender), l'exemple de la radioactivité illustre en quoi une recomposition des connaissances relatives à des champs disciplinaires différents accroît les possibilités de compréhension. L'interdisciplinarité est une pratique nécessitant un approfondissement de chacune des composantes, le plus souvent préalable ; il se trouve que le thème *radioactivité* est l'un de ceux où un travail peut être fait en attaquant le problème de tous les côtés à la fois, sans l'écueil de la superficialité.

La loi macroscopique de désintégration radioactive

Pourquoi certains noyaux sont-ils instables ?

La structure des noyaux atomiques (A nucléons dont Z protons et $N = A\text{-}Z$ neutrons) résulte de la compétition entre les deux interactions existant entre les constituants :
1) L'interaction forte, attractive, entre nucléons, qu'ils soient neutrons ou protons ; elle est intense, mais de courte portée : éloignés de plus de 3 ou 4 femtomètres (fm, 1 fm = 10^{-15} m), deux nucléons ne se « voient » plus par interaction forte. Cette interaction, pour des raisons que l'on n'explicitera pas ici, privilégie les noyaux avec un nombre égal de protons et de neutrons (un signe de cette caractéristique peut être décelé dans le fait que le noyau de deutérium, isotope lourd de l'hydrogène (un proton + un neutron) est stable, alors que le « di-neutron » et le « di-proton » n'existent pas).
2) L'interaction électrique (dite « coulombienne ») entre charges électriques de même nature, en l'occurrence les protons. Aux distances en jeu dans le noyau, elle est environ dix fois moins intense que l'interaction forte, mais elle est de longue portée : chaque proton interagit avec tous les autres. Sa contribution à l'énergie totale du noyau est proportionnelle au nombre de couples de protons, soit $Z(Z-1)/2$. Comme Z est de l'ordre de $A/2$, le nombre de couples est de l'ordre A^2. Le potentiel coulombien entre deux charges variant comme l'inverse de leur distance, la contribution à l'énergie est ramenée en fait à une dépendance en $A^{5/3}$.
Il résulte de ces caractéristiques que l'interaction forte *attractive* contribue à l'énergie du noyau par un terme proportionnel au nombre total A de nucléons (chaque nucléon n'interagissant qu'avec ses proches voisins), alors que l'interaction coulombienne *répulsive* contribue par un terme proportionnel à $A^{5/3}$: l'interaction coulombienne, bien que moins intense que l'autre, finit par l'emporter lorsque A augmente. Au-delà d'un certain nombre de protons, les noyaux deviennent instables, et le tableau de Mendeleiev s'arrête. Les valeurs numériques particulières des constantes caractéristiques des interactions expliquent que ce nombre maximum est 92, et qu'ainsi le tableau périodique de Mendeleiev s'arrête, pour les éléments naturels, à l'uranium.

Remarques
1) L'énergie d'un noyau comprend d'autres contributions. Par exemple un terme de surface, lié à ce que le nombre de voisins est plus petit en surface qu'en volume, un terme lié à ce que le nombre de neutrons N n'est pas strictement égale à Z, etc. L'argument ci-dessus concerne les deux contributions principales et répond donc qualitativement à la question posée.
2) Un neutron isolé est une particule instable. Sa liaison dans un édifice nucléaire empêche sa désintégration.
3) On sait synthétiser en laboratoire des éléments dits « super lourds » ; le record actuel est $Z = 112$. Ces éléments ont des durées de vie trop faibles pour être observées ; leur formation est attestée par l'identification des produits de leur désintégration.
4) Les étoiles à neutrons, résidus d'explosions de supernovae, semblent contredire le raisonnement présenté ci-dessus, puisqu'il s'agit de boules de matière nucléaire d'environ 10 km de rayon, ayant en gros la masse du Soleil. Plusieurs considérations sont à prendre ici en compte : d'une part, une étoile à neutrons, contrairement à un noyau atomique, est électriquement neutre ; d'autre part, à l'échelle d'une étoile, la gravitation, loin d'être négligeable comme dans un noyau, devient l'interaction dominante. Elle est également de longue portée, et toujours attractive : c'est elle qui fait qu'une étoile à neutrons forme un système « lié » (stable).

Il est commode de représenter les noyaux atomiques dans le plan (N,Z).

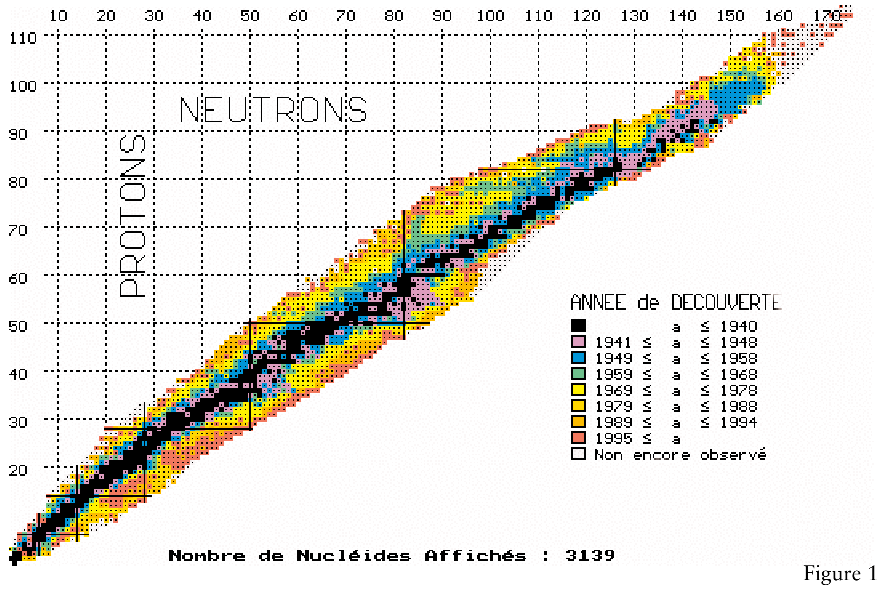


Figure 1

Un noyau est représenté par un point de coordonnées entières. Les noyaux légers sont groupés autour de la droite $N = Z$, c'est un effet mentionné de l'interaction forte. Les quelques caractéristiques développées ci-dessus permettent de comprendre où se trouvent les noyaux radioactifs dans ce plan : puisque l'interaction nucléaire privilégie les noyaux avec $N \cong Z$, les noyaux avec « trop » de protons ou « trop » de neutrons sont instables. Avec trop de protons, ils peuvent être émetteurs β^+ (un proton se transforme spontanément en neutron dans le noyau avec émission d'un positron) ou capturer un électron du cortège ; avec trop de neutrons, ils sont émetteurs β^- (un neutron se transforme spontanément en proton dans le noyau avec émission d'un électron). Ces deux processus sont gouvernés par l'interaction faible. Enfin ceux qui sont « trop » lourds, vers la fin du tableau de Mendeleiev, sont émetteurs α : ils se transforment spontanément en noyaux plus légers en émettant un noyau d'hélium. La radioactivité γ est une émission de rayonnement électromagnétique, provenant de la désexcitation de noyaux qui ne sont en général pas produits dans leur état d'énergie fondamental.

La loi de désintégration radioactive

L'expérience suggère que, si l'on considère une population macroscopique de noyaux radioactifs (c'est-à-dire dont le nombre est de l'ordre du nombre d'Avogadro, soit 6×10^{23}), le nombre *moyen* de noyaux qui se désintègrent pendant un intervalle de temps Δt à partir d'un instant t, rapporté au nombre total de noyaux $N(t)$ présents à l'instant t et au temps d'observation Δt, est une constante λ caractéristique du noyau en question. On peut donc écrire :

$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)} = -\lambda \Delta t$$

A priori, la constante λ pourrait dépendre du temps. Ce serait le cas si un processus de vieillissement était en cause, comme, par exemple, si l'on s'intéresse au nombre de décès dans une population donnée. Le fait que λ ne dépende pas du temps s'interprète comme un processus de « mort sans vieillissement ».

En passant à la limite pour un intervalle de temps devenant arbitrairement petit, on écrira l'équation ci-dessus $\mathrm{d}N(t)/N(t) = -\lambda \mathrm{d}t$, ou encore $\mathrm{d}N(t) = -\lambda N(t)\mathrm{d}t$. On écrira aussi : $N'(t) = -\lambda N(t)$.

Les activités expérimentales proposées dans le programme (mesure de la radioactivité du radon, observation de la décroissance temporelle) sont décrites dans la partie du document d'accompagnement propre à la physique.

Dans ce texte, l'accent est mis sur la synergie nécessaire entre physique et mathématiques pour une bonne compréhension du phénomène, en particulier concernant les deux aspects suivants : (i) l'étude empirique de la désintégration radioactive conduit à considérer un objet mathématique nouveau pour les élèves, appelé équation différentielle et (ii) on établit un modèle physique microscopique de la désintégration, qui rend compte de la loi macroscopique observée pour l'évolution de la valeur moyenne du nombre de noyaux existant à un instant donné.

Fonctions vérifiant *f' = kf*

L'équation $f' = kf$ est une équation où l'inconnue est une fonction : c'est un objet nouveau pour l'élève de terminale. La ou les solutions, si elles existent, sont des fonctions.
Il faut remarquer ici que le seul fait de poser une équation n'implique pas qu'elle ait des solutions. Par exemple, les élèves peuvent facilement vérifier qu'aucune fonction polynôme, et plus généralement aucune des fonctions connues à leur entrée en terminale n'est solution de l'équation. On peut donc s'interroger sur l'*existence* et l'unicité de la solution qui prend une valeur donnée en un point donné.
Une première approche peut consister à mettre en œuvre une méthode numérique pour approcher une solution de l'équation, en s'assurant empiriquement de la convergence de la méthode. Dans le cas présent, les équations différentielles sont implicitement abordées dans le programme de mathématiques de première S : on construit à l'aide de la méthode d'Euler une approximation d'une fonction f telle que $f' = g$, où g est une fonction donnée, par exemple $g(t) = 1/(1 + t^2)$ (aucune question théorique n'est soulevée à ce niveau).

En continuité avec le travail fait en première, on peut utiliser la méthode d'Euler pour avoir l'allure du graphe sur l'intervalle $[0,t]$ de la fonction dérivable φ vérifiant $\varphi' = \varphi$, $\varphi(0) = 1$. Pour cela, on discrétise l'intervalle $[0,t]$ en n intervalles d'amplitude t/n, et on trace entre 0 et t le graphe d'une fonction affine par morceaux, obtenu en reliant par des segments les points $(kt/n, y_k)$, $k = 0,\dots,n$, avec :

$$y_0 = 1 \text{ et } y_{k+1} = y_k\left(1+\frac{t}{n}\right)$$

soit :

$$y_k = \left(1+\frac{t}{n}\right)^k,\ k = 0,\dots,n \text{ en particulier } y_n = \left(1+\frac{t}{n}\right)^n$$

On trouvera sur le cédérom joint une appliquette java sur la méthode d'Euler.

Du point de vue mathématique, la méthode d'Euler lie donc la valeur de $\varphi(t)$ à celle de la limite éventuelle de la suite de terme général $(1 + t/n)^n$: cette question est traitée dans l'annexe 1, où l'on déduit, de façon rigoureuse, quelques propriétés de φ. On passe ensuite à l'étude des équations $f' = kf$; on caractérise les solutions de ces équations ayant pour valeur 1 en 0. Ce sont les fonctions dérivables transformant les sommes en produits. Diverses propositions sont établies, dont les démonstrations sont l'occasion d'approfondir la notion de dérivée, de manipuler cette nouvelle fonction φ et de justifier la notation $\varphi(t) = e^t$.
Il est important de noter à ce sujet que la seule résolution numérique ne permettrait en aucun cas d'établir ces propriétés !

Loi microscopique de désintégration radioactive

Ce paragraphe utilise des résultats du cours de mathématiques de terminale : propriétés de la fonction exponentielle, de l'intégrale d'une fonction continue et de la loi binomiale.
En physique, l'expérience a permis de poser l'équation suivante :

$$N'(t) = -\lambda N(t).$$

Où $N(t)$ représente la *moyenne* du nombre de noyaux présents à l'instant t. On en déduit la loi d'évolution :

$$N(t) = N(0)\, e^{-\lambda}.$$

On remarquera que pour toute valeur de t et t_0, on a aussi :

$$N(t + t_0) = N(t_0)\, e^{-\lambda t}.$$

Autrement dit, l'origine des temps importe peu dans l'étude de ce phénomène : on peut « repartir de 0 » quand on veut, l'équation modélisant l'évolution du nombre moyen d'atomes est toujours la même.
Considérons maintenant ce qui se passe à l'échelle des noyaux et cherchons à établir un modèle microscopique de la désintégration. L'observation montre que le nombre de noyaux qui se désintègrent pendant un intervalle de temps t est une quantité aléatoire et on fera donc l'hypothèse que la durée de vie d'un noyau d'une substance radioactive donnée est elle aussi une quantité aléatoire.
Le taux de désintégration $N'(t)$ est proportionnel au nombre de noyaux présents : une interprétation est que les désintégrations des noyaux sont indépendantes les unes des autres.
Le taux de désintégration des noyaux, rapporté au nombre de noyaux présents, soit $N'(t)/N(t)$, est constant au cours du temps. Les noyaux, en quelque sorte, ne « s'usent » pas, ne « vieillissent » pas : leurs propriétés demeurent constantes au cours du temps.
On peut alors, pour une substance radioactive donnée, proposer un modèle microscopique de désintégration des noyaux fondé sur les hypothèses suivantes :
1) La durée de vie d'un noyau est modélisée par une loi de probabilité, la même pour tous les noyaux d'une même substance radioactive.
2) La désintégration d'un noyau n'affecte pas la désintégration d'un autre noyau.
3) Un noyau se désintègre sans avoir « vieilli ».
La durée de vie est une quantité aléatoire, qui peut-être modélisée par une loi de probabilité sur l'ensemble des nombres réels positifs. Les élèves ont vu en première la notion de loi de probabilité sur un ensemble *fini*, loi caractérisée par la probabilité de chaque élément ; la généralisation de cette notion de loi de probabilité à des intervalles de $\mathbb{R}$, bornés ou non, est délicate. On trouvera dans le document d'accompagnement de mathématiques une approche pour la classe terminale S de la notion de loi de probabilité à densité continue. Nous cherchons dans ce paragraphe une telle loi P pour modéliser la durée de vie des noyaux d'une même substance radioactive.
On notera $F(t)$ la probabilité pour que la durée de vie d'un noyau soit comprise entre 0 et t, soit $F(t) = P([0,t])$. La loi de probabilité P étant à densité continue, on peut écrire :

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt \text{ et } \lim_{t \to +\infty} F(t) = 1,$$

où f est une fonction continue positive sur $\mathbb{R}^+$, appelée densité de P. Pour tout intervalle $I = (a,b)$, $a < b$, que les bornes a et b soient incluses ou non dans I, on a $P(I) = F(b) - F(a)$.
On remarque que $F(t)$ désigne aussi la probabilité pour qu'un noyau se désintègre entre les instants 0 et t. La probabilité qu'il ne soit pas désintégré à l'instant t est donc $1 - F(t)$.
L'hypothèse (3) sera interprétée à partir de la considération suivante du non vieillissement pour un organisme : ne pas vieillir, c'est avoir à tout âge la même probabilité de vivre encore s années. Soit :
La probabilité qu'a un noyau non désintégré à l'instant t de se désintégrer dans les s unités de temps suivantes ne dépend que de s ; en particulier, comme cette probabilité ne dépend pas de t, elle est égale à la probabilité de se désintégrer entre les instants 0 et s.
Soit encore :
La probabilité pour un noyau de se désintégrer entre les instants t et $t + s$, **sachant qu'il n'est pas désintégré à l'instant *t***, est égale pour tout t à la probabilité de se désintégrer entre les instants 0 et s.
Cela s'écrit :

$$P_{I_t}(]t, t + s]) = F(s),$$

où I_t est l'événement « le noyau n'est pas désintégré à l'instant t ». La probabilité de I_t est, comme indiqué ci-dessus, $1 - F(t)$; or :

$$P(]t, t + s]) = (1 - F(t)) \times P_{I_t}(]t, t + s]),$$

(la probabilité de se désintégrer entre t et $t + s$ est égale à la probabilité de *ne pas* se désintégrer entre 0 et t multipliée par la probabilité *conditionnelle* de se désintégrer entre t et $t + s$ sachant que le noyau existe encore à l'instant t).
Comme $P(]t, t + s]) = F(t + s) - F(t)$, il s'ensuit que :

$$F(t + s) - F(t) = F(s)(1 - F(t)).$$

En posant $G(t) = 1 - F(t)$, il vient :

$$G(t + s) = G(t)G(s).$$

La fonction G est dérivable, transforme une somme en produit et vérifie $G(0) = 1$. D'après les résultats de l'annexe (propriété 3), c'est une fonction exponentielle : $G(t) = e^{at}$. Comme F est positive et bornée par 1, G est bornée par 1, et on peut écrire $a = -\alpha$, où α est strictement positif. D'où $G(t) = e^{-\alpha t}$ et $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$.
La densité f est la dérivée de F ; la densité de la loi de probabilité modélisant la durée de vie d'un noyau qui *meurt sans vieillir* (on peut dire aussi qui *ne s'use pas*) est donc donnée par $f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, où α est un paramètre strictement positif. On dit que P est une loi de probabilité exponentielle.

Remarques
1) La probabilité qu'a un noyau existant à l'origine de se désintégrer entre t et $t + s$ est donnée par :

$$P([t,t+s]) = e^{-\alpha t}(1 - e^{-\alpha s}) = e^{-\alpha t}P([0,s]).$$

Cette probabilité dépend de t et tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini : c'est normal, car la probabilité de se désintégrer entre 0 et t tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini.
En particulier, $P(]n\,;n+1]) = (1-p)^n p$, où p est la probabilité de désintégration en une unité de temps, soit $p = 1 - e^{-\alpha}$.
2) Un exemple d'absence d'usure dans le cas discret :
On lance un dé toutes les secondes : par analogie avec le cas de la radioactivité, on dira que s'il tombe sur 6, il se désintègre, et l'on arrête. L'absence d'usure (ou le non vieillissement) est ici très intuitive: sachant que le dé n'est pas désintégré à la seconde n, la probabilité qu'il se désintègre à la seconde $n + 1$ vaut toujours $p = 1/6$; la probabilité qu'il se désintègre à la seconde $n + 1$ est $P(n+1) = (1-p)^n p$. La loi de probabilité définie sur $\mathbb{N}^*$ par $P(n) = (1-p)^{n-1}p$ est appelée loi de probabilité géométrique.
3) L'espérance (moyenne théorique) d'une loi de probabilité $(p_1,\ldots,p_N)$ sur $E = \{e_1,.,e_N\}$ est $\mu = \sum p_i e_i$.
On définit de même, si elle existe, l'espérance ou moyenne théorique μ d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}^+$ de densité f, par : $\mu = \int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$. Pour $f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, une intégration par parties montre que $\mu = 1/\alpha$; on peut écrire $f(t) = (1/\mu)e^{-t/\mu}$. Autrement dit, si on mesure les durées de vie d'un grand nombre de noyaux, la moyenne de ces durées sera voisine de $1/\alpha$.
La médiane τ de la loi de probabilité P, appelée ici temps de demi-vie, est égale à $\mu \ln(2)$.

Du microscopique au macroscopique

La loi de probabilité du nombre de noyaux qui se désintègrent entre les instants 0 et t, t fixé, est une loi binomiale $B(n, p)$ avec $n = N(0)$ et $p = F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$. L'espérance (moyenne théorique) de cette loi est donnée par le produit np, soit ici $nF(t) = N(0)(1 - e^{-\alpha t})$; cette espérance peut aussi s'écrire $N(0) - N(t)$, où $N(t)$ est l'espérance du nombre de noyaux à l'instant t. On a donc :

$$N(0) - N(t) = N(0)\,(1 - e^{-\alpha t}).$$

D'où :

$$N(t) = N(0)\,e^{-\alpha t}$$

On en déduit que :

$$\alpha = \lambda,$$

où λ est la constante apparaissant dans la loi empirique de désintégration.

Remarques
1) L'échelle microscopique est ici celle des noyaux ; l'échelle macroscopique est, à un instant t fixé, celle du nombre $N(t)$ de noyaux non désintégrés de la substance radioactive considérée ($N(t)$ est de l'ordre de 10^{23}).
On peut aussi dire qu'à l'échelle macroscopique les hypothèses du paragraphe précédent permettent d'appliquer la loi des grands nombres :

La proportion $X(t)/N(0)$ du nombre exact de noyaux qui se désintègrent pendant un intervalle de temps t est proche de la probabilité $F(t)$ de désintégration d'un noyau entre les instants 0 et t. Soit :

$$\frac{X(t)}{N(0)} \approx F(t), \text{ où } F(t) = (1 - e^{-\lambda t}).$$

On peut quantifier ceci, en approchant la loi binomiale par une loi normale ; ainsi, si $N(0) = 10^{23}$ et $F(t) = 10^{-3}$:

$$\text{Probabilité}\left(\left|1 - \frac{1}{F(t)}\frac{X(t)}{N(0)}\right| > 10^{-9}\right) < 10^{-15} \text{ !}$$

Les fluctuations de $X(t)$ sont négligeables par rapport à son espérance, *i.e.* devant $N(0)F(t)$ (dans la mesure où $N(0)F(t)$est suffisamment grand, soit λt pas trop petit, pour que cette phrase ait un sens). La désintégration des noyaux est un phénomène aléatoire, mais au niveau macroscopique, on peut dans ce cas négliger les variations ; ainsi, le même phénomène (la désintégration des noyaux), suivant l'échelle où on l'observe, fait l'objet d'un modèle probabiliste (échelle microscopique) ou déterministe (échelle macroscopique) où on ne raisonne plus que sur des espérances (moyennes théoriques).

2) Il est normal que la traduction au niveau microscopique de l'absence d'usure observée au niveau macroscopique permette de retrouver l'équation $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$, mais encore fallait-il le vérifier. Du point de vue épistémologique, le cheminement est semblable à celui qui va des équations de la mécanique à l'établissement des lois que Kepler a établies empiriquement sur la base des observations de Tycho Brahé. Mais il est légitime de vouloir aller plus loin, et de chercher à comprendre pourquoi « les noyaux meurent sans vieillir », autrement dit, de chercher pourquoi leur désintégration ne résulte pas d'un processus de vieillissement. C'est Gamow qui le premier, en 1928, a utilisé la toute nouvelle mécanique quantique pour comprendre l'émission α : il s'agit d'une traversée de barrière d'énergie potentielle (d'origine coulombienne) par « effet tunnel ». La mécanique quantique, théorie irréductiblement probabiliste, conduit à la fois à la loi exponentielle et à la détermination de la valeur de la constante λ, à partir des caractéristiques de la barrière de potentiel. Elle permet de comprendre également la variété des valeurs de λ, d'un nucléide à un autre : en effet, la transmission à travers une barrière par effet tunnel est très sensible (exponentiellement sensible, en réalité) à des petites différences dans l'allure de cette barrière.

Datations

Les demi-vies des noyaux radioactifs couvrent une gamme étonnamment large de valeurs, comme le montrent les quelques cas suivants :

Uranium-238	$4{,}5 \times 10^{9}$ ans
Plutonium-239	$2{,}4 \times 10^{4}$ ans
Carbone-14	5 730 ans
Iode-131	8 jours
Radon-222	3,8 jours
Radon-220	56 s
Polonium-213	4×10^{-6} s
Beryllium-8	1×10^{-16} ans

Remarque – On peut se demander comment il est possible de mesurer des demi-vies de l'ordre du milliard d'années. Un calcul d'ordre de grandeur des taux de désintégration escomptés permet de fixer les idées. Considérons un échantillon de 238 g d'uranium-238. Il contient environ $6{,}02 \times 10^{23}$ noyaux d'uranium. Le taux de désintégration (par émission α) $-\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = \lambda N(t) = N(t)\ln 2/\tau_{1/2}$ est donc de l'ordre de 500 000 par seconde. En mesurant $\Delta N(t)/\Delta t$, on peut donc avoir accès à $\tau_{1/2}$. Les sources d'incertitude proviennent bien sûr de la détection.

Cette variété de valeurs des demi-vies est une chance, car elle permet d'effectuer des datations pour toutes les échelles de temps nécessaires. Décrivons brièvement la méthode de datation dite « au carbone-14 ».

Datation au carbone-14

Le carbone-14 est produit en haute atmosphère lors de réactions nucléaires induites par des protons rapides d'origine galactique. Lors de ces réactions, des neutrons rapides sont libérés, qui peuvent être capturés par les noyaux d'azote de l'air selon le schéma :

$$^{14}_{7}N + n \rightarrow ^{14}_{6}C + p.$$

Ce carbone-14 est produit régulièrement. Il est en proportion à peu près constante et connue dans les environnements terrestres où l'on trouve du carbone en contact avec l'atmosphère : gaz carbonique, plantes, corps humain. La proportion est de $1{,}3 \times 10^{-12}$ noyaux de carbone-14 pour 1 noyau de carbone-12. Lorsqu'un individu ou une plante meurt, son métabolisme cesse et son carbone n'est plus renouvelé. Par conséquent le carbone-14 qu'il contient se désintègre, en redonnant un noyau d'azote-14, et ceci avec une demi-vie de 5 730 ans. Il suffit de mesurer la proportion dans les restes (os, cheveux, bois) pour connaître l'époque de la mort. On peut ainsi dater des événements qui se sont déroulés il y a plus de quelques milliers d'années. Au-delà de 30 000 à 35 000 ans, la plus grande partie des noyaux de carbone-14 ont été désintégrés et le comptage ne peut plus se pratiquer.

> *Exemple :* dans 1 g de carbone naturel actuel, de masse molaire moyenne 12 g, il y a $6{,}02 \times 10^{23}/12 \cong 5 \times 10^{22}$ noyaux. Parmi ceux-ci, environ $5 \times 10^{22} \times 1{,}3 \times 10^{-12} \cong 6{,}5 \times 10^{10}$ sont des noyaux de carbone-14. Le taux de désintégration $-\,\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = \lambda N(0)$ est donc de $\ln(2) \times 6{,}5 \times 10^{10}/(5730 \times 3 \times 10^{7}) \cong 0{,}26$ par seconde (il y a en effet environ 3×10^{7} secondes dans une année). Au bout de deux fois la demi-vie, soit 11 460 ans, ce taux est réduit d'un facteur $\exp(2\ln 2) = 4$. Le taux de comptage mesuré est beaucoup plus faible : il tient compte de la fenêtre d'entrée du détecteur et de l'efficacité de celui-ci.

La méthode suppose que le taux de production du carbone-14 en haute atmosphère n'a pas varié entre l'instant initial et le présent. On a pu montrer récemment que ce n'était pas tout à fait le cas, et qu'il fallait effectuer des corrections aux datations obtenues par cette méthode, pour tenir compte des variations des échanges océan-atmosphère d'origine climatique et des variations du champ magnétique terrestre agissant sur le rayonnement cosmique. Le rayonnement cosmique et l'activité solaire ont pu également varier au cours des quelques milliers d'années passées. Depuis la révolution industrielle, l'activité humaine a fortement modifié le taux de carbone-14 présent dans l'atmosphère (combustion d'hydrocarbures d'origine fossile, dépourvus de carbone-14) et les datations doivent bien sûr en tenir compte.

Détermination de l'âge de la Terre par la méthode rubidium-strontium

Rutherford, il y a un siècle, fut le premier à avoir l'intuition que la radioactivité, présente dans les roches, pouvait servir à déterminer l'âge de celles-ci.
Les roches provenant de l'intérieur de la Terre et métamorphiques (transformées sous l'effet des hautes températures et pressions internes) sont formées de minéraux. Ces minéraux sont composés de constituants majeurs non radioactifs (K, Al, Na, Ca, Si, O, etc.), mais des éléments plus rares susceptibles de présenter des désintégrations radioactives (le rubidium par exemple) peuvent s'insérer dans le réseau cristallin à la place des constituants majeurs (strontium et rubidium à la place du potassium par exemple). Une roche cristallise en une durée très courte à l'échelle géologique, et l'on peut donc considérer que ce processus est instantané.
La méthode rubidium-strontium de datation des roches repose sur la désintégration du rubidium-87 en strontium-87. Un neutron du noyau de rubidium se transforme spontanément en proton (le noyau de rubidium devient ainsi un noyau de strontium), avec éjection d'un électron (conservation de la charge) et d'un anti-neutrino :

$$^{87}_{37}Rb \rightarrow ^{87}_{38}Sr + ^{0}_{-1}e + \overline{\nu_e}.$$

On dit qu'il s'agit d'une radioactivité de type β^-. La demi-vie est de 50×10^9 ans, valeur bien adaptée à la datation de roches cristallisées lors de la formation de la Terre.
À partir de la date de cristallisation, date de « fermeture » des minéraux (instant t_0 que l'on prendra comme origine des temps) les éléments radioactifs subissent une évolution indépendante dans chacun des minéraux de la roche. Considérons différents minéraux d'une roche datant de la même époque géologique, contenant du strontium-86 et 87, non radioactifs, et du rubidium-87, radioactif.
À l'instant initial t_0, le rapport isotopique $N(^{87}\mathrm{Sr})/N(^{86}\mathrm{Sr})_{\mathrm{initial}}$ est le même pour tous les minéraux de la roche, car les deux isotopes ont les mêmes propriétés chimiques. En revanche la quantité de rubidium et le rapport d'abondance $N(^{87}\mathrm{Rb})/N(^{86}\mathrm{Sr})_{\mathrm{initial}}$ varie d'un minéral à l'autre. Ces valeurs initiales sont toutes deux inconnues. Au cours du temps, le nombre d'atomes de strontium-87 augmente en raison de la désintégration des noyaux de rubidium. Comment dater ces roches sans connaître les compositions initiales ?

Soient $N(^{87}\mathrm{Sr})$ et $N(^{86}\mathrm{Sr})$ les nombres d'atomes de strontium-87 et de strontium-86 présents dans un morceau de roche, et $N(^{87}\mathrm{Rb})$ le nombre d'atomes de rubidium-87. Conformément à la loi de désintégration, pour chaque morceau de roche, on aura à l'instant t (en prenant l'instant initial t_0 comme origine des temps) :

$$N(^{87}\mathrm{Rb}) = N(^{87}\mathrm{Rb})_{\mathrm{initial}} \times \exp(-\lambda t) \quad (1)$$

Le nombre d'atomes de strontium-87 formés est égal au nombre d'atomes de rubidium désintégrés soit :

$$N(^{87}\mathrm{Rb})_{\mathrm{initial}}\,[1 - \exp(-\lambda t)],$$

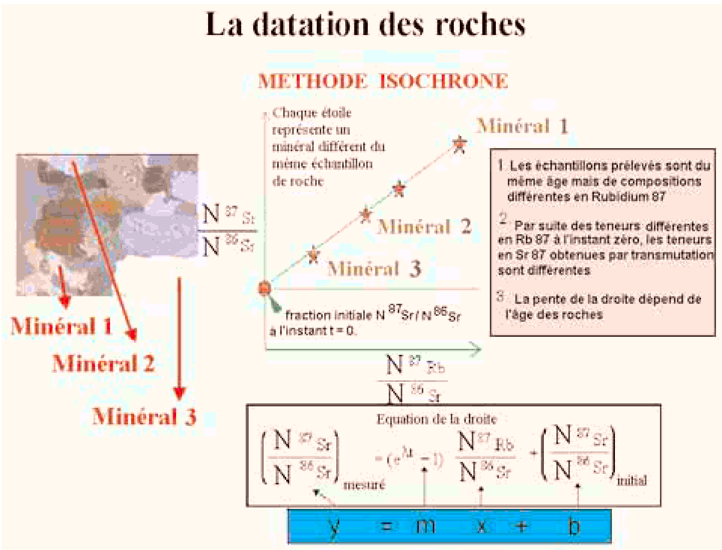


Figure 2

ou encore, en utilisant la relation (1) :

$$N(^{87}\mathrm{Rb}) \times [\exp(\lambda t) - 1].$$

Le nombre total d'atomes de strontium-87, somme des atomes présents initialement et de ceux provenant de la désintégration du rubidium, est donné par :

$$N(^{87}\mathrm{Sr}) = N(^{87}\mathrm{Sr})_{\mathrm{initial}} + N(^{87}\mathrm{Rb}) \times [\exp(\lambda t) - 1]$$

On a donc, en divisant par le nombre d'atomes de strontium-86 présents dans l'échantillon actuellement, la relation :

$$\left(\frac{N^{87}Sr}{N^{86}Sr}\right)_{mesuré} = [\exp(\lambda t) - 1]\left(\frac{N^{87}Sr}{N^{86}Sr}\right)_{mesuré} + \left(\frac{N^{87}Sr}{N^{86}Sr}\right)_{initial} \quad (2)$$

On reporte les valeurs mesurées à l'instant t (actuel) pour les rapports isotopiques dans différents minéraux dans un plan de coordonnées $\{x = N(^{87}\mathrm{Rb})/N(^{86}\mathrm{Sr})$, $y = N(^{87}\mathrm{Sr})/N(^{86}\mathrm{Sr})\}$. L'équation ci-dessus est celle d'une droite, de pente $\exp(\lambda t) - 1$.

Pour pouvoir tracer la droite, et en déduire l'âge t de la cristallisation de la roche, il est nécessaire d'avoir au moins deux échantillons. Les abondances sont déterminées par spectrométrie de masse. Les points expérimentaux s'alignent sur une droite (voir les étoiles dans la figure 2) dont l'extrapolation à l'origine donne le rapport isotopique $N(^{87}Sr)/N(^{86}Sr)$ à l'instant initial de formation (fermeture) de la roche.

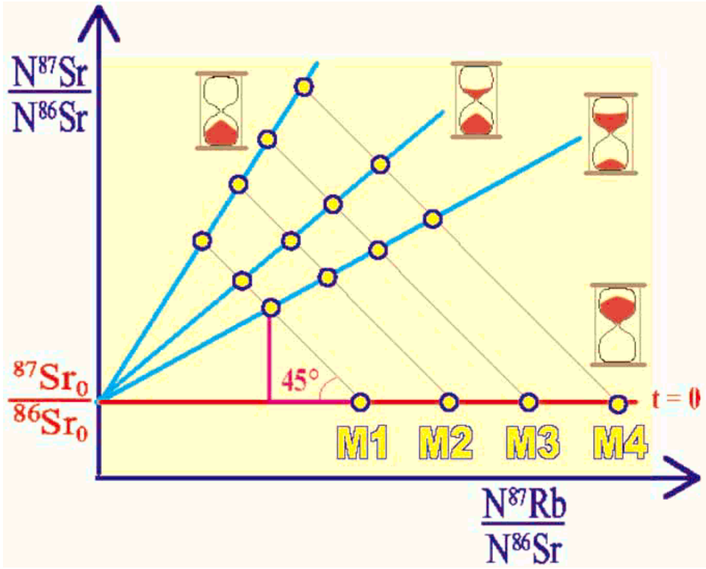


Figure 3

Remarque – La pente de la droite, $\exp(\lambda t) - 1$, augmente au cours du temps. Elle est nulle à $t = 0$. Lorsque le temps s'écoule, la droite pivote autour de l'ordonnée à l'origine. Si l'on choisit les mêmes unités en abscisse et en ordonnée, les points représentatifs des différents échantillons décrivent des segments de droite à 45°, car à chaque fois qu'un noyau de rubidium-87 se désintègre, il apparaît un noyau de strontium-87 (voir figure 3).

La formule (2), qui permet d'obtenir l'âge du Système solaire, est d'une étonnante simplicité : quelques mesures de rapports isotopiques, le tracer d'une droite, et l'âge en découle. Cette simplicité remarquable est à mettre en regard de la somme de connaissances que la formule représente.

Il existe de nombreux autres couples d'isotopes utilisés pour la radio-chronologie. Sans être exhaustif, on peut citer le potassium-40 (radioactif β^+) qui se désintègre en argon-40 avec une demi-vie de $1{,}2 \times 10^9$ ans.

L'uranium-238 et l'uranium-235, dont les demi-vies sont respectivement de $4{,}5 \times 10^9$ et $0{,}7 \times 10^9$ années, sont chacun à l'origine d'une « famille radioactive » qui se termine pour l'une avec le plomb-206, pour l'autre avec le plomb-207, deux isotopes stables. Celle du thorium-232, dont la demi-vie est de 14×10^9 années, se termine également avec le plomb-208.

À cause de l'altération et de la tectonique des plaques, il n'existe plus aucune roche dont l'origine soit contemporaine de la formation de la Terre et les roches terrestres les plus vieilles datent de 4,1 milliards d'années. Cependant, grâce aux chutes de météorites et aux missions spatiales Apollo, nous disposons d'abondants échantillons planétaires (Lune, Mars, Vesta) qui permettent de dater le Système solaire avec précision. Les âges déterminés à partir de la datation des météorites sont remarquablement cohérents, d'une méthode de datation à l'autre, autour de la valeur de 4,56 milliards d'années.

Complément : une introduction de la fonction exponentielle

Partie I : Existence d'une solution de l'équation $f' = f$ vérifiant $f(0) = 1$.

Théorème : L'équation différentielle $f' = f$ admet une solution prenant la valeur 1 en 0.
La démonstration de ce théorème repose, pour x fixé, sur la fabrication de deux suites adjacentes, l'une croissante, $(u_n(x))$, l'autre décroissante, $(v_n(x))$, dont la limite commune définit une fonction vérifiant l'équation différentielle. La suite $(u_n(x))$ apparaît lors de l'application de la méthode d'Euler à $f' = f$.

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ et } v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Les démonstrations qui suivent font appel à la propriété $\mathbb{P}$ suivante :

$\mathbb{P}$: pour tout réel $x > -1$ et tout entier naturel n, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Cette propriété $\mathbb{P}$ se démontre soit par récurrence, soit en étudiant la fonction de $(1 + x)^n - nx$ et en montrant que ses valeurs sont toujours supérieures à 1.
On considérera des valeurs de n supérieures à $|x|$.

Pour tout x, la suite $(u_n(x))$ est croissante.
Comme :

$u_{n+1}(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ et $1 + \dfrac{x}{n+1} = 1 + \dfrac{x}{n} - \dfrac{x}{n(n+1)}$, on obtient en reportant :

$$u_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}\left[1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right]^{n+1} \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1 - \frac{x}{n\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\left(1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n}\right) = u_n(x)$$

l'inégalité étant obtenue par application de la propriété $\mathbb{P}$. D'où $u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$.

Pour tout x, la suite $(v_n(x))$ est décroissante.
On a : $1/v_n(x) = u_n(-x)$; la suite $(u_n(-x))$ étant croissante à partir d'un certain rang, la suite $(v_n(x))$ est décroissante.

Les suites $u_n(x)$ et $v_n(x)$ sont adjacentes.
En effet, $\dfrac{u_n(x)}{v_n(x)} = \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \dfrac{x^2}{n}$ (voir la propriété $\mathbb{P}$), d'où : $1 - \dfrac{x^2}{n} \leq \dfrac{u_n(x)}{v_n(x)} \leq 1.$
Donc : $0 < v_n(x) - u_n(x) < [v_n(x)]x^2/n$, et $(u_n(x) - v_n(x))$ tend vers 0.
Les deux suites ont donc même limite.
On note exp la fonction qui à x fait correspondre la limite commune des suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$.
On a $\exp(0) = 1$.
Il reste à étudier la dérivée de cette fonction ; pour cela, étudions la limite du rapport $\dfrac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h}$ lorsque h tend vers 0, x étant fixé, et montrons qu'elle est égale à $\exp(x)$.
L'idée est de faire apparaître $\exp(x)$ dans $\exp(x + h)$, et pour cela d'écrire :

$$\left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\left[1 + \frac{h}{n\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right]^n$$

On suppose $|h| < 1$ et $n + x > 1$. En utilisant la propriété $\mathbb{P}$, on a $\left(1 + \dfrac{x+h}{n}\right)^n \geq \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n\left(1 + \dfrac{h}{1 + \frac{x}{n}}\right)$,

soit, en passant à la limite : $\exp(x + h) \geq \exp(x)(1 + h)$.
On change h en $-h$, puis x en $x + h$. Il vient : $\exp(x + h) \leqslant \dfrac{\exp(x)}{1-h}$.

La combinaison des deux inégalités permet d'écrire :

– pour $h > 0$: $\exp(x) \leqslant \dfrac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} \leqslant \dfrac{\exp(x)}{1-h}$.

– pour $h < 0$: $\dfrac{\exp(x)}{1-h} \leqslant \dfrac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} \leqslant \exp(x)$.

d'où le résultat annoncé en passant à la limite pour h tendant vers 0.

Partie II : Quelques propriétés

Soit φ une fonction vérifiant $\varphi' = \varphi$ et $\varphi(0) = 1$. D'après le paragraphe précédent, il en existe au moins une.

Propriété 1 : La fonction φ ne s'annule pas.
Soit F la fonction définie par $F(x) = \varphi(x)\varphi(-x)$. Sa dérivée est nulle en tout point, car $\varphi' = \varphi$. F est donc constante et vaut toujours 1, qui est la valeur de φ en 0. D'où le résultat.
De plus, $\varphi(-x) = 1/\varphi(x)$.

Propriété 2 : Soient a et λ deux réels. Il existe une solution et une seule de l'équation $f' = \lambda f$ vérifiant la condition initiale $f(0) = a$.
La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = a\varphi(\lambda x)$ satisfait les deux propriétés. Supposons qu'il existe une autre fonction g qui les satisfasse également. Formons $F(x) = g(x)\varphi(-\lambda x)$. On vérifie que $F'(x) = 0$, donc F est constante. Comme $F(0) = a$, on a $F(x) = a$. D'où $g(x) = a/\varphi(-\lambda x) = a\varphi(\lambda x) = f(x)$.
En prenant $\lambda = 1$ et $a = 1$, on voit qu'il n'existe qu'une seule fonction égale à sa dérivée et prenant la valeur 1 en 0. C'est donc la fonction exp.

Propriété 3 : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
i) il existe une constante λ telle que f vérifie $f' = \lambda f$;
ii) pour tous réels a et b : $f(a + b) = f(a)f(b)$.
Montrons que (i) implique (ii).
Soit g définie par $g(x) = f(a + x)$; g vérifie $g' = \lambda g$ et $g(0) = f(a)$.
Soit h définie par $h(x) = f(a)f(x)$; h vérifie $h' = \lambda h$ et $h(0) = f(a)$;
D'après la propriété 2, les deux fonctions g et h sont égales.
Montrons que (ii) implique (i).
On a $f(a + x) = f(a)f(x)$; en dérivant par rapport à x, on trouve $f'(a + x) = f'(a)f'(x)$; en prenant $x = 0$ dans cette dernière égalité, on trouve que, pour tout a, $f'(a) = \lambda f(a)$, soit $f' = \lambda f$, avec $\lambda = f'(0)$.

Corollaire : Pour tout nombre réel x, $\varphi(x) > 0$.
On sait déjà que φ ne s'annule pas. Le résultat découle alors de : $\varphi(x) = \varphi(x/2 + x/2) = \varphi(x/2)^2$
Une notation pour la fonction exponentielle (fonction exp).
On montre par récurrence en utilisant la propriété 3 ci-dessus que pour tout nombre a et tout entier (positif ou négatif) n :

$$\exp(an) = (\exp(a))^n.$$

On convient de noter e le nombre exp(1). On peut alors écrire $\exp(n) = \mathrm{e}^n$. La fonction exponentielle prolonge à $\mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$n \mapsto \exp(n)$$

et garde la propriété de transformer une somme en produit. On convient d'écrire, pour tout réel x :

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x.$$

On remarque que, la fonction $x \mapsto e^x$ étant strictement positive, sa dérivée est partout strictement positive, d'où $e > 1$. Une valeur approchée de $e = \lim(1 + 1/n)^n$ est 2,7182818284590452353.

Classe terminale de la série économique et sociale

Orientations générales

Les enjeux de la classe terminale

La classe terminale marque la fin des études secondaires et, à travers l'examen du baccalauréat, ouvre la voie aux études supérieures ; ces deux aspects marquent profondément les pratiques des enseignants et des élèves. Ils entraînent des contraintes inévitables et des points de vue divers, avec lesquels il faut composer.

Un enseignement cohérent sur le cycle terminal

Les deux programmes du cycle terminal ES ne peuvent être lus indépendamment l'un de l'autre. C'est sur les deux ans que la plupart des notions sont à construire et à installer. Un travail essentiel a été fait en première : on y a introduit des concepts fondamentaux (probabilités, dérivation, suites pour la partie obligatoire ; calcul matriciel et géométrie dans l'espace pour la partie optionnelle). On revient sur ces concepts en terminale et on les met en œuvre dans des contextes plus larges : ainsi du concept de dérivée qui s'enrichit de celui de primitive. Cette vision du programme sur les deux années peut aider chaque enseignant dans le choix des exercices ou problèmes à traiter prioritairement avec ses élèves.
On aura le souci d'avancer dans la découverte des nouveaux concepts malgré la moindre technicité calculatoire que l'on peut observer chez bon nombre d'élèves. Cependant, la maîtrise du calcul élémentaire reste un objectif de base de l'enseignement des mathématiques et c'est cette maîtrise qui donne l'aisance indispensable à la bonne compréhension et au traitement efficace d'un problème ; elle libère la pensée et procure confiance en soi.
La mémorisation de certaines formules est donc nécessaire au développement de l'intelligence du calcul : ainsi, comment aurait-on l'idée de retrouver dans une expression la forme $a^2 - b^2$ pour la factoriser si on ne connaît pas la formule $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$?
L'acquisition de réflexes doit cependant être reliée à la compréhension du calcul et répondre à un besoin avéré, y compris sur le long terme. La compréhension des méthodes importe d'autant plus qu'à un certain niveau d'études (et peut-être dans un futur proche pour l'enseignement secondaire), les outils de calcul formel permettent d'aborder des situations calculatoires demandant une plus grande technicité ou de déléguer à la machine la réalisation de tâches techniques longues. Dans l'immédiat, les éventuels manques techniques ne doivent pas empêcher de progresser dans l'étude d'objets nouveaux ; cette étude peut au contraire inciter à combler ces manques.

Exemples

Comme il est dit plus bas, l'entraînement à l'étude de fonctions permet d'acquérir de nouveaux outils de lecture de l'information. On est alors amené à proposer aux élèves des exercices plus ou moins élémentaires sur les fonctions ; on s'interrogera à chaque fois sur l'objectif visé.
1) Soient g et h les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ et $h(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{x^2 - 1}{2x}$.
L'étude de f met en œuvre des calculs de limites, une recherche d'asymptote, un calcul de dérivée (puis une recherche du signe de cette dérivée grâce à l'étude d'une fonction auxiliaire), un calcul de valeurs, etc. L'étude complète d'une telle fonction peut avoir sa place lors d'une recherche commune guidée ou dans le cadre d'un devoir à la maison : chaque élève a alors la possibilité de garder une vision globale

de l'étude en cours. On peut, par contre, s'interroger sur sa place dans le cadre d'un devoir surveillé, en raison de l'accumulation de difficultés calculatoires.
L'étude de g et h, facile à motiver par la recherche du comportement du produit et de la somme de deux fonctions bien connues, évite les pièges de calculs compliqués et trouve toute sa place lors d'une évaluation.

Formation générale et/ou préparation à l'examen

L'enseignement de la classe terminale ne se réduit pas à la préparation de l'examen du baccalauréat : nous le rappelons ici avec force. L'objectif est la formation des élèves : une formation aussi complète et solide que possible, dans un cadre établi par le législateur et préparant l'avenir tant de l'individu qui reçoit cette formation que de la société qui l'a définie. De nombreux aspects de cette formation sont difficiles à prendre en compte lors de l'examen final du baccalauréat ; ils ne sont pas pour autant à négliger.
Dans la pratique, l'examen du baccalauréat motive fortement un grand nombre d'élèves en donnant une échéance visible à leur travail scolaire. Il paraît donc judicieux, en dépit de ses aspects inévitablement codifiés, d'en user comme d'un levier pour le travail intellectuel. L'art de l'enseignant reste, comme par le passé, de résoudre des oppositions, de parfois contraindre pour ensuite convaincre ou tout au moins obtenir l'adhésion, de conjuguer au mieux l'entraînement à une épreuve clairement identifiée et le développement harmonieux de capacités intellectuelles.
« Faire » des problèmes de baccalauréat demeure un entraînement naturel, qu'on ne saurait éliminer ; travailler sur des annales permet de se situer par rapport à cette épreuve. Les contraintes de l'examen national conduisent souvent à des énoncés amputés de tout aspect heuristique : ces énoncés n'aident pas à comprendre le sens des mathématiques. Durant l'année, on n'hésitera pas à en réécrire certains pour en relever l'intérêt mathématique.

Quel enseignement mathématique dans la série ES ?

Deux orientations essentielles sont fixées par le programme à l'enseignement des mathématiques en série ES : « entraînement à la lecture active de l'information et à son traitement » et « initiation à la pratique d'une démarche scientifique globale ».

Entraînement à la lecture active de l'information et à son traitement

Savoir lire l'information suppose de maîtriser quelques outils de base : les élèves doivent connaître ces outils, comprendre leur pertinence et leur efficacité pour répondre aux questions posées. La plupart des notions au programme relèvent de cette ambition : calcul intégral et nouvelles fonctions, ajustement linéaire par moindres carrés, lois de probabilité et conditionnement, graphes et suites… toutes ces notions permettront aux élèves de cette série d'aborder une lecture puis un traitement scientifique de l'information à laquelle ils seront par la suite confrontés.
Il ne s'agit pas, en terminale, de laisser les élèves seuls face à une information brute ; les questions à poser puis l'interprétation des réponses relèvent le plus souvent de domaines extérieurs aux mathématiques : on pourra sur ce sujet mener avec profit un travail conjoint avec d'autres disciplines (sciences économiques et sociales, histoire et géographie en particulier). En l'absence d'un tel travail, on en restera à un questionnement de type mathématique.
L'exemple que l'on trouvera plus loin relatif au calcul de l'impôt relève d'une autre problématique : l'information de départ est donnée en termes mathématiques ; le professeur de mathématiques est donc tout à fait dans son rôle en aidant les élèves à décoder et comprendre cette information.

Initiation à la pratique d'une démarche scientifique

De nombreux éléments participent à la définition de ce que l'on appelle « une démarche scientifique ». On mettra plus particulièrement en avant les trois aspects suivants :

Expérimenter

Contrairement à une opinion fortement répandue, les mathématiques comportent une dimension expérimentale qu'il convient de valoriser auprès des élèves. Cette expérimentation sera avant tout graphique et numérique. Elle pourra précéder la mise en place de certains résultats.

> Ainsi, l'observation du graphe de la fonction logarithme, avec sa pente de moins en moins forte quand x croît, amène à comparer $\ln x$ et $\sqrt{x}$; d'où l'on déduit la règle de comparaison de $\ln x$ et x.

Elle pourra aider à retrouver certains résultats.

> Ainsi de la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en 0 : une expérimentation numérique avec $x = 10^{-6}$ par exemple donne la valeur $-6\ln 10 \times 10^6$. Cela suggère une limite égale à $-\infty$; la mise sous la forme $\ln x \times \frac{1}{x}$ permet ensuite de conclure avec les règles opératoires du cours.

On incitera donc les élèves à se confronter régulièrement au numérique : ils y acquerront une habitude des nombres et des ordres de grandeur précieuse pour la suite de leurs études, ainsi qu'un support à l'abstraction indispensable pour beaucoup d'entre eux.

On donnera à ces phases expérimentales la place qui leur revient. Expérimenter rend plausible un résultat, mais ne le démontre pas : on peut conjecturer que la limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (dont on ne sait au départ si elle existe) est finie. Cette distinction entre le plausible et le démontré est fondamentale, mais elle ne prend tout son sens qu'avec un exemple où une expérimentation numérique rend plausible un résultat faux.

Démontrer

Il importe que les élèves aient compris le rôle caractéristique de la démonstration en mathématiques : on repèrera quelques endroits du cours où ce rôle sera mis en avant (propriétés du logarithme ou de l'exponentielle par exemple). Mais on n'oubliera pas que la démonstration est toujours un compromis ; le souci de démontrer le cédera parfois devant le souci d'expliquer.

> La mise en place de la relation fonctionnelle de la fonction logarithme peut se faire de façon analytique ou de façon géométrique : cette seconde méthode, évoquée plus bas, amène à privilégier un point de vue explicatif particulièrement convaincant; il serait dommage de le refuser parce qu'il ne se prête pas à une formalisation rigoureuse à ce niveau. Une fois cette relation établie, on peut alors démontrer avec rigueur les propriétés qui s'en déduisent.
> On expliquera de même le lien entre la moyenne empirique et l'espérance mathématique, sans se préoccuper du mode de convergence en jeu : quand les f_i « tendent » vers les p_i, la moyenne $\sum_i f_i x_i$ « tend » vers l'espérance $\sum_i p_i x_i$.

Communiquer

Il s'agit ici avant tout de rendre les élèves capables de produire un texte clair, précis et logiquement articulé. Ils s'entraîneront à contrôler la cohérence et la logique de leur propos : corriger une contradiction flagrante (par exemple entre une flèche montante dans un tableau de variations et une limite égale à $-\infty$), repérer l'argument fondamental ou l'étape clé d'un raisonnement sont ici des compétences fondamentales.
Le travail fait en mathématiques aide à la maîtrise de la langue française et on évitera les lignes de calcul sans aucune explication ; on entraînera les élèves à user correctement de liens de langage *(car, or, d'où, donc, on en déduit que, il s'ensuit que…)* qui éclairent la logique du discours tenu.

Organisation du travail des élèves

Le programme n'impose aucune progression pédagogique. Il n'est pas écrit de façon linéaire : on ne peut donc pas bâtir un cours en partant de la première ligne du programme et en continuant jusqu'à la dernière.
Des indications globales de durée sont données pour chacun des deux grands titres : environ 18 semaines pour l'analyse et 12 semaines pour la statistique et les probabilités.
Rappelons, comme cela a déjà été fait dans le document de première, que l'efficacité de l'enseignement est à optimiser en jouant sur les divers temps du travail des élèves, en classe entière ou en travail personnel : les autres paragraphes de ce document, ainsi que le paragraphe 3 du programme de première, donnent des pistes pour adapter des activités à ces divers temps.

Analyse

Fonctions numériques

Les fonctions que les élèves de terminale ES sont susceptibles de rencontrer sont continues par morceaux, et même, le plus souvent, continues. L'aspect graphique est à privilégier puisque l'une des idées qui président à l'élaboration du programme est « l'entraînement à la lecture active de l'information et à son traitement », et que l'interprétation raisonnée d'un graphique fait partie de cet entraînement. On pourra donc s'appuyer sur une conception intuitive de la continuité, comme celle qui consiste à dire qu'une fonction est continue quand on peut tracer son graphe sans lever le crayon. Cela étant, il est souhaitable de faire comprendre aux élèves que cette approche atteint très rapidement ses limites : d'une part, le tracé du graphe d'une fonction est *en fait* impraticable, sinon pour des fonctions très simples et sur des intervalles assez petits (comment envisager, par exemple, un graphe lisible de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[-20, 20]$?); d'autre part, les fonctions de plusieurs variables (que de nombreux élèves utiliseront dans la suite de leurs études) ne se prêtent absolument pas à cette approche puisque leur graphe se trouve dans un espace de dimension supérieure à deux. Ces obstacles, sur lesquels il ne faut pas trop insister, permettront d'attirer l'attention sur le fait que cette description graphique de la continuité n'est pas une définition mathématique et qu'on aurait besoin de mieux pour aller plus loin.

Les élèves peuvent éprouver des difficultés à saisir la définition d'une fonction lorsque celle-ci possède une expression analytique différente sur divers intervalles. Il est pourtant essentiel qu'ils comprennent que ce peut être le cas des fonctions les plus concrètes.

Exemple : L'impôt sur le revenu en France, en 2001

Une personne seule, sans autre revenu que son salaire et ne disposant pas d'éléments menant à une réduction d'impôts, peut calculer l'impôt sur son revenu annuel net imposable à partir du tableau suivant.

Tranche de revenu (en euros)	Impôts (s = salaire annuel)
]0 ; 4121]	0
]4121 ; 8104]	0,075 s - 309,08
]8104 ; 14264]	0,21 s - 1 403,12
]14264 ; 23096]	0,31 s - 2 829,52
]23096 ; 37579]	0,41 s - 5 139,12
]37579 ; 46343]	0,4675 s - 7 299,91
>46343	0,5275 s - 10 080,49

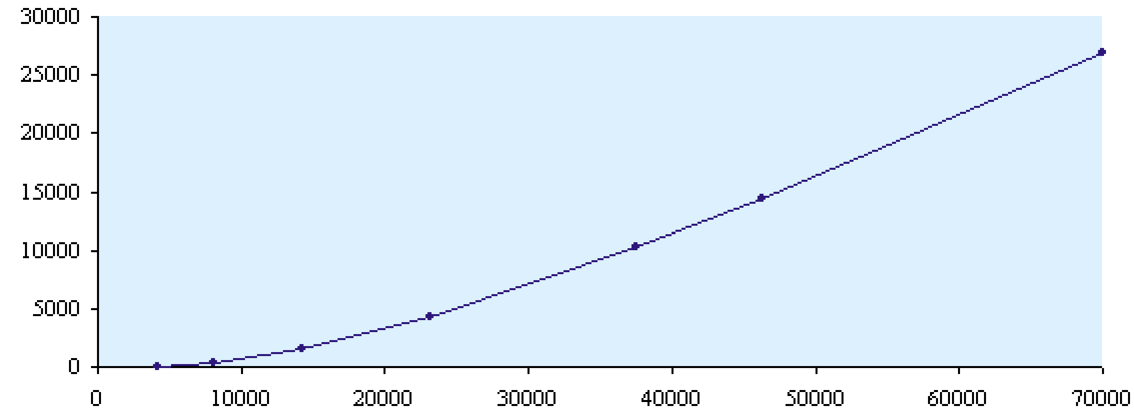
Les questions ci-dessous peuvent être posées aux élèves afin de les amener à comprendre ce tableau.

1) Est-il juste de dire, pour un salaire annuel de 18 000 €, que les impôts se décomposent ainsi :

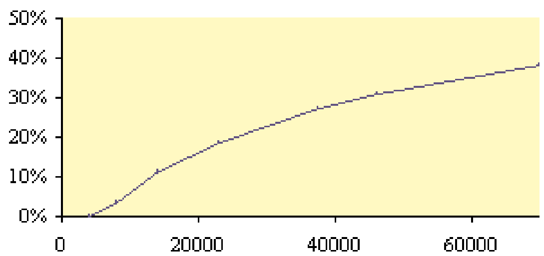
Il n'y a pas d'impôts sur les premiers 4 121 €, l'impôt est de 7,5 % sur les 3 983 € suivants, puis de 21 % sur les 6 160 € suivants, puis de 31 % sur le reste.

2) On propose à quelqu'un gagnant annuellement 46 000 € une augmentation de son salaire annuel de 500 €. De quelle augmentation bénéficiera-t-il après déduction de l'impôt ?

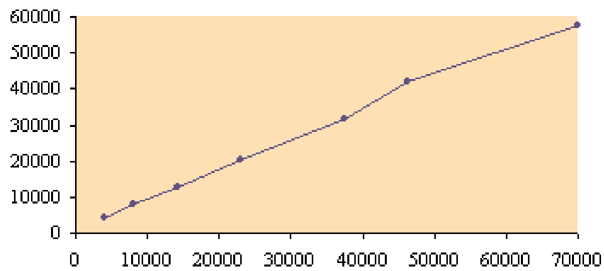
On appelle taux marginal d'imposition, à un niveau s de salaire, l'augmentation d'impôt due à une augmentation de 1 € du salaire. Déterminer la fonction qui à un salaire s associe le taux marginal.
3) Quel est le plus petit salaire tel que le pourcentage du salaire prélevé par l'impôt sur le revenu total soit supérieur à 30 % ? Ce pourcentage peut-il dépasser 50 % ?
4) Dupond dit à Dupont :
« Mon salaire est supérieur au tien, mais après déduction des impôts, je gagne finalement moins. »
Réponse de Dupont : « C'est impossible, le salaire impôt déduit est une fonction croissante du salaire initial. » Qu'en pensez-vous ? (On pourra définir la fonction g qui à un salaire mensuel s fait correspondre le salaire qui reste après déduction des impôts et tracer sa courbe représentative pour s compris entre 0 et 70 000 €.)
5) Tracer la courbe donnant le pourcentage du salaire qui est donné aux impôts, pour un salaire annuel entre 0 et 30 000 €.
6) Soit $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 4121\ldots$, $\alpha_7 = 46343$ et $\alpha_8 = 10^{99}$, $t_1 = 0$, $t_2 = 0{,}075\ldots$, $t_7 = 0{,}5275$ et $d_k = t_k(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$. La formule suivante donnant l'impôt d payé pour un salaire s situé dans la tranche $T_i =]\,\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ est-elle correcte ?
$d = t_i(s - \alpha_i) + d_1 + \ldots + d_{i-1}$



impôt en fonction du revenu net imposable



variation du taux global d'imposition en fonction du revenu net imposable



revenu impôt déduit en fonction du revenu net imposable

Limites

Le concept de limite pourra lui aussi être abordé de façon intuitive et expérimentale, par l'utilisation de la calculatrice ou du tableur. Il est cependant important que les élèves comprennent la motivation essentielle du concept à ce niveau, à savoir la définition de la dérivée en un point comme limite des accroissements moyens et son interprétation géométrique qui fait apparaître la tangente comme « limite » des sécantes. Il est clair que les élèves seront amenés à étudier des fonctions à l'aide de leur tableau de variation, et il faut qu'ils comprennent alors ce qu'ils font, et pourquoi. L'accroissement relatif est une notion qu'ils doivent mettre en relation avec la notion familière de pourcentage ; pour éviter une confusion possible avec les fréquences et les probabilités, il convient de leur rappeler qu'un pourcentage peut être supérieur à 100 %, comme dans le cas d'une inflation galopante, et peut également être négatif.

Certaines situations pourront conduire à l'étude de limites non triviales.

Ainsi, un travail sur les intérêts composés amènera naturellement à étudier la limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Cette étude pourra faire l'objet d'un travail expérimental sur la calculatrice et la démonstration du résultat illustre un usage de la dérivabilité des fonctions nouvelles que les élèves rencontrent.

D'un point de vue historique, il est vraisemblable qu'il s'agisse là de la plus ancienne estimation de limite sans motivation géométrique. En effet, lorsqu'un capital de C unités monétaires est investi à un taux x % par unité de temps, lorsque les intérêts sont capitalisés, c'est-à-dire incorporés au capital, n fois par unité de temps au taux $\frac{x}{n}$ dit « taux proportionnel », il vaut après une unité de temps $\mathrm{C}\left(1+\frac{x}{100n}\right)^n$.

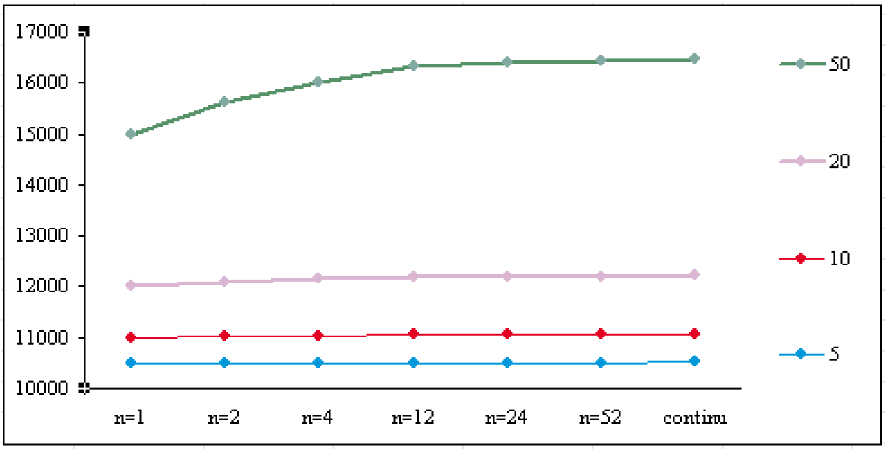
Une étude plus précise de la fonction ln permet de montrer que la suite $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est croissante, ce qui s'interprète simplement en termes d'intérêts composés par le fait qu'il est avantageux pour l'investisseur (ou le prêteur) de composer aussi souvent que possible les intérêts. Que se passe-t-il à la limite, c'est-à-dire en capitalisant « en continu » : le capital devient-il infini ? Les mathématiques sont là pour montrer que la valeur limite est $Ce^{\frac{x}{100}}$. Après t unités de temps, avec n capitalisations par unité de temps, le capital remboursé est $C_n(t) = \mathrm{C}\left(1+\frac{x}{100n}\right)^{nt}$. Lorsque les intérêts sont continûment composés, c'est-à-dire capitalisés à chaque instant, on trouve un capital limite $C(t) = Ce^{\frac{tx}{100}}$.

La position du graphe de l'exponentielle au-dessus de sa tangente en 0 illustre le fait que les intérêts simples sont moins avantageux pour l'investisseur que les intérêts composés.

Illustration numérique : On place 10 000 € à un taux x pendant un an, capitalisés n fois ou « en continu ».

(Les valeurs choisies pour n correspondent à des capitalisations par semestre, par trimestre, par mois, par quinzaine – les 1 et 16 du mois – ou par semaine.)

	x=5	x=10	x=20	x=50
n=1	10500	11000	12000	15000
n=2	10506,25	11025	12100	15625
n=4	10509,45	11038,13	12155,06	16018,07
n=12	10511,62	11047,13	12193,91	16320,94
n=24	10512,16	11049,41	12203,91	16402,73
n=52	10512,46	11050,65	12209,34	16447,88
continu	10512,71	11051,71	12214,03	16487,21



Remarque – Il est vraisemblable (bien que les textes manquent) que les banquiers, autour de l'an 1600, ont été amenés à calculer des intérêts composés sur des périodes très courtes (quotidiennement, peut-être), mais ils n'ont très probablement pas été jusqu'à considérer une limite en notre sens.

Dans les calculs ci-dessus, on prend un taux $\frac{x}{n}$ lorsqu'on capitalise n fois par unités de temps. Mais aujourd'hui, dans les banques, on ne prend pas un taux $\frac{x}{n}$ mais un taux y, dit « taux actuariel » tel que :

$$\left(1+\frac{y}{100}\right)^n = 1+\frac{x}{100}, \text{ soit } y = 100\left(\left(1+\frac{x}{100}\right)^{1/n} - 1\right).$$

On pourra faire remarquer et illustrer graphiquement que pour des petites valeurs de x, le taux actuariel y est proche de $\frac{x}{n}$.

Dérivées et primitives

Il est essentiel que les élèves puissent calculer rapidement (et sans recours à un formulaire !) les dérivées des fonctions simples, en utilisant si nécessaire la dérivation de la composée de deux fonctions. Cela leur permettra de reconnaître des dérivées et par conséquent de calculer des primitives. Ils pourront aussi constater (sur des exemples comme $1/(1 + x^2)$ ou $1/x$) que la « primitivation » est moins simple que la dérivation, ce qui peut être une occasion d'insister sur le caractère non réversible de certains algorithmes (certes, on peut marcher ou courir à reculons, mais on le fait moins facilement).

Les fonctions logarithme et exponentielle sont les nouveaux objets les plus importants que les élèves découvrent en terminale ES. Il n'est pas immédiat de comprendre le rôle central du nombre e, et il est peut-être souhaitable d'évoquer π, l'autre constante numérique que les élèves connaissent depuis longtemps, et de leur faire comprendre que ces deux nombres s'imposent à nous.

La fonction logarithme pourra être introduite par intégration de la fonction $\frac{1}{x}$. Une méthode géométrique simple établit, sans recours à un changement de variable, que la primitive F de la fonction $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 satisfait la formule fondamentale $F(ab) = F(a) + F(b)$ pour tous les réels positifs a et b (voir le document d'accompagnement de l'option de première et terminale L, p 18-19). Cette propriété justifie l'importance accordée à cette fonction ; on la notera désormais ln. On montrera que $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (on pourra par exemple, inspiré par une première représentation de ln, montrer que $\ln x$ est majorée par $\sqrt{x}$ puis que $\frac{\ln x}{x}$ est majorée par $\frac{1}{\sqrt{x}}$).

La fonction e^x est alors obtenue comme fonction réciproque de la fonction logarithme et la formule de dérivation des fonctions composées permet de calculer la dérivée de la fonction exponentielle. On définit alors, toujours par composition, l'expression $a^b = e^{b\ln(a)}$ où a est réel positif et b réel arbitraire, puis on remarque que cette fonction interpole les suites géométriques, ce qui justifie les notations du type $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ bien utiles dans les questions de dérivation et d'intégration. La limite de $\frac{\ln x}{x}$ à l'infini permet d'établir facilement les autres règles opératoires sur les limites.

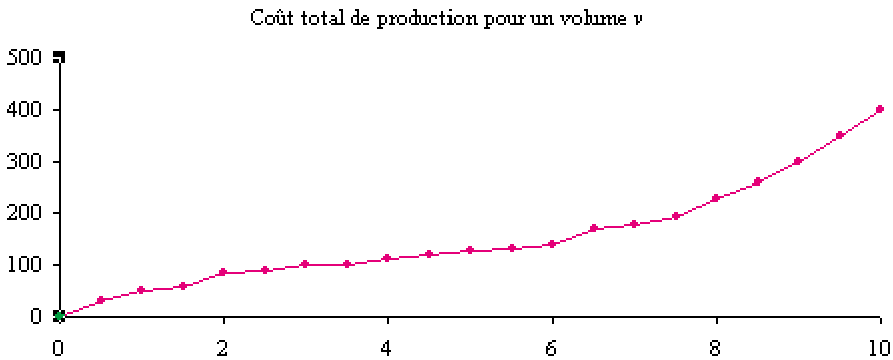
Les calculs d'aires, importants dans toute société agricole, sont aussi anciens que les mathématiques. Ils ont été théorisés par les mathématiciens grecs : ainsi, la quadrature du rectangle revient à l'obtention d'une racine carrée, cependant que la quadrature du cercle est équivalente à la construction de deux longueurs qui sont dans le rapport π. Il faut attendre le XVII[e] siècle pour que le lien soit établi, par Newton et Leibniz, entre le calcul des tangentes et celui des aires, donc dans notre langage entre le calcul différentiel et le calcul intégral, et le XXe siècle pour que le rôle de l'intégrale en probabilités soit pleinement reconnu (la relation entre probabilités et intégrale n'est pas au programme de terminale ES). Mais les élèves sont en mesure de comprendre le lien entre l'intégration et le calcul des primitives qu'elle motive, et de voir sur des exemples que l'aire sous une courbe, tout comme la valeur d'une fonction, peut représenter une grandeur. Les fonctions à intégrer seront continues par morceaux et monotones. Le choix du programme consiste à se limiter aux fonctions positives dans les calculs d'aire (les exercices nécessitant de soustraire des aires ne devront donc pas poser de problèmes de signes). On pourra approcher l'aire limitée par le graphe d'une fonction croissante continue, l'axe des abscisses et deux droites verticales par la méthode des rectangles ; une expérimentation à la calculatrice ou sur tableur conduite sur un exemple (tel ln2) pourra illustrer cette approche.

Étant donnée une fonction croissante continue, on peut faire comprendre que f est la dérivée de la fonction aire en revenant à la définition de la dérivée et par encadrement entre deux rectangles. Cette fonction aire, notée à l'aide du symbole $\int$, est donc une primitive F de f, et on a alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ pour cette primitive, et donc pour toute primitive de f puisqu'elles ne diffèrent que d'une constante additive. On peut alors énoncer (sans le démontrer) que ce résultat s'étend à toute fonction continue. Le calcul d'aires, intuitivement possible lorsqu'elles sont limitées par des graphes de fonctions continues, implique donc un résultat moins attendu, à savoir que toute fonction continue est une dérivée, et donc admet une primitive. On pourra faire remarquer que cette approche théorique ne fournit pas de méthode de calcul effectif de primitive, et qu'il s'agit là d'un vrai problème. Une fois établi le lien entre primitive et intégrale, la linéarité de l'opération de dérivation (la dérivée d'une somme est la somme des dérivées) induit la linéarité de l'intégrale, qui n'est géométriquement claire que pour des fonctions en escalier.

Coût marginal

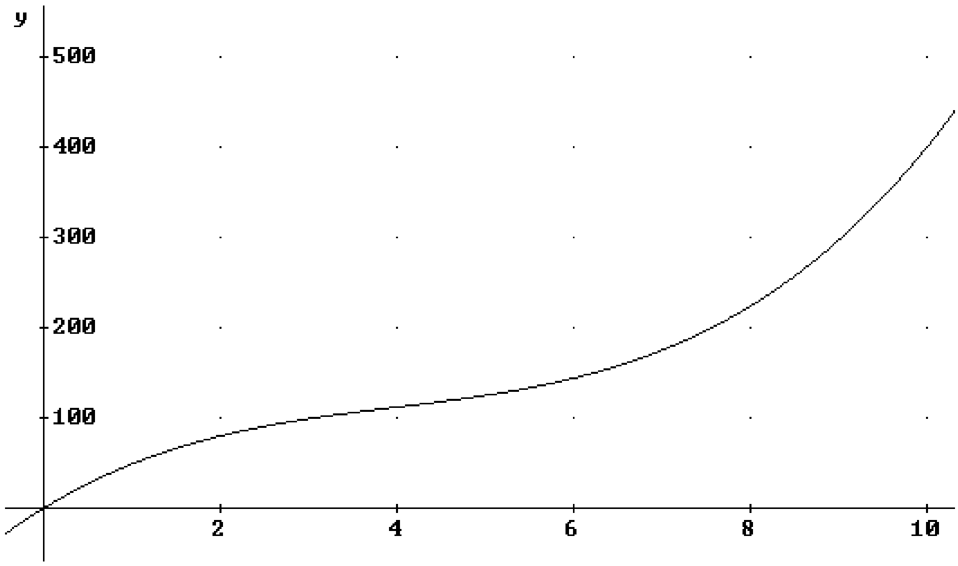
L'exemple ci-dessous illustre comment un concept (le coût marginal) utilisé dans le champ de l'économie peut s'appréhender à travers un concept mathématique (la dérivée).

> Une industrie pharmaceutique possède une machine capable de produire au maximum 10 litres par jour d'un certain médicament présenté sous forme de sirop. Pour arriver à ce résultat, la machine doit tourner à son régime maximal 24 heures sur 24. Désignons par v le volume du médicament qu'elle produit effectivement, le nombre v étant fixé pour répondre à la demande des clients. On a évidemment $v \leqslant 10$.
> Interrogeons-nous maintenant sur le coût de production du médicament : ce coût est une donnée importante pour fixer le prix de vente. Désignons par $C(v)$ le coût total de production du volume v. La figure ci-dessous donne un exemple d'une telle fonction.



Si le coût de production était proportionnel au volume produit, le graphe de la fonction serait une ligne droite passant par l'origine des coordonnées. Tel n'est pas le cas. En effet, la « pente » du graphe commence par diminuer au fur et à mesure que le volume augmente. Ceci veut dire que les premiers centilitres produits coûtent plus cher que les suivants. Un tel phénomène peut s'expliquer de diverses façons selon les cas : par exemple, la machine peut requérir une mise au point particulière au démarrage, mise au point qui intervient dans le coût des premiers centilitres produits, alors qu'une fois en régime, elle nécessite moins de présence humaine.
Par contre, au fur et à mesure qu'un plus grand volume de médicament est produit, la pente de la courbe s'accroît. Ceci veut dire que les derniers centilitres produits coûtent plus cher que les précédents. Ici aussi, diverses explications sont possibles : par exemple, pour dépasser une certaine production, il faut payer des techniciens au tarif des heures supplémentaires. Tant que le prix du centilitre produit diminue avec le volume total v, l'industriel a avantage à augmenter la production, puisque, à prix de vente constant, sa marge bénéficiaire augmente. Cependant, quand le prix du centilitre produit augmente, la marge bénéficiaire diminue. On voit pourquoi il est intéressant d'estimer, pour chaque valeur du volume produit, le prix que va coûter le centilitre supplémentaire produit au-delà de ce volume.
Pour cerner cette question mathématiquement, donnons-nous une expression algébrique de la fonction $C(v)$. La courbe de la figure ci-dessous représente la fonction C définie par :

$$C(v) = v^3 - 12v^2 + 60v, \text{ lorsque } 0 \leqslant v \leqslant 10.$$



Remarques
– De nombreuses fonctions de coût présentent cette allure : croissance rapide au début, plus lente ensuite et de nouveau croissance plus rapide. Les fonctions polynomiales sont les fonctions les plus simples pouvant avoir cette allure : c'est pourquoi dans de nombreuses situations très simplifiées, comme celle-ci, on prend pour fonction coût un polynôme du troisième degré.
– On notera que la fonction C est toujours à considérer sur un intervalle borné.
Partons d'un volume v. Un accroissement Δv du volume produit, au-delà de v, coûtera $C(v + \Delta v) - C(v)$.
Mais il est plus clair de se référer au coût moyen par unité de volume supplémentaire produit. Ce coût a pour expression :

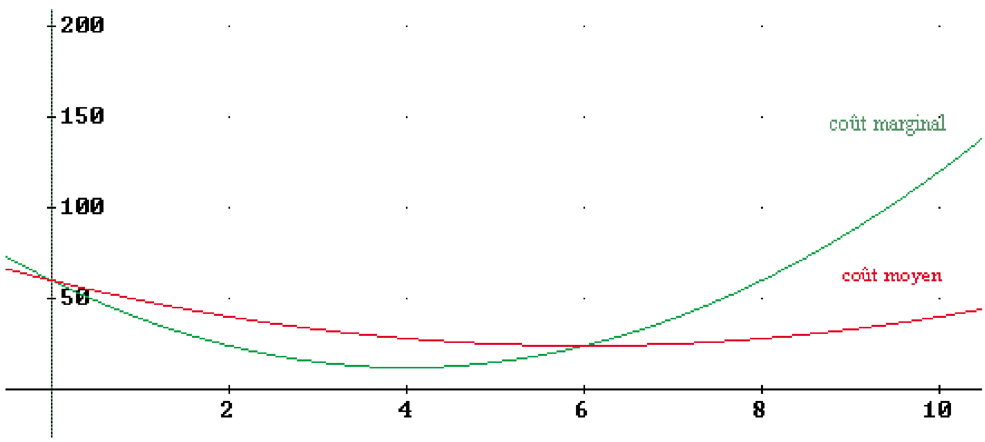
$$\frac{C(v+\Delta v)-C(v)}{\Delta v} \quad (1)$$

Passer à la limite dans cette expression conduit à la dérivée $C'(v)$.
Mais pourquoi utiliser la dérivée ? N'est-elle pas un concept trop évolué pour traiter d'une question aussi simple ? La réponse est double : premièrement, le passage à la dérivée nous libère du choix, en fait arbitraire, de la quantité Δv ; deuxième-

ment, calculer la valeur de l'expression (1) pour un Δv donné et pour diverses valeurs de v est un calcul numérique ennuyeux, alors que calculer algébriquement la dérivée de la fonction C est une chose toute simple, et qu'une fois cette dérivée calculée, on peut en obtenir commodément des expressions numériques et graphiques.
La dérivée a pour expression : $C'(v) = 3v^2 - 24v + 60$.
La dérivée s'appelle « coût marginal » du produit considéré. Revenons maintenant au point de vue de l'industriel.
La donnée de base qui lui permet d'établir le prix de vente n'est bien entendu pas le coût marginal, mais bien le coût moyen de l'unité produite. Ce coût s'exprime comme suit :

$$M(v) = \frac{C(v)}{v} = v^2 - 12v + 60$$

Les deux courbes, celle du coût marginal et celle du coût moyen, sont présentées ensemble sur la figure ci-après. On lit sur cette figure que le coût moyen passe par un minimum lorsque le coût marginal est égal au coût moyen, ce qui est assez clair si on y réfléchit quelque peu : en effet, lorsque le coût d'une unité supplémentaire produite est inférieur au coût moyen calculé jusque-là, le coût moyen diminue nécessairement ; et inversement, lorsque le coût d'une unité supplémentaire produite est plus grand que le coût moyen, celui-ci augmente.



Il est important que ces considérations heuristiques soient traduites en propriétés que l'on peut démontrer à l'intérieur du modèle choisi (faute de quoi, il conviendrait de s'interroger sur le bien-fondé des concepts introduits pour modéliser la situation en jeu).

Cherchons donc le minimum du coût moyen. La dérivée de ce coût s'écrit :

$$M'(v) = \frac{1}{v}\left(C'(v) - M(v)\right).$$

Ceci montre que $M(v)$ atteint un extremum lorsque $C'(v) = M(v)$, qui est dans notre cas un minimum.
Ce que nous venons de faire mérite un commentaire général. On peut en effet se demander si ce n'est pas mobiliser des instruments conceptuels trop évolués que de mettre en forme algébrique une fonction de coût et ensuite de la dériver.
L'argument principal nous semble être le suivant : pour quelqu'un qui a un peu l'habitude de l'algèbre et du calcul différentiel, les moyens mathématiques mobilisés s'avèrent commodes pour exprimer et comprendre les phénomènes en question. Toutefois, ce serait tout autre chose que d'analyser une situation réelle, presque nécessairement compliquée par la présence de facteurs nécessitant d'aménager le modèle idéalement simple sur lequel nous avons tablé.

Les activités présentées dans cette partie sont disponibles sur le cédérom, section « Compléments aux documents d'accompagnement ».

Enseignement de spécialité

Résolution de problèmes à l'aide de graphes

Voir l'annexe page 107.

Complément sur les suites

Les suites ont été introduites en classe de première ES pour décrire l'évolution de situations itératives simples ou de phénomènes chronologiques. L'objectif premier était de familiariser les élèves avec un nouveau concept, d'observer le comportement des premiers termes et de décrire explicitement le terme général dans le cas des suites arithmétiques ou géométriques. Le programme de terminale introduit quelques nouveaux éléments permettant d'étudier des situations plus variées.
L'intérêt de l'exemple qui suit est de réactualiser des connaissances antérieures, de rencontrer des suites du type $u_{n+1} = au_n + b$ et d'illustrer la démarche « réflexion préalable – expérimentation numérique – calculs algébriques » dont la pratique est un des objectifs du programme.

Exemple : Remboursement à mensualités constantes d'un prêt bancaire

Le calcul du remboursement d'un prêt dans le cas où il s'effectue selon des mensualités constantes pour une période donnée et pour un taux fixe est un problème classique, abordable dès la première. Nous l'abordons ici suivant trois points de vue distincts. Il peut être intéressant que des groupes d'une même classe travaillent sur des approches différentes et confrontent ensuite leurs résultats ; certains élèves peuvent être plus à l'aise avec l'un des points de vue mais trouveront aussi un intérêt à explorer les autres.
La situation traitée est la suivante :
Pour acheter un appartement, une famille a besoin d'un capital de 80 000 €. D'après l'établissement de prêt contacté, elle peut bénéficier d'un taux annuel de 5 %. Elle envisage de rembourser par mois un montant constant.
– Le montant de la mensualité peut-il être aussi petit que l'on veut ?
– Pour des mensualité de 600 € par mois, combien de temps durera le remboursement ?
Il convient, puisqu'on parle de remboursements mensuels, de se ramener à un taux mensuel τ pour les intérêts du prêt ($0 < \tau < 1$). Comme on l'a vu dans le paragraphe sur les limites, on peut utiliser un taux proportionnel égal à 0,05/12 (soit un pourcentage mensuel de 0,42 %) ou un taux actuariel égal à $1{,}05^{1/12} - 1$ (soit un pourcentage mensuel de 0,4074 %) : les calculs actuels utilisent les taux actuariels (« plus justes »), ce que nous faisons ici (soit : $\tau = 1{,}05^{1/12} - 1$).
Pour répondre à la première question, notons qu'au bout d'un mois, le capital emprunté C = 80 000 € a la valeur :

$$C_1 = (1 + \tau)C \approx 80326.$$

Le montant minimum de remboursement mensuel est de 326 €, en dessous duquel la somme à rembourser ne diminuera pas.
Pour un remboursement mensuel de valeur M = 600, le capital à rembourser va diminuer de mois en mois : le prêt est donc possible.

Première approche

(Cette activité est disponible sur le cédérom.)

Dans cette approche, inspirée par la résolution de la première question, on choisit de considérer qu'au mois p, on rembourse la totalité I_p des intérêts du capital D_{p-1} restant à rembourser, le reste de la mensualité donnant la part R_p du capital remboursé ce mois là.

Un raisonnement qualitatif préalable permet de dire qu'au début du prêt, la part des mensualités liées au remboursement des intérêts est forte : le capital à rembourser est élevé, les intérêts représentent une somme importante ; en fin d'emprunt, les intérêts ne représentent qu'un faible somme, leur part dans le remboursement devient faible.

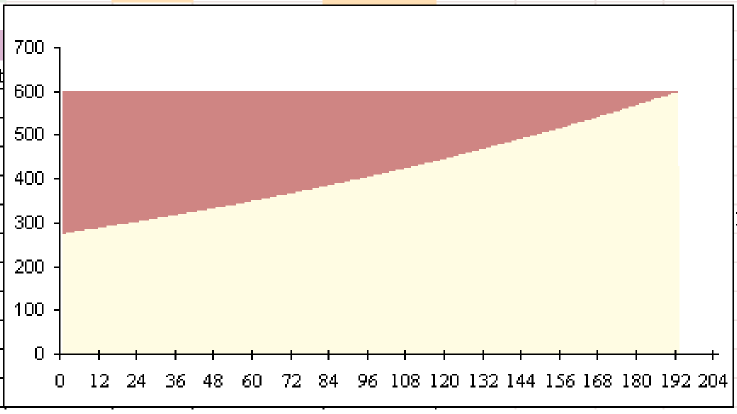
On peut établir les formules suivantes :

$$I_p = \tau \times D_{p-1} \,;\, R_p = M - I_p \,;\, D_p = D_{p-1} - R_p.$$

Ces formules permettent de mettre en œuvre des calculs itératifs, mois après mois et une représentation graphique permet de visualiser les effets annoncés.

C=	80 000 €	M=	600 €
	total intérêts	capital rembour	total remb
	35 629 €	80 000 €	115 627 €
	intérets rembou	part capital rem	capital restant
0	0	0	80 000 €
1	325,93	274,07	79725,93
2	324,81	275,19	79450,74
3	323,69	276,31	79174,44
4	322,57	277,43	78897,00
5	321,44	278,56	78618,44
6	320,30	279,70	78338,74
7	319,16	280,84	78057,90
8	318,02	281,98	77775,92
9	316,87	283,13	77492,79
10	315,72	284,28	77208,50

taux= 0,05 taux mensuel= 0,004074



On peut alors chercher à en savoir plus sur les suites étudiées, ne serait-ce qu'en vue de déterminer par une formule la durée du prêt : les banques utilisent effectivement de telles formules et ne déterminent pas cette durée graphiquement ou par des calculs itératifs. On trouve :

$$D_p = (1 + \tau)D_{p-1} - \mathrm{M} \qquad I_p = (1 + \tau)I_{p-1} - \tau M \qquad R_p = (1 + \tau)R_{p-1}$$

La durée n du prêt vérifie l'équation $\mathrm{R}_1 + \ldots + \mathrm{R}_n \approx \mathrm{C}$, soit :

$$n \approx \frac{\ln(M/(M - \tau C))}{\ln(1 + \tau)} \quad (1).$$

D'où $n = 193$ (la dernière mensualité n'est que de 426,93 €).

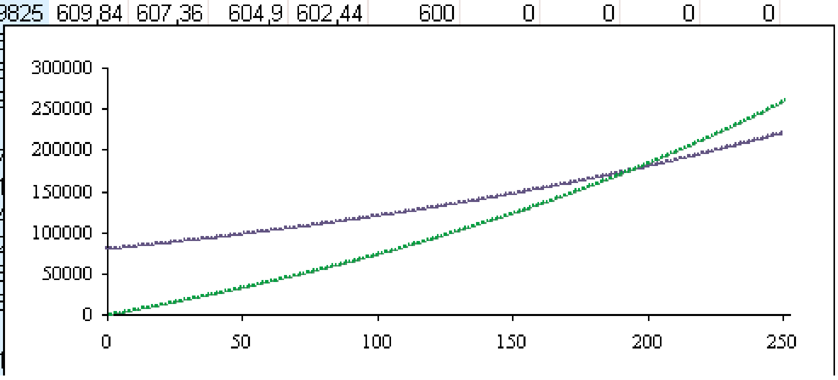
Remarque – Les suites (D_n) et (I_n) vérifient une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$; on associera à ces suites la représentation graphique des fonctions $f(x) = ax + b$ et $g(x) = x$; à titre de synthèse, on mettra en évidence la convergence ou la divergence de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = au_n + b$ suivant que $a < 1$ ou $a > 1$. L'explicitation de la suite géométrique associée confirmera l'observation graphique.

Deuxième approche

Un autre point de vue consiste à faire le raisonnement suivant : si le prêt s'arrête à n mensualités, c'est que l'ensemble des versements effectués a, en fin de remboursement, la même valeur que celle acquise par le capital emprunté. Or la valeur du capital, au bout de n mensualités, est $\mathrm{C}_n = (1 + \tau)^n\mathrm{C}$, celle du premier versement est $(1 + \tau)^{n-1}\mathrm{M}$, du deuxième $(1 + \tau)^{n-2}\mathrm{M}$, etc.

En se plaçant d'un point de vue expérimental, sur tableur, on peut observer à quel instant n la valeur actualisée de l'ensemble des versements (courbe en vert ci-dessous) égale celle du capital (courbe en bleu).

C=	80 000 €		taux=	0,05	τ=	0,004074	M=	600 €		
- €	80000									
600 €	80325,9299	600 €	0	0	0	0	0	0	0	0
1 202 €	80653,1877	602,44	600	0	0	0	0	0	0	0
1 807 €	80981,7788	604,9	602,44	600	0	0	0	0	0	0
2 415 €	81311,7085	607,36	604,9	602,44	600	0	0	0	0	0
3 025 €	81642,9825	609,84	607,36	604,9	602,44	600	0	0	0	0
3 637 €	81975,6									
4 252 €	82309,5									
4 869 €	82644,9									
5 489 €	8298									
6 111 €	83319,7									
6 736 €	83659,1									
7 364 €	84									
7 994 €	84342,2									
8 626 €	84685,8									
9 261 €	85030,8									
9 899 €	85377									
10 539 €	85725,1									



Le nombre n doit vérifier : $(1 + \tau)^n C = M((1 + \tau)^{n-1} + (1 + \tau)^{n-2} + \ldots + 1)$. On retrouve ainsi la formule (1).

Troisième approche

On considère que la p-ième mensualité M représente le remboursement d'une portion K_p du capital initial qui justement vaut M au moment de son remboursement, d'où : $K_p(1 + \tau)^p = M$.

La suite K_p est donc géométrique et on doit avoir, pour un prêt de durée n :

$K_1 + \ldots + K_n = C$. En exprimant la somme de cette suite géométrique on retrouve encore la formule (1).

Remarque – La formule (1) permet aussi de fixer la mensualité M si on fixe la durée n :

$$M = (1+\tau)^n \tau C \Big/ \left((1+\tau)^n - 1\right).$$

Suites du type $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$

On donnera quelques exemples de situations amenant à des suites définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre deux (telles la suite de Fibonacci). L'objectif est de manipuler des suites de ce type, de conclure sur leur monotonie dans des cas simples, éventuellement de poursuivre l'étude grâce aux propriétés des suites géométriques. Aucune recherche de solution générale n'est à faire.

Sur quelques exemples, on pourra introduire une écriture matricielle de la relation de récurrence – en posant $v_n = u_{n+1}$, on obtient $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ – puis utiliser les méthodes développées en première ou dans l'autre partie de cette spécialité.

Prolongement d'une suite finie

On pourra consulter le document d'accompagnement de première L à ce propos (« Analyse », terminale, paragraphe sur les suites, p. 15). Pour la suite (k) « Voir et dire », dont les premiers termes sont :

1 – 11 – 21 – 1211 – 111221 – 312211 (et non 31 21 11),

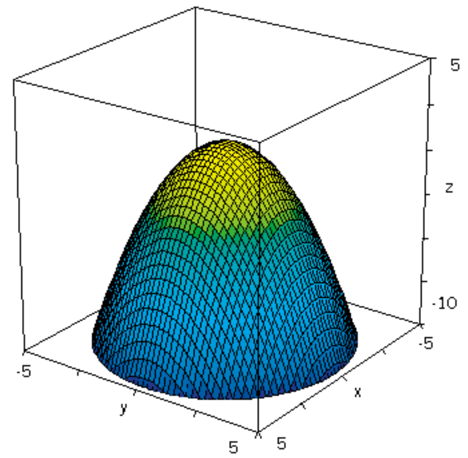
on pourra s'interroger sur la parité du nombre de chiffres ou sur le plus grand chiffre qui peut être présent dans l'écriture des termes de cette suite (et montrer que c'est le chiffre 3).

Cette suite est aussi un exemple d'algorithme simple qui permet de calculer n'importe quel terme de la suite en théorie, mais pas en pratique : en effet, le terme d'indice 77 a déjà plus d'un milliard de chiffres (voir à ce sujet *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, www.research.att.com/~njas/sequences, ou Conway J. H. et Guy R.K., « The Look and Say Sequence », dans *The Book of Numbers*, New York, Springer-Verlag, p. 208-209, 1996).

Géométrie dans l'espace

L'objectif de ce chapitre est avant tout de consolider les connaissances de première ; les élèves ont alors vu le lien entre une fonction f de deux variables x et y et la surface d'équation $z = f(x,y)$. Quelques activités élémentaires relatives aux surfaces pourront être proposées. On pourra ainsi associer une représentation dans l'espace à la résolution analytique de la recherche d'un extremum d'une fonction de deux variables sous une contrainte linéaire.

> Les exemples qui suivent privilégient un questionnement mathématique. Qu'on en reste là ou que l'on utilise des situations économiques, on entraînera toujours à une vision intuitive et on se limitera à des questions simples.
>
> 1) Le choix de cet exemple permet d'user d'un langage très intuitif ; une activité parallèle utile pourra être de faire découvrir aux élèves la forme générale des courbes de niveau d'une surface topographique autour respectivement d'un sommet, d'un fond et d'un col ou, inversement, de reconstituer, à partir d'une carte topographique, le profil de la ligne joignant deux points donnés.



Considérons la surface d'équation $z = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ (1),

associée à la fonction f des deux variables réelles x et y

définie par $f(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.

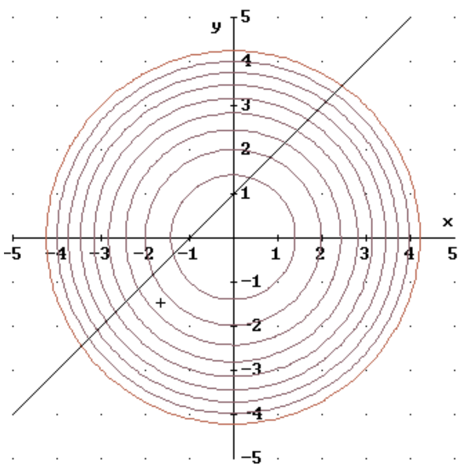
On l'a représentée ci-contre dans une « boîte » définie par :

$-5 \leqslant x \leqslant 5$

$-5 \leqslant y \leqslant 5$

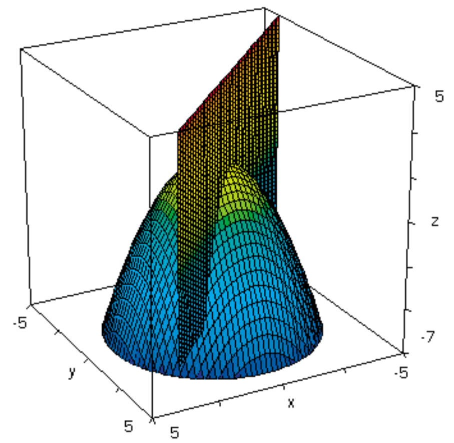
$-10 \leqslant z \leqslant 5$

Cette surface a la forme d'un dôme ayant son sommet à l'origine, à l'altitude 1.



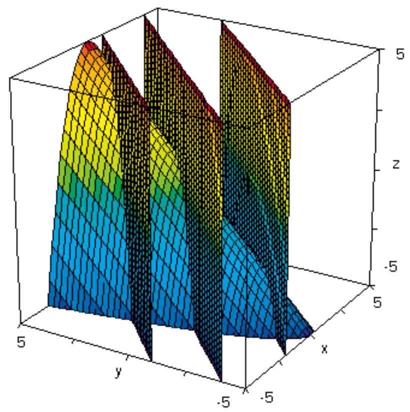
Les courbes de niveau de cette surface sont des cercles d'équations $x^2 + y^2 = 2(1 - h)$ où h représente l'altitude. La figure ci-contre montre quelques courbes de niveau de la surface (de $h = 1$ à $h = -8$).

Dès que l'on s'écarte de l'origine dans une direction quelconque, la surface descend. Elle atteint l'altitude 0 sur le cercle $x^2 + y^2 = 2$, c'est-à-dire à une distance de l'origine égale à $\sqrt{2}$. À l'extérieur de ce cercle, les altitudes deviennent négatives, et elles tendent vers $-\infty$ lorsque la distance à l'origine tend vers l'infini.
La même figure montre une droite dont l'équation dans le plan Oxy est $y = 1 + x$. Considérée dans le système d'axes (Ox,Oy,Oz), cette équation est aussi celle d'un plan vertical.

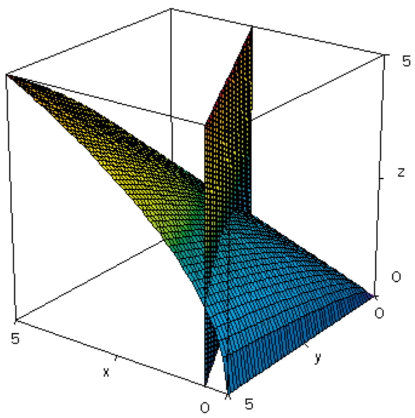


L'intersection de ce plan vertical et de la surface est comme un sentier qui commence par monter sur le dôme – sans toutefois atteindre son sommet –, avant de redescendre. Les courbes de niveau montrent où se trouve le point le plus haut de ce sentier.
Pour déterminer ce point analytiquement, remplaçons la variable y dans l'équation (1) par sa valeur $1 + x$. Nous obtenons, après calcul, $z = 1 - x - x^2$; cette équation donne l'altitude z du sentier pour chaque valeur de x.

Sous la contrainte $y = 1 + x$, on est donc ramené à la fonction altitude $1 - x - x^2$. L'altitude est maximale pour $x = -\dfrac{1}{2}$; et donc le point le plus haut de ce sentier a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4}\right)$.



2) $z = y - x^2$
Déterminer le maximum de z sous les contraintes suivantes :
$y = x + 4$
ou $y = x + 1$
ou $y = x - 3$



3) $z = \sqrt{xy}$

Déterminer le maximum de z sous la contrainte $y = -2x + 6$.

Annexe
Les graphes dans l'enseignement de spécialité

Introduction

L'introduction d'éléments de la théorie des graphes dans l'enseignement de spécialité de la classe terminale de la série ES constitue une grande nouveauté :
– pour la première fois, cette branche des mathématiques discrètes fait son entrée dans l'enseignement secondaire français ;
– le travail proposé est axé sur la seule résolution de problèmes et aucunement sur un exposé magistral.

Pourquoi introduire des éléments sur les graphes ?

Ce choix est cohérent tant avec le programme de la classe antérieure qu'avec les exigences de formation ultérieure. On trouve en effet ici quelques applications intéressantes du calcul matriciel développé dans l'option de première ES ; par ailleurs, les problèmes résolus constituent une première approche – volontairement modeste – de situations diverses (gestion de stocks, transports à coûts minimaux, recherche de fichiers dans des ordinateurs, reconnaissance de mots…) auxquelles les élèves pourront être par la suite confrontés.
Pour de nombreux lycéens, le champ mathématique se limite au calcul, à l'étude des fonctions et à la géométrie élémentaire : s'ouvrir sur la théorie des graphes, c'est s'ouvrir à de nouveaux raisonnements, c'est s'entraîner à avoir un autre regard mathématique et finalement, progresser. Enfin le travail fait sur les graphes pourra être investi dans des travaux personnels encadrés.

Pourquoi axer le travail sur la seule résolution de problèmes ?

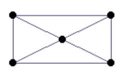
La théorie des graphes ouvre un grand champ de modélisation conduisant à des solutions efficaces pour de nombreux problèmes ; toute présentation théorique magistrale du sujet est contraire au choix fait ici. De plus, la résolution de problèmes laisse place à l'initiative des élèves, avec un temps nécessaire de tâtonnements et d'essais.
L'objectif, ici, est d'apprendre à représenter une situation à l'aide d'un graphe en se posant d'abord les questions suivantes : « Quels objets vont tenir le rôle de sommets, lesquels deviennent les arêtes ? »
Pour illustrer le type de travail à faire, on trouvera ci-dessous une liste de 25 exemples permettant de faire le tour de toutes les notions au programme. Bien entendu, cette liste ne revêt aucun caractère officiel ou obligatoire. L'optique étant la résolution de problèmes, c'est le bon usage des notions relatives aux graphes, et non la mémorisation de définitions formelles, qui est ici recherchée.
Un lexique est fourni ; sa fonction est de définir clairement les limites de cet enseignement neuf : toute notion relative à la théorie des graphes, qui ne correspondrait pas à l'un des termes du lexique, est hors programme.

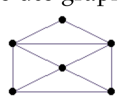
Exemples

Dans les exemples ci-dessous, on a parfois construit les graphes et donné quelques éléments de réponse afin d'avoir assez vite une idée générale de ce qui est proposé : on indique aussi les contenus illustrés ou introduits dans chacun des exemples proposés.

Les enveloppes

Peut-on parcourir une fois et une seule les arêtes des graphes ci-dessous sans lever le crayon ?



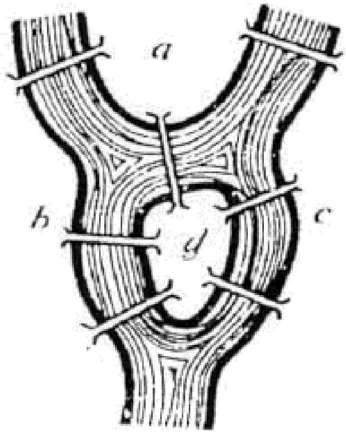


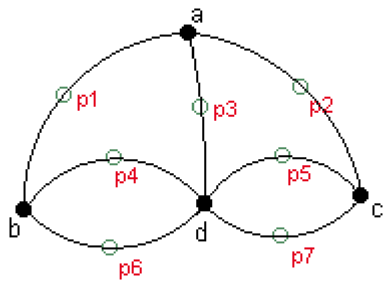
• *Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet ; chaîne eulérienne ; théorème d'Euler.*

ANNEXE

Les ponts de Königsberg

Au XVIII^e siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, région de la Russie frontalière de la Pologne et de la Lituanie) aimaient se promener le dimanche. La ville de Königsberg comprenait sept ponts, disposés selon le schéma ci-dessous. Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont. Comment faire ?

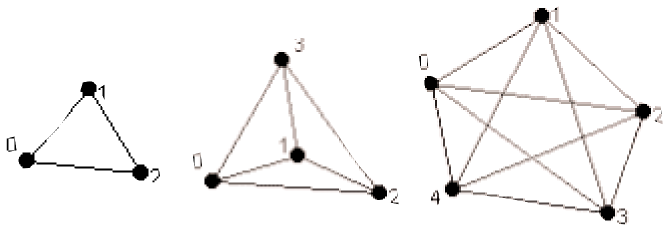




• *Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet ; cycle eulérien.*

Dominos

Peut-on aligner tous les pions d'un jeu de domino suivant la règle du domino ? On commencera par étudier la question avec un jeu dont les dominos comportent les chiffres jusqu'à n, pour $n = 2, 3, 4$.

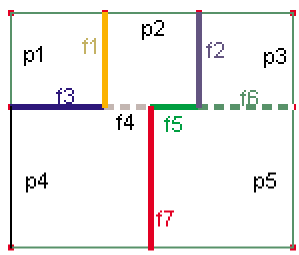


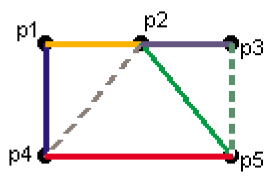
Une arête représente un domino. Il faut trouver une chaîne qui permet de parcourir toutes les arêtes une fois et une seule. On ne s'est pas occupé ici des « doubles » puisqu'on peut toujours les intercaler

• *Contenu : graphes complets ; chaînes eulériennes ; degré d'un sommet ; théorème d'Euler.*

Traversée de frontières

Cinq pays sont représentés ci-contre avec leurs frontières. Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?

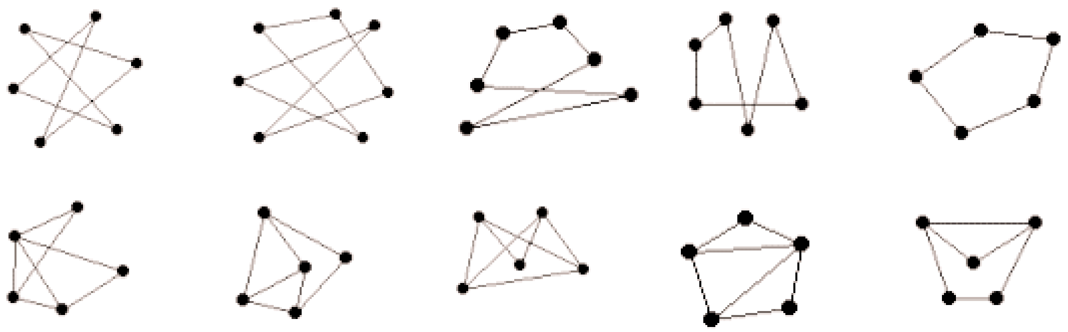




• *Contenu : chaîne eulérienne ; degré d'un sommet ; théorème d'Euler.*

Dessins de graphes

– Parmi les graphes ci-dessous, déterminer ceux qui sont susceptibles de décrire une même situation.



– Peut-on dessiner des graphes simples (pas d'arêtes dont les extrémités sont confondues et au plus une arête joignant deux sommets) dont la liste des degrés des sommets soit :

6-3-2-2 -1-1-1   7-5-3-2-2-2-2-2

• *Contenu : représentations de graphes, degrés de sommets.*

Associer un graphe à une situation

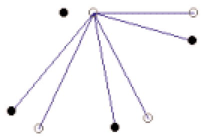
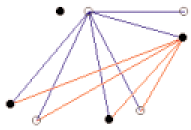
Comparer les trois graphes définis ci-dessous :
– on considère un octaèdre ; un sommet du graphe est associé à un sommet de l'octaèdre et une arête correspond à une arête de l'octaèdre ;
– on considère un cube ; un sommet du graphe est associé à une face du cube et deux sommets du graphe sont reliés par une arête si les faces correspondantes ont une arête commune ;
– les sommets du graphe sont tous les sous-ensembles à deux éléments de {1,2,3,4} ; deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide.
Représenter la situation suivante à l'aide d'un graphe : « Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays. »
• *Contenu : représentations de graphes ; sommets, sommets adjacents ; arêtes.*

Matches de football

Une ligue de football comporte cinq équipes.
– Il est décidé par le bureau de la ligue que lors d'un week-end d'entraînement, chaque équipe jouera quatre matches (deux équipes ne peuvent pas se rencontrer plus d'une fois). Comment l'organiser (chacun est libre de ses règles d'organisation) ?
– Le calendrier étant trop chargé, les organisateurs décident que chaque équipe ne jouera que trois matches. Comment l'organiser ?
• *Contenu : degré d'un sommet ; lien entre la somme des degrés des sommets et le nombre d'arêtes.*

Poignées de main

M. et Mme Euler assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance : certains participants à la réunion se saluent en se serrant la main. Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main. Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois. M. Euler constate que les sept autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts. Combien de poignées de mains M. et Mme Euler ont-ils échangé avec les autres membres de la réunion ?

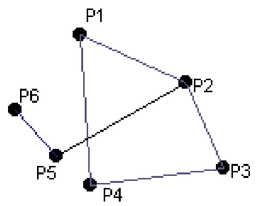
Une personne peut serrer la main d'au plus 6 autres personnes. Pour que le nombre de poignées de mains échangées soient tous distincts, il s'agit nécessairement des nombres 6, 5, 4, 3, 2, 1 et 0.	Une personne a échangé 6 poignées de main ; c'est donc son conjoint qui n'en a échangé aucune. 	Une personne échange 5 poignées de mains ; c'est donc son conjoint qui en échange une seule. 	Une des personnes des deux couples non encore considérés échange 4 poignées de main, donc son conjoint en échange 2. Que reste-t-il pour le dernier couple ?

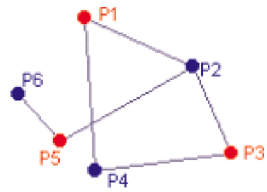
• *Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet.*

Transport de produits chimiques

On trouvera ci-contre le graphe d'incompatibilité de six produits chimiques. Quel est le nombre minimum de wagons nécessaires à leur transport ?

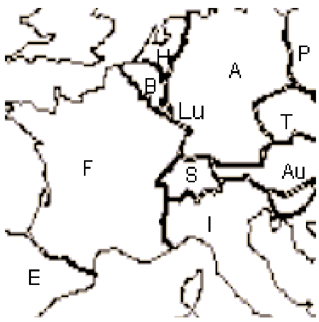
• *Contenu : nombre chromatique.*

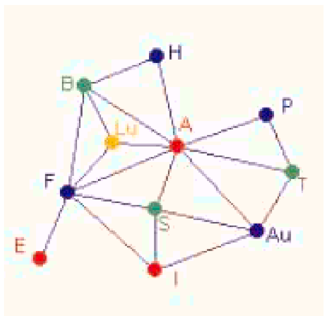




Coloration de la carte de l'Europe

On veut colorer chaque pays de la carte ci-dessous de telle sorte que deux pays voisins ne soient pas de la même couleur. Montrer qu'il faut disposer d'au moins quatre couleurs et que quatre couleurs suffisent (deux pays dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points communs ne sont pas considérés comme voisins).





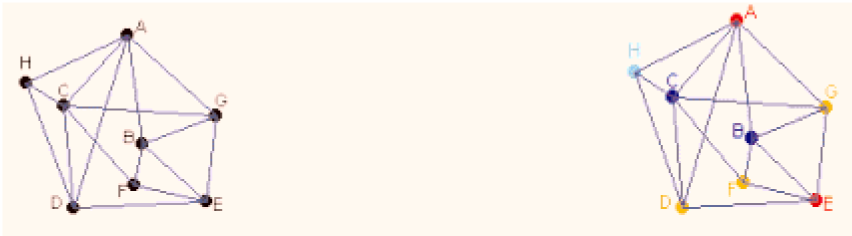
• *Contenu : sous-graphe complet ; nombre chromatique.*

Un problème d'aquariophile

A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les poissons ne peuvent cohabiter dans un même aquarium.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		×	×	×			×	×
B	×				×	×	×	
C	×		×			×	×	×
D	×		×		×			×
E		×		×		×	×	
F		×	×		×			
G	×	×	×		×			
H	×		×	×				

Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?



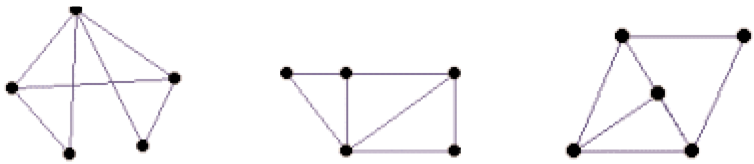
• *Contenu : matrice associée à un graphe ; sous-graphe ; graphe complet ; nombre chromatique.*

Nombre chromatique

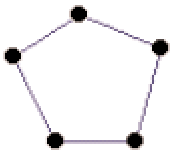
Tracer les graphes associés aux matrices ci-dessous et chercher leur nombre chromatique.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les graphes ci-dessous peuvent-ils être associés à C ?



Donner des matrices associées au graphe suivant :



• *Contenu : matrices et graphes associés ; nombre chromatique.*

Organisation d'un examen

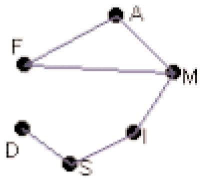
On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, six matières d'options : Français (F), Anglais (A), Mécanique (M), Dessin industriel (D), Internet(I), Sport (S) ; les profils des candidats à options multiples sont :

F, A, M D, S I, S I, M

1) Quel est le nombre maximum d'épreuves que l'on peut mettre en parallèle ?
2) Une épreuve occupe une demi-journée ; quel est le temps minimal nécessaire pour ces options ?
• *Contenu : sous-graphes ; graphe complet ; nombre chromatique.*

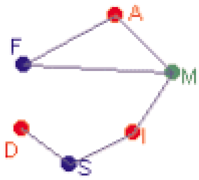
Solution

Le graphe associé à cette situation est le suivant :



Tout sous-graphe de plus de trois sommets comporte des arêtes ; deux sous-graphes d'ordre trois (de sommets respectivement A,D,I et F,D,I) n'ont pas d'arêtes : le nombre maximum d'épreuves en parallèle est trois.

Il y a un sous-graphe complet d'ordre 3 ; le nombre chromatique est au moins égal à 3 ; on voit que trois couleurs suffisent.

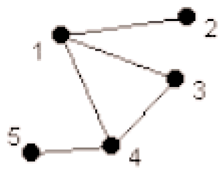


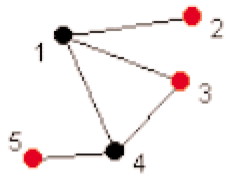
Ouverture de magasins

Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir ses magasins en nocturne avec les contraintes suivantes : les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble ; il en est de même pour les deux derniers ; au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins 1, 3, 4.
Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.
• *Contenu : sous-graphes.*

Solution

Il n'y a qu'un seul sous-graphe engendré par trois éléments et qui soit sans arêtes ; tous les sous-graphes engendrés par 4 ou 5 éléments ont des arêtes.





Puissances de la matrice associée à un graphe

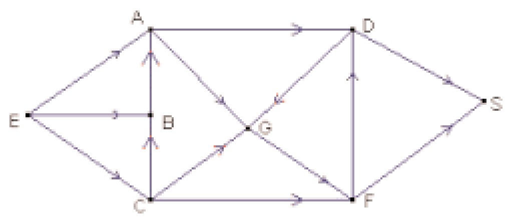
Ci-après, la matrice M est associée à un graphe orienté G qu'on représentera.
Tracer le graphe et interpréter les termes de M^2, puis de M^3.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

• *Contenu : graphe orienté ; matrice associée à un graphe orienté ; longueur d'une chaîne.*

Circuits touristiques

Pour traverser une chaîne de montagnes, il faut passer par plusieurs sommets, reliés entre eux par des voies ne pouvant être franchies que dans un seul sens. On donne ci-dessous le graphe associé à cette situation (E est le point d'entrée et S le point de sortie). L'office de tourisme cherche toutes les traversées qui partent de E et arrivent en S en 4, 5 ou 8 étapes (une étape est le passage d'un sommet à un autre, ou du départ à un sommet, ou d'un sommet à l'arrivée).



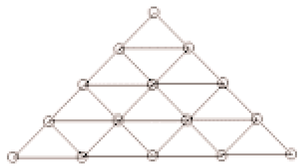
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les sommets étant classés dans l'ordre E, A, B, C, G, D, F, S, on a :
La première ligne de M^3 est : 0 1 0 0 2 2 2 2
La première ligne de M^4 est : 0 0 0 0 3 3 2 4
La première ligne de M^5 est : 0 0 0 0 3 2 3 5
La première ligne de M^7 est : 0 0 0 0 3 3 2 6
La première ligne de M^8 est : 0 0 0 0 3 2 3 5

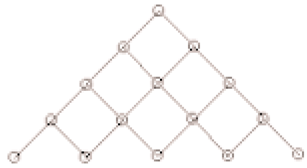
Combien de traversées peut-on faire en 4 (resp. 5) étapes ?
Trouver toutes les traversées possibles en 8 étapes.
• *Contenu : graphe orienté ; matrice associée à un graphe orienté.*

Coloration de graphes

– Montrer que le nombre chromatique du graphe (1) ci-dessous vaut 3. Pour trois couleurs données, combien y a-t-il de colorations possibles ?
– Montrer que le nombre chromatique du graphe (2) ci-dessous vaut 2.



(1)



(2)

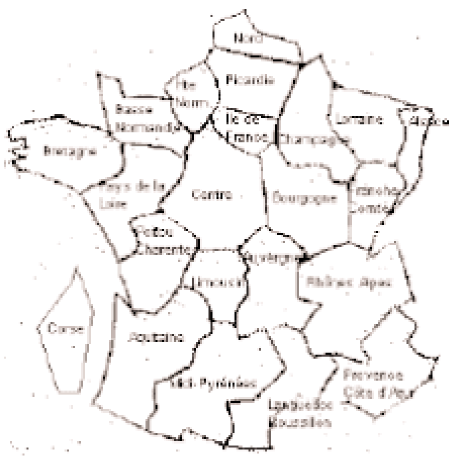
• *Contenu : nombre chromatique, sous-graphes complets.*

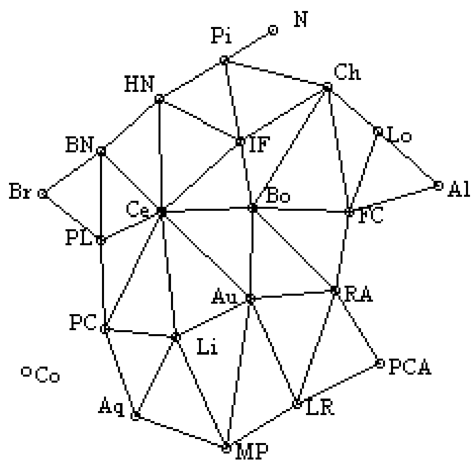
Algorithme de coloration d'un graphe

On commence par établir une liste ordonnée des sommets.
Tant qu'il reste des sommets à colorer, exécuter les actions suivantes :
– choisir une nouvelle couleur appelée couleur d'usage ;
– chercher dans la liste des sommets le premier sommet non coloré et le colorer avec la couleur d'usage ;
– examiner tour à tour, dans l'ordre de la liste, tous les sommets non colorés et, pour chacun d'eux, le colorer lorsqu'il n'est adjacent à aucun sommet coloré avec la couleur d'usage.

> *Remarque* – Cet algorithme fournit un coloration, mais le nombre r de couleurs utilisées peut-être supérieur au nombre chromatique. D'où l'intérêt éventuel de comparer r à un minorant r' du nombre chromatique : si $r = r'$, c'est le nombre chromatique.

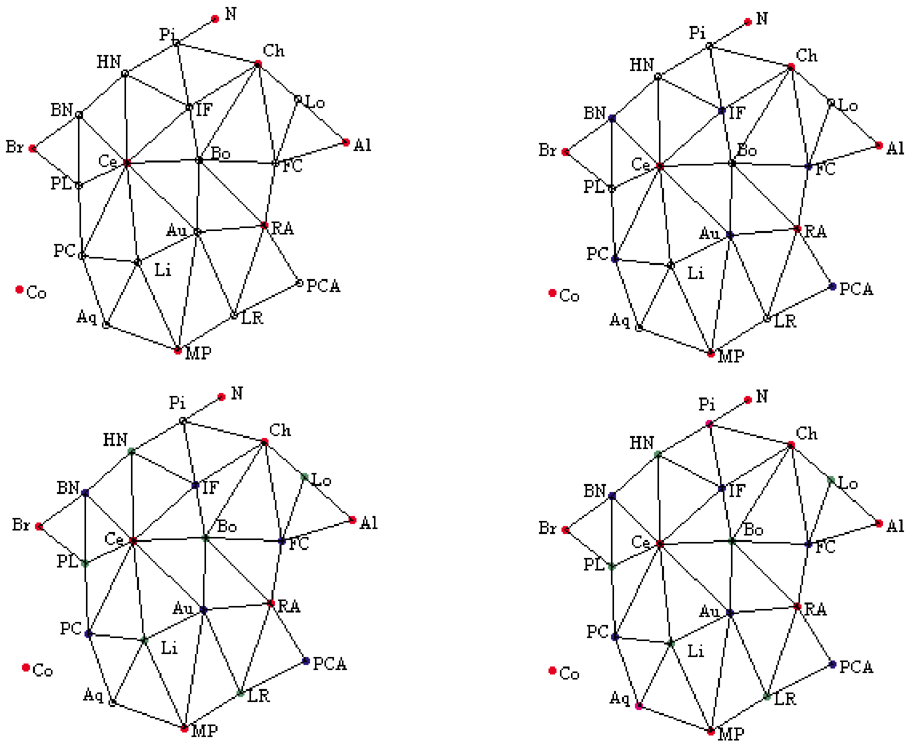
On veut colorer chaque région administrative française de telle sorte que deux régions voisines ne soient pas de la même couleur :
– montrer qu'il faut disposer d'au moins quatre couleurs ;
– appliquer l'algorithme ci-dessus.





Solution

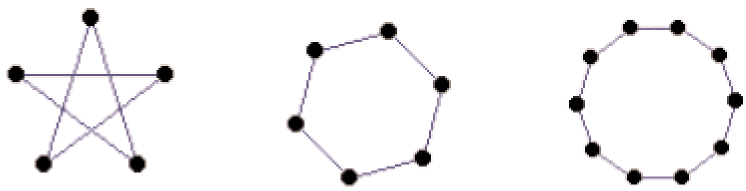
Voici le classement utilisé : ordre décroissant des degrés et ordre alphabétique pour les *ex-æquo* :



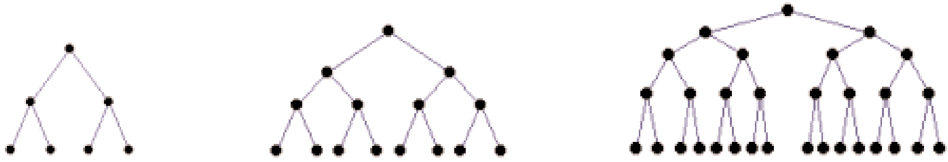
• *Contenu : coloration ; nombre chromatique.*

Diamètre d'un graphe

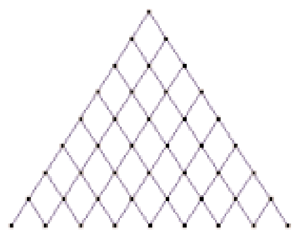
1) Caractériser les graphes de diamètre 1.Trouver le diamètre des graphes ci-dessous.



2) Quels sont les diamètres des graphes ci-dessous ? Si on continuait à construire des graphes sur le même modèle, quels seraient les nombres de sommets et d'arêtes en fonction du diamètre ?



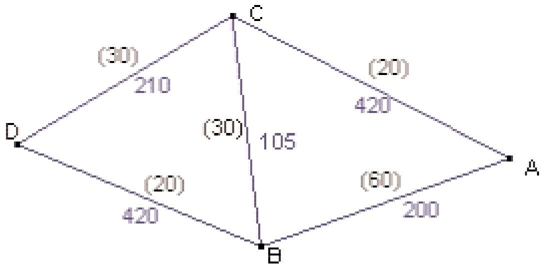
3) Quel est le diamètre du graphe ci-contre ? Si on « continuait » ce graphe, comment évoluerait l'ordre du graphe en fonction du diamètre ?



• *Contenu : diamètre d'un graphe.*

Parcours autoroutier

Sur les arêtes du graphe suivant, représentant un réseau autoroutier, on a marqué les distances entre deux étapes et, entre parenthèses, les prix des péages. Entre D et A, déterminer :



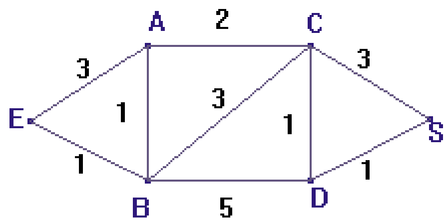
– la chaîne la plus courte ;
– la chaîne qui minimise la somme dépensée en péage.
• *Contenu : graphe pondéré ; poids d'une chaîne ; plus courte chaîne.*

Algorithme de Dijkstra

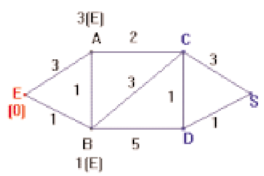
Il existe plusieurs algorithmes de recherche de la plus courte chaîne entre deux sommets d'un graphe pondéré par des poids positifs ; on présente ici un tel algorithme, dû à Dijkstra.
L'idée de l'algorithme est de procéder de proche en proche, en marquant à chaque étape au crayon (c'est-à-dire de façon provisoire) certains sommets, puis à l'encre (c'est-à-dire de façon définitive) un des sommets déjà marqués au crayon. On arrête quand on a marqué à l'encre le sommet final.

Exemple

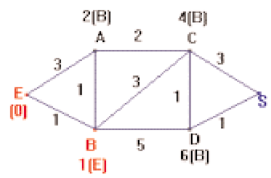
On cherche le plus court chemin de E à S sur le graphe suivant :



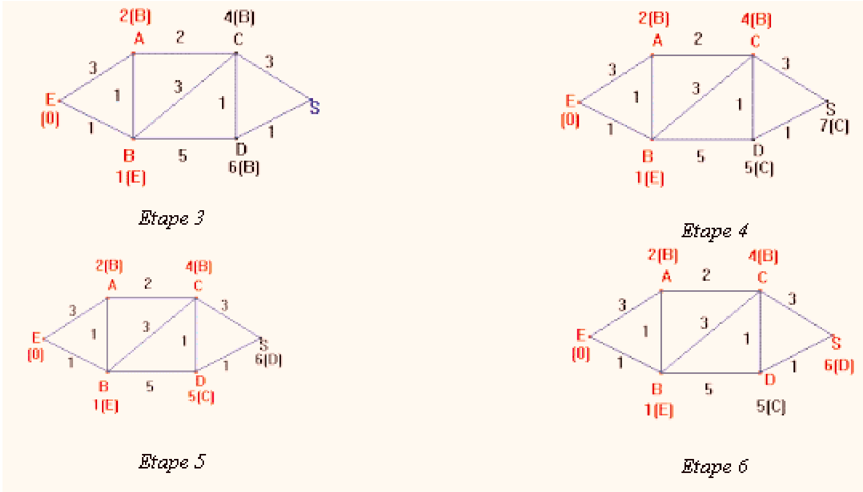
Pour démarrer, on marque à l'encre (rouge) le sommet E avec le poids 0, puisque le plus court chemin de E à E est évidemment de longueur 0.
Chaque étape de l'algorithme consiste ensuite à exécuter les actions suivantes, tant que le sommet S à atteindre n'est pas marqué à l'encre.
– Soit T le dernier sommet marqué à l'encre.
– Pour tout sommet T' non encore marqué à l'encre et adjacent à T, calculer la somme *s* du poids de T et du poids de l'arête reliant T à T' ; si T' n'est pas encore marqué au crayon (noir), marquer T' au crayon avec le poids *s* ; si T' est déjà marqué au crayon, remplacer (toujours au crayon) le poids provisoire de T' par *s* si *s* est plus petit (on a trouvé un chemin plus court), sinon garder le poids précédent.
– Parmi tous les sommets marqués au crayon, en choisir un de poids minimum et marquer à l'encre ce poids.
On réitère l'opération tant que le sommet final S n'est pas marqué à l'encre. Quand l'algorithme se termine, le poids marqué en S est la longueur d'une plus courte chaîne reliant E à S. On peut facilement raffiner l'algorithme pour obtenir cette plus courte chaîne : il suffit à chaque fois que l'on marque provisoirement un sommet, de marquer, outre le poids, le sommet précédent, ce qui permet de retrouver une chaîne de longueur minimale en repartant de S, comme dans les figures ci-dessous.
L'algorithme, exécuté sur l'exemple ci-dessus, donne les étapes suivantes :



Etape 1



Etape 2



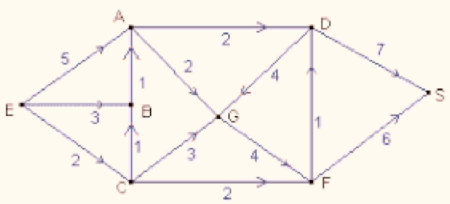
On peut représenter les différentes étapes de l'algorithme, exécuté sur cet exemple, par un tableau où figurent à droite les éléments successifs marqués de façon définitive.

E	A	B	C	D	S	$\mathcal{P}$
0	3(E)	1(E)	∞	∞	∞	E
	2(B)	*1(E)*	4(B)	6(B)		E,B
	2(B)					E,B,A
			4(B)	5(C)	7(C)	E,B,A,C
				5(C)	6(D)	E,B,A,C,D
					6(D)	E,B,A,C,D,S

La plus courte chaîne a un poids 6 ; elle se lit ici à l'envers SDCBE : S a un poids 6 venant de D, D est pondéré à partir de C, C à partir deB, B à partir de E.

Le même algorithme s'applique aux graphes orientés.

Exemple



E	A	B	C	D	F	G	S	$\mathcal{P}$
0	5(E)	3(E)	2(E)	∞	∞	∞	∞	E
			2(E)		4(C)	5(C)		E,C
	4(B)	*3(E)*						E,B,C
	4(B)			6(A)				E,B,C,A
				5(F)	*4(C)*		10(F)	E,B,C,A,F
				5(F)				E,B,C,A,F,D
						5(C)		E,B,C,A,F,D,G
							10(F)	E,B,C,A,F,D,G,S

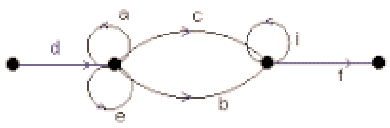
La chaîne la plus courte se lit à l'envers sur le tableau : S, F, C, E. Elle a pour longueur 10.

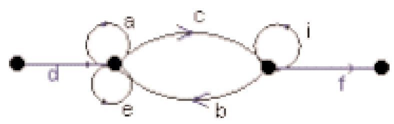
Remarque – À la fin de l'algorithme, tous les poids marqués à l'encre donnent les longueurs des plus courtes chaînes reliant les sommets considérés au sommet initial. Une preuve formelle de ce fait est difficile (comme il est difficile, par exemple, de prouver formellement que l'algorithme classique de multiplication des entiers donne le nombre cherché) et n'est pas exigible. On peut calculer que, si le nombre de sommets est n, le nombre d'opérations à faire est au plus de l'ordre du carré de n, ce qui est en général beaucoup plus petit que le nombre de chaînes sans cycles reliant E à S : c'est donc bien plus efficace que l'algorithme élémentaire qui consiste à regarder toutes les chaînes reliant E à S, et à chercher la plus courte.

• *Contenu : graphe pondéré ; poids d'une chaîne ; plus courte chaîne.*

Reconnaissance de codes

Un réseau informatique doit être accessible à un grand nombre de personnes, qui ne doivent cependant pas avoir le même code d'accès. Cet accès est régi par un des graphes étiquetés ci-dessous ; un mot est accepté comme code d'accès (ou reconnu) si c'est une liste de lettres commençant par d et terminant par f, associée à une chaîne de ce graphe.
– Les mots « decif » et « daaeebiif » sont-ils des mots reconnus par les graphes étiquetés ci-dessous ?
– Donner, pour chaque graphe ci-dessous, la liste des mots de 5 lettres reconnus.
– Caractériser pour chaque graphe les mots reconnus.





• *Contenu : graphe étiqueté.*

L'allumeur de réverbère

Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état du réverbère de sa planète avec une probabilité 0,75. Au jour 0, le réverbère est éteint.
– Qu'observe-t-on en simulant une grande population de réverbères régis par le même système probabiliste de changements d'état ?
– Faire un arbre permettant de trouver l'état probabiliste du réverbère au deuxième jour.
– Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste. Soit M la matrice de transition associée à ce graphe.
– Soit M la matrice de transition associée à ce graphe :

Vérifier que $M = N - \frac{1}{2}R$, o $N = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Calculer N^2, R^2, NR et RN puis en déduire M^n, pour n entier naturel.
– Au jour 0, le réverbère est allumé (resp. éteint). Calculer la probabilité p_n (resp. p'_n) que le réverbère soit allumé (resp. éteint) au n-ième matin. Faire le lien avec les résultats des simulations observées en 1.

Remarque – On peut varier cet exemple en utilisant l'égalité matricielle suivante, où a et b sont des nombres dans $]0,1[$, et en calculant ainsi aisément la puissance n-ième d'une matrice de transition associée à un graphe probabiliste :

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b/(a+b) & a/(a+b) \\ b/(a+b) & a/(a+b) \end{pmatrix} + (1-a-b)\begin{pmatrix} a/(a+b) & -a/(a+b) \\ -b/(a+b) & b/(a+b) \end{pmatrix}$$

• *Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition ; état probabiliste.*

Transferts de population

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires ; 20 % des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un cadre de vie meilleur et 5 % des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.
– Sachant qu'en l'année 0, un quart des habitants sont en X, calculer la population de X et de Y au bout de 1, 2, 5, 10 ans.
– Que se passe-t-il si on suppose que 99 % des habitants sont initialement en Y ou en X ? que la population est également répartie entre les deux villes (500 000 dans chaque ville en l'année 0) ? Que constate-t-on ?

Remarque – On pourra refaire le problème en variant, non plus les conditions de départ, mais les coefficients de transition : 15 % et 5 %, ou 40 % et 20 %, par exemple.

• *Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition.*

Un problème d’endémie

Un individu vit dans un lieu où il est susceptible d’attraper une maladie par piqûre d’insecte. Il peut être dans l’un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D’un mois à l’autre, son état peut changer suivant les règles suivantes :
– étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l’état S avec une probabilité 0,1 ;
– étant dans l’état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l’état M avec une probabilité 0,5 ;
– étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l’état I avec une probabilité 0,8.
Tracer un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrire la matrice de transition. Calculer (avec une calculatrice ou un ordinateur) la probabilité qu’il soit malade ou immunisé au bout de trois mois, de six mois, d’un an, de deux ans, pour chacune des situations suivantes :
– au départ, il est immunisé ;
– au départ, il est non malade et non immunisé ;
– au départ, il est malade.
Pouvez-vous donner des éléments sur la proportion d’individus malades dans la population étudiée ?

Solution

Au bout d’un an, de deux ans, de trois ans, etc., quel que soit l’état initial, l’individu considéré a une probabilité 0,755 d’être immunisé, 0,151 d’être non malade et non immunisé, 0,094 d’être malade. L’état (0,755 ; 0,151 ; 0,094) est stable. La maladie touche donc en permanence environ 9,4% de la population.

• *Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition ; état probabiliste.*

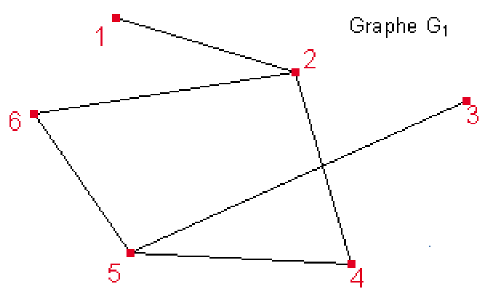
Lexique

La plupart des termes de ce lexique correspondent à leur sens intuitif et ne doivent pas faire l’objet de définitions formelles ; ils seront peu à peu introduits à l’occasion des exercices résolus. Le but de ce lexique est de délimiter nettement le type de problèmes à proposer aux élèves pour une évaluation : le vocabulaire donné doit suffire pour les résoudre.
La terminologie proposée ici pour les graphes non orientés est la plus répandue dans les ouvrages de langue française.
Dans le cas d’un graphe orienté, on ajoutera l’adjectif « orienté » lorsque cela s’avérera nécessaire.
Les pages suivantes proposent une explicitation du vocabulaire de la théorie des graphes qui figure au programme. Les « définitions » et les exemples donnés distinguent :
– les graphes non orientés ;
– les graphes orientés.

Graphes non orientés

Un graphe est constitué de **sommets**, dont certains sont reliés par des **arêtes.** Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**. Le nombre de sommets présents dans un graphe est l’**ordre du graphe**. Le **degré** d’un sommet est le nombre d’arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Le graphe G_1 est d’ordre 6 ; les sommets 1 et 2 sont adjacents, puisque reliés par une arête. Ce n’est pas le cas des sommets 5 et 2. Le degré du sommet 5 est égal à 3.



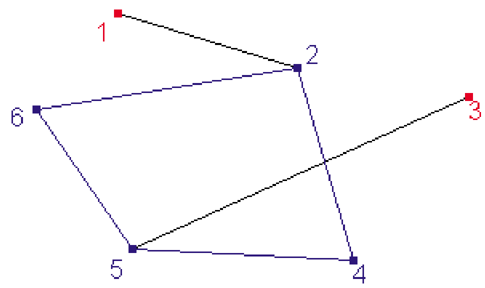
La matrice associée à un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n est une matrice symétrique, de dimension $n \times n$, où le terme à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne vaut k, nombre d'arêtes reliant i et j.

La matrice 6 × 6 ci-contre est la matrice associée au graphe G_1 ; elle ne contient que des 0 et des 1 puisque deux sommets quelconques de ce graphe sont au plus reliés par une arête. C'est d'ailleurs à ce type de graphe que l'on se restreindra le plus souvent.

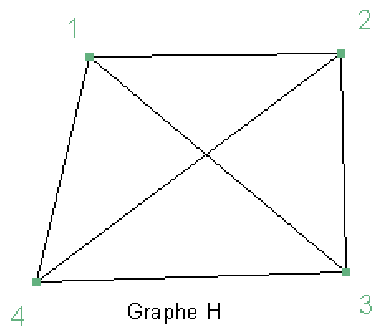
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un sous-graphe d'un graphe G est un graphe dont les sommets de G et les arêtes sont certaines des arêtes de G reliant ces sommets. **Le** sous-graphe engendré par k sommets est le sous-graphe de G défini par ces k sommets et toutes les arêtes de G reliant deux de ces k sommets.
Un sous-graphe est **stable** s'il ne comporte aucune arête.

*Ci-contre, on a choisi, pour construire **le** sous-graphe G' (en bleu) les sommets 2, 4, 5 et 6. Les arêtes qui reliaient dans G_1 ces sommets (en bleu aussi) sont les arêtes du sous-graphe G'. Les sommets 6, 2, 4 et 5 ainsi que les arêtes 5-6, 4-5 et 2-4 constituent **un** sous-graphe de G. Les sommets 1, 4, 6 et 3 définissent un sous-graphe stable.*



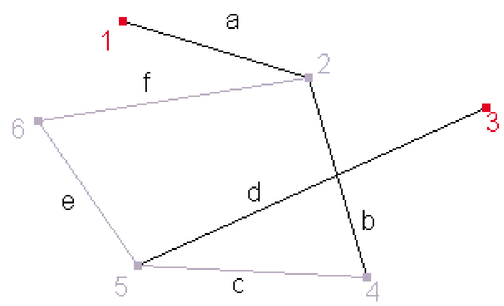
On appelle graphe complet un graphe dont tous les sommets sont adjacents.



Le graphe H est un graphe complet d'ordre 4.

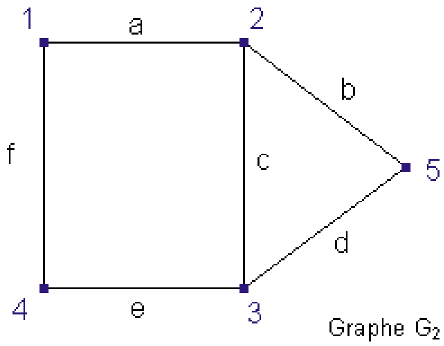
Une chaîne est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant. La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.

Dans le graphe G_1, on a nommé les 6 arêtes a, b, c, d, e et f. La liste ordonnée de sommets (2-6-5-4) est une chaîne, que l'on peut aussi noter, en utilisant les arêtes qui la composent, (f/e/c). La longueur de cette chaîne vaut 3.



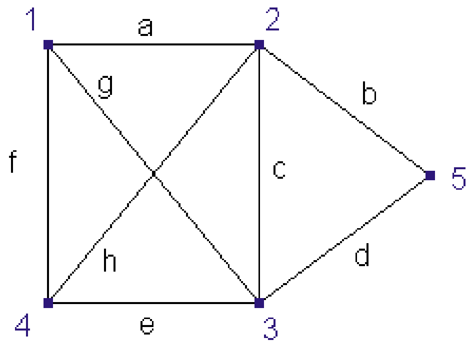
Une chaîne fermée est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues ; un **cycle** est une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes.

Dans le graphe G_2, (1-2-3-5-2-1) est une chaîne fermée que l'on pourrait aussi noter (a/c/d/b/a). Ce n'est pas un cycle, puisque l'arête a y intervient deux fois. En revanche, (a/c/e/f) est un cycle.



Graphe G_2

Une chaîne eulérienne est une chaîne qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe. Si cette chaîne est un cycle, on parle de **cycle eulérien**.

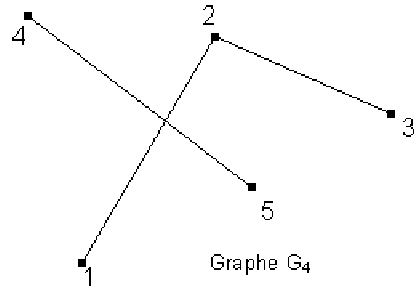


Graphe G_3

Dans le graphe G_3, (g/c/b/d/e/h/a/f) est une chaîne eulérienne.

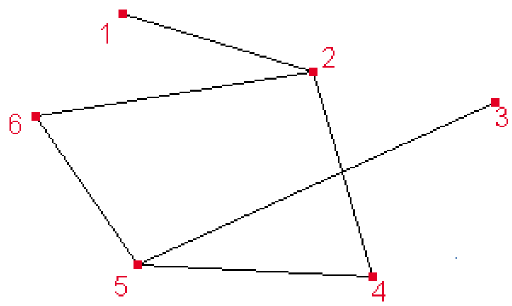
Un graphe est dit connexe s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

Le graphe G_3 est connexe.
Le graphe G_4 ne l'est pas : il n'existe pas de chaîne entre les sommets 5 et 3 par exemple.



Graphe G_4

La distance entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient.
Le **diamètre** d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets.
Reprenons le graphe G_1 :

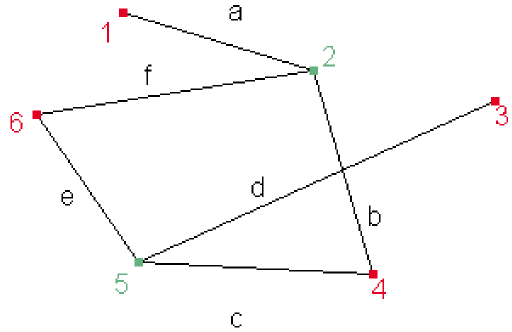


– il existe une chaîne de longueur 2 entre les sommets 1 et 4 : la chaîne (1-2-4). Ces deux sommets n'étant pas adjacents, la distance entre 1 et 4 vaut 2 ;
– le diamètre du graphe est 4 : en effet, la distance entre les sommets 1 et 3 vaut 4. On peut vérifier « à la main » qu'il n'existe pas de distance plus grande entre deux sommets.

Colorer un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorer.

Le graphe G_1 a pour nombre chromatique 2 ; en effet, il faut au moins deux couleurs pour colorer ce graphe puisqu'il y existe des sommets adjacents. En outre, on vérifie que 2 couleurs suffisent.

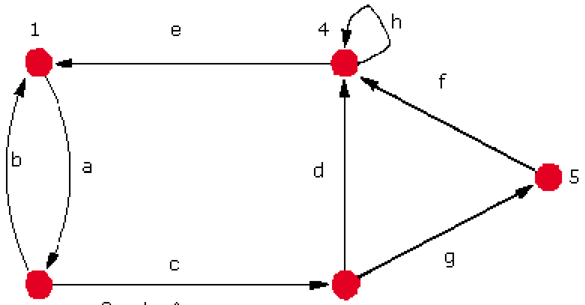


Graphes orientés

Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientées : on parle alors de l'origine et de l'extrémité d'une arête. Une **boucle** est une arête orientée dont l'origine et l'extrémité sont les mêmes.

On définit de même une chaîne orientée, une chaîne eulérienne orientée, un cycle orienté…

Le graphe A ci-contre est orienté. L'arête a *qui va de 1 vers 2 est distincte de l'arête b, qui va de 2 vers 1. L'arête h est une boucle.*
(1-2-3-5) est une chaîne orientée qui va de 1 à 5. (e/a/c/d) est un cycle orienté.



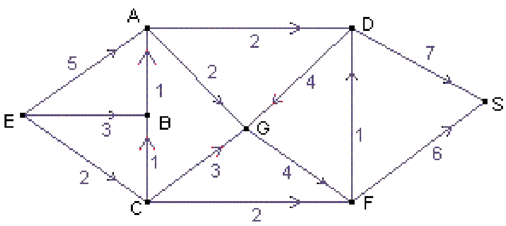
Graphe A

La matrice associée à un graphe orienté d'ordre n est une matrice de dimension $n \times n$, où le terme à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne vaut 1 s'il y a une arête dont l'origine est i et l'extrémité est j.

Ci-contre, on a la matrice associée au graphe A.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

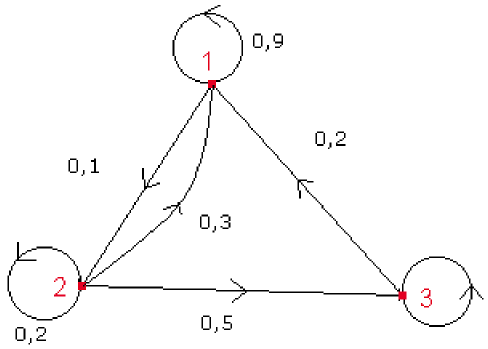
Un graphe étiqueté est un graphe orienté, dont les arêtes sont affectées d'étiquettes. Si toutes les étiquettes sont des nombres positifs, on parle de **graphe pondéré**. Dans ce cas, le **poids** d'une chaîne est la somme des poids des arêtes orientées qui la composent. Une **plus courte chaîne** entre deux sommets, est parmi les chaînes qui les relient, une chaîne de poids minimum.



Le graphe orienté ci-contre est pondéré. Le chaîne (C-B-A-G-F), a pour poids 1 + 1 + 2 + 4 = 8.

Un graphe probabiliste est un graphe orienté, pondéré, tel que la somme des poids des arêtes sortant de chaque sommet donné vaut 1.

Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un individu pouvant changer aléatoirement d'état : les sommets du graphe sont les états possibles de l'individu et le poids d'une arête orientée issue du sommet i, et d'extrémité j est la probabilité de transition de l'état i à l'état j. L'**état probabiliste** de l'individu est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles : cette loi sera ici représentée par une matrice ligne.



Un graphe probabiliste peut aussi être utilisé pour décrire l'évolution d'un système formé de plusieurs composants pouvant se trouver dans différents états (l'ensemble des états est le même pour chaque composant). L'état du système à un instant donné est la matrice ligne donnant le nombre de composants du système dans chaque état.

La matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre n est de dimension $n \times n$. Le terme à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne a pour valeur le poids de l'arête orienté allant de i vers j si cette arête existe, 0 sinon.

Le graphe d'ordre 3 ci-dessus est un graphe probabiliste. Sa matrice de transition est donnée ci-dessous. La somme des éléments d'une ligne vaut 1.

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Propriétés

Les propriétés ci-dessous sont au programme ; elles seront introduites à l'occasion de certains exercices. Elles pourront être démontrées ou commentées.
Les élèves devront les connaître.
1) La somme des degrés d'un graphe non orienté est égal à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.
2) Soit A la matrice associée à un graphe. Le terme (i,j) de la matrice A^r donne le nombre de chaînes de longueur r reliant i à j.
3) Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $\Delta + 1$, Δ étant le plus grand degré des sommets.
4) Théorème d'Euler : « Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2. Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair. »
5) Si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste, si P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial, et P_k l'état probabiliste à l'étape k, on a $P_k = P_0 \times M^k$.
6) Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition ne comporte pas de 0, l'état P_k à l'étape k, converge vers un état P indépendant de l'état initial P_0. De plus, P vérifie $P = PM$.

Contenu du cédérom *Mathématiques 2002*

Ce cédérom est autoexécutable. Il peut aussi être exploré en double cliquant sur le fichier math2002.htm présent dans la racine ; un explorateur Internet est alors nécessaire.

Partie « Lycée »

La partie « **programmes** » contient sous la forme de fichiers PDF :
• tous les programmes de mathématiques des séries générales et technologiques ;
• les programmes de physique-chimie et de sciences de la vie et de la Terre des classes de seconde générale et technologique, première et terminale S ;
• les programmes d'enseignement scientifique des classes de première L et ES.

La partie « **accompagnement** » comprend, sous la forme de fichiers PDF :
• le document d'accompagnement du programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. Ce document est accompagné de deux annexes : « 11 fiches de statistiques » et « À propos de géométrie plane », ainsi que d'une page, au format HTML, illustrant quelques liens possibles entre les programmes de mathématiques et de physique-chimie ;
• le document d'accompagnement des programmes de la classe de première des séries générales ;
• le document d'accompagnement pour l'option facultative du cycle terminal de la série L ;
• le document d'accompagnement de la classe terminale des séries ES et S. L'annexe « Probabilités et Statistique, séries ES et S » est uniquement disponible sur ce cédérom ;
• la section « compléments » contient :
– les figures des documents d'accompagnement des classes de seconde et première S,
– une partie spécifique à la première S illustrant les points du programmes « lieux géométriques » et « méthode d'Euler »,
– une partie spécifique à l'option facultative de la série L, présentant la partie du programme sur la perspective ainsi qu'une appliquette sur le codage par substitution de lettres,
– des activités sur tableur, extraites du document d'accompagnement du programme de la classe terminale ES,
– les figures du document d'accompagnement pour la classe terminale S,
– une partie « statistique et probabilités », donnant accès à de nombreuses simulations,
– une partie « documents divers », regroupant des appliquettes illustrant le programme d'arithmétique des classes terminales S et L, une section « maths et chimie » (calcul de pH, simulation d'une réaction chimique), une section « maths et musique », une section « maths et physique » (courbe de la décroissance radioactive du radon 222 et 220) et deux démonstrations de la convergence du nuage des coefficients binomiaux vers la courbe « en cloche »,
– les annexes au rapport d'étape de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (dite « commission Kahane ») sur l'enseignement de la géométrie.

La partie « **TICE lycée** » comprend :
• le cours « Statistique en ligne », conçu par Bernard Ycart (université René-Descartes, Paris) et Claudine Robert (INRIA Rhône-Alpes) ;
• des logiciels, dans leur version de démonstration : *Cabri Géomètre II* (RIP) [1], *GeoplanW* (RIP), *GeospacW* (RIP) et *Geoplace* ;
• des activités intégrant l'utilisation des technologies de l'information et de la communication, réalisées par des groupes de travail dans les académies et coordonnées par la direction de la technologie (sous-direction des technologies de l'information et de la communication pour l'éducation).

1. Reconnu d'intérêt pédagogique par le ministère de l'Éducation nationale.

Partie « Collège »

La partie « **programmes** » contient sous la forme de fichiers PDF tous les programmes de mathématiques et de sciences physiques et chimiques de l'ensemble des classes du collège.

La partie « **accompagnement** » comprend :
• les documents d'accompagnement des programmes de mathématiques et de sciences physiques ;
• une note d'information de la direction de la prospective et du développement, intitulée « Pratiques d'enseignement observées en 6^{e} » ;
• le dossier « Aire et périmètre », rédigé par le groupe national de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en classe relais.

La partie « **TICE collège** » comprend :
• des logiciels, dans leur version de démonstration : *Cabri Géomètre II* (RIP), *GeoplanW* (RIP), *GeospacW* (RIP) et *Geoplace* ;
• des activités intégrant l'utilisation des technologies de l'information et de la communication, réalisées par des groupes de travail dans les académies et coordonnées par la direction de la technologie (sous-direction des technologies de l'information et de la communication pour l'éducation).

Le bouton « Outils de consultation du cédérom » permet l'installation de logiciels nécessaires à la lecture des divers fichiers proposés.