GENERALITES SUR LES FONCTIONS

I) Notion de fonction

1) Définitions et notations

Définition

Une fonction *f* définie sur une partie $\mathcal{D}$ de IR associe à tout nombre *x* de $\mathcal{D}$ un unique nombre réel noté *f(x)*.

On note : $f : \mathcal{D} \longrightarrow \text{IR}$

$\quad\quad\quad\quad x \longrightarrow f(x)$

Vocabulaire

- ✦ $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de la fonction *f*
- ✦ *x* est la variable. Cette lettre désigne un nombre réel quelconque de $\mathcal{D}$.
- ✦ *f(x)* est l'image de *x* par la fonction *f*.
- ✦ *x* est un antécédent de *f(x)* par la fonction *f*.

Exemple (en référence à l'activité sur GEOPLAN)

La longueur *d* du trajet parcouru par Roméo pour rejoindre Juliette est fonction de la position *x* du point M sur [HK].

On peut noter *f*(*x*) la distance parcourue par Roméo lorsque HM = *x*.

On définit ainsi une fonction *f*.

- Le point M se déplaçant sur le segment [HK], la longueur HM varie dans l'intervalle [0 ; 18].
  Ainsi l'ensemble de définition de la fonction *f* est l'intervalle [0 ; 18]
  On dit aussi que la fonction *f* est définie sur l'intervalle [0 ; 18].

- Lorsque HM = 3, la longueur du trajet effectué par Roméo est de 22,38 mètres.
  On écrit : $f(3) = 22{,}38$.
  ou 22,38 est l'image de 3 par la fonction *f*.
  ou 3 est un antécédent de 22,38 par la fonction *f*.

- La longueur *d* du trajet en fonction de *x* est donnée par : $d = \sqrt{x^2+25} + \sqrt{x^2 - 36x + 373}$
  Ainsi la fonction *f* est définie sur [0 ; 18] par $f(x) = \sqrt{x^2+25} + \sqrt{x^2 - 36x + 373}$.
  On obtient par calcul *f* (3) en remplaçant *x* par 3 dans $\sqrt{x^2+25} + \sqrt{x^2 - 36x + 373}$:

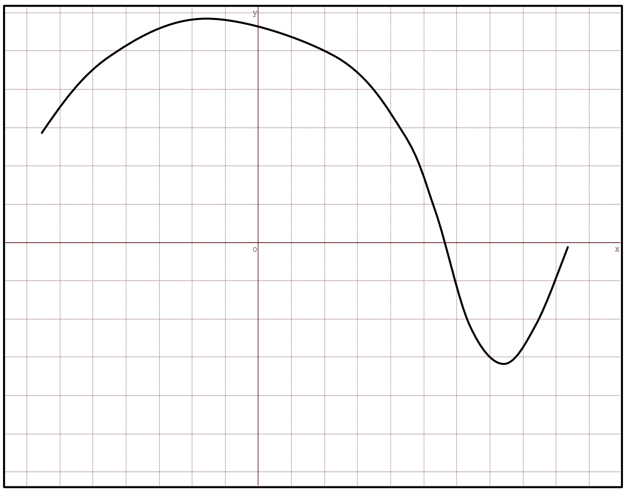
$$f(3) = \sqrt{3^2+25} + \sqrt{3^2 - 36\times 3 + 373} = \sqrt{34} + \sqrt{274} \approx 22{,}38$$

2) Représentation graphique d'une fonction

Définition

Soit *f* une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de IR.

On appelle représentation graphique de *f* ou courbe représentative de *f* dans un repère (O ; I ; J), l'ensemble C_f des points de coordonnées *(x ; f(x))* où *x* appartient à $\mathcal{D}$. On dit alors que la courbe C_f a pour équation $y = f(x)$.



Remarques

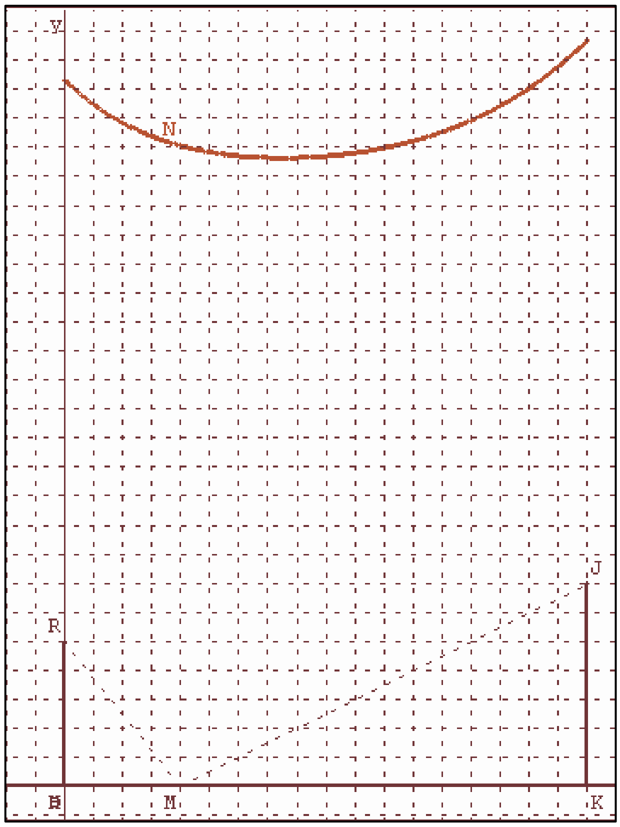
- ✦ M(x ; y) appartient à Cf

  équivaut à $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$.
- ✦ Soit un réel a sur l'axe des abscisses

  On lit son image $f(a)$ sur l'axe des ordonnées.
- ✦ Soit un réel b sur l'axe des ordonnées, on lit ses antécédents x_1, x_2, … sur l'axe des abscisses.

Exemple (en référence à l'activité sur GEOPLAN)

La trace des positions du point N lorsque le point M se déplace sur le segment [HK] est la courbe représentative de la fonction *f*.



- L'image de 15 par *f* correspond à la distance parcourue par Roméo lorsque

  x = HM = 15.

  On lit que lorsque $x = 15$, d = 23,43.

  Donc l'image de 15 par *f* est 23,43.

- Les antécédents de 22 par *f* correspondent aux valeurs de HM pour lesquelles Roméo a parcouru 22 mètres.

  On lit que $d = 22$ lorsque $x = 4{,}23$

  ou $x = 11{,}07$.

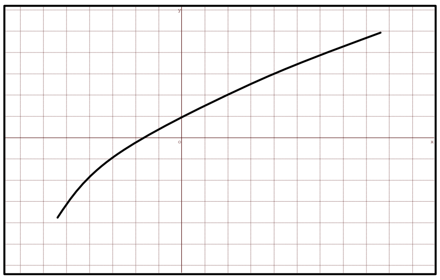
  Donc les antrécédents de 22 par *f* sont 4,23 et 11,07.

II) Etude qualitative de fonctions

1) Sens de variation d'une fonction

Définition

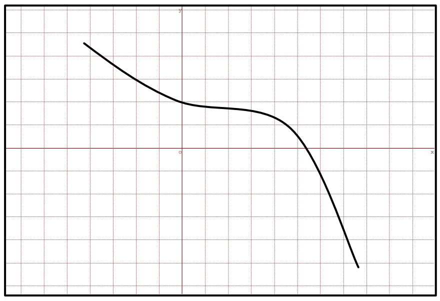
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.



✦ La fonction *f* est strictement croissante sur I ssi :
pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.

L'ordre est conservé.

Les nombres de I et leurs images sont rangées dans le même ordre.



✦ La fonction *f* est strictement décroissante sur I ssi :
pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) >. f(b)$.

L'ordre est inversé.

Les nombres de I et leurs images sont rangées dans l'ordre contraire.

Exemple (en référence à l'activité sur GEOPLAN)

Lorsque le point M se déplace de H à L, le point N descend :
la fonction f est donc décroissante sur l'intervalle [0 ; 7,5].
Soit L le point de [HK] tel que HL = 7,5.

- Lorsque le point M se déplace de H à L, le point N descend : la distance parcourue par Roméo diminue. La fonction *f* est donc décroissante sur l'intervalle [0 ; 7,5].
- Lorsque le point M se déplace de L à K, le point N monte : la distance parcourue par Roméo augmente. La fonction *f* est donc croissante sur l'intervalle [7,5 ; 0].

Remarque

Etudier les variations (ou le sens de variation) d'une fonction, c'est déterminer les intervalles sur lesquels elle est strictement croissante, strictement décroissante ou constante, c'est-à-dire sur lesquels elle est monotone. Les résultats de cette étude peuvent être résumés dans un tableau appelé tableau de variation.

Exemple (en référence à l'activité sur GEOPLAN)

Variable → ; *Image par f* → ; ← *Abscisses* ; ← *Ordonnées correspondantes*

x	0	7,5	18
Variations de *f*	24,31		25,68
		3 21,63	

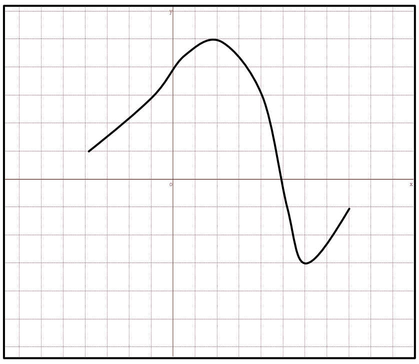
2) Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle

Définition

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

- ✦ On dit que f admet en x_0 de I un **minimum** $f(x_0)$ si pour tout x de I, $f(x_0) \leq f(x)$.
- ✦ On dit que f admet en x_1 de I un **maximum** $f(x_1)$ si pour tout x de I, $f(x) \leq f(x_1)$.

Illustration



f admet un minimum m en x_0.

m est l'ordonnée du point de (C) le plus bas.

f admet un maximum M en x_1.

M est l'ordonnée du point de (C) le plus haut

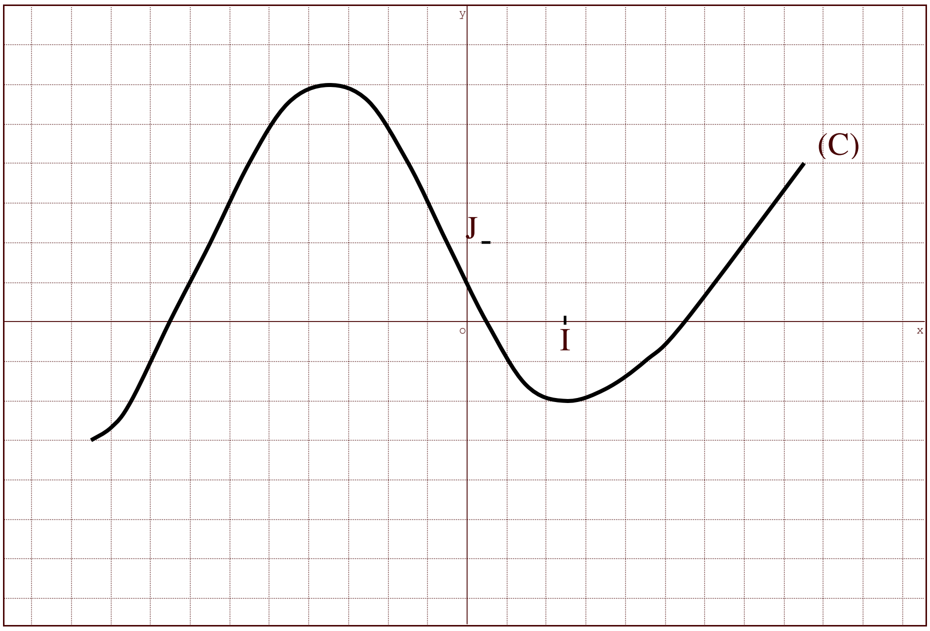
Exemple (en référence à l'activité sur GEOPLAN)

La distance *d* parcourue par Roméo est minimale pour HM = 7,5. La valeur de *d* est alors de 21 ;633 308.

Le minimum de *f* est 21, 633 308, il est atteint pour $x = 7,5$

Exemple

La courbe C ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction *f*.



1) **Déterminer l'ensemble de définition de *f***

   L'ensemble de définition de la fonction est l'ensemble des abscisses des points de la courbe (comme si on aplatissait la courbe sur l'axe des abscisses)

   L'ensemble de définition de *f* est l'intervalle [-5 ; 4].

2) **Lire graphiquement l'image de 2 par *f*.**

   On repère 2 sur l'axe des abscisses puis on trace la droite verticale (D) d'équation $x = 2$.

   L'image de 2 par *f* est l'ordonnée du point d'intersection de cette verticale et de la courbe ( ).

   L'image de 2 par *f* est –0,5 et on écrit : $f(2) = –0,5$

3) **Lire graphiquement les antécédents éventuels de 2 par *f*.**

   On repère 2 sur l'axe des ordonnées puis on trace la droite horizontale (d) d'équation $y = 2$.

   Les antécédents de 2 par f sont les abscisses des points d'intersection de la droite (d) et de ( ).

   Les antécédents de 2 par *f* sont -3 ; -1 et 4.

4) **Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$.**

   On cherche les abscisses des points de ( ) qui ont une ordonnée égale à 1 :

   On repère 1 sur l'axe des ordonnées puis on trace la droite horizontale (d) d'équation $y = 1$.

   Les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sont les abscisses des points d'intersection de (d) et de ( ).

Cela revient en fait, à trouver les antécédents de 1 par *f*.

L'équation $f(x) = 1$ a pour ensemble solution S = {-3,5 ; -0,5 ; 3,25}.

5) **Résoudre graphiquement l'inéquation f(x) > 1.**

On cherche les abscisses des points de ( ) qui ont une ordonnée strictement supérieure à 1 :

On repère 1 sur l'axe des ordonnées puis on trace la droite horizontale (d) d'équation $y = 1$.

Les solutions de l'inéquation $f(x) > 1$ sont les abscisses des points de ( ) situés strictement au dessus de la droite (d)

L'inéquation $f(x) > 1$ a pour ensemble solution S =]-3,5 ; -0,5[∪]3,25 ; 4].

6) **Résoudre graphiquement l'inéquation f(x) ≤ 1.**

On cherche les abscisses des points de ( ) qui ont une abscisse inférieure ou égale à 1 :

On repère 1 sur l'axe des ordonnées puis on trace la droite horizontale (d) d'équation $y = 1$.

Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 1$ sont les abscisses des points de ( ) situés au dessous ou sur de la droite (d)

L'inéquation $f(x) \leq 1$ a pour ensemble solution S = [-5 ; -3,5 [∪] -0,5 ; 3,25 [.

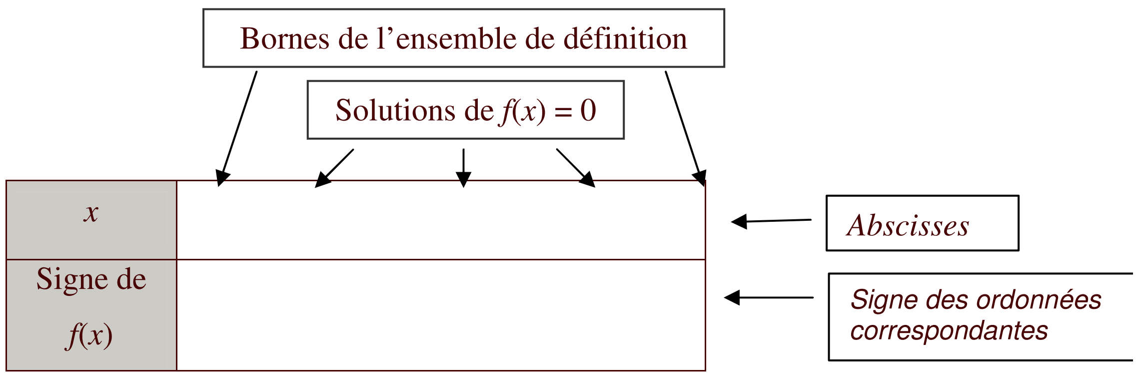
7) **Etablir le tableau de signe de la fonction *f*.**

On cherche le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x :

L'équation $f(x) = 0$ a pour ensemble solution S = {-4 ; 0 ; 2,5}.

L'inéquation $f(x) < 0$ a pour ensemble solution S_1 = [-5 ; -4[∪]0 ; 2,5[.

L'inéquation $f(x) > 0$ a pour ensemble solution S_2 =]-4 ; 0[∪]2,5 ; 4].



On marque « - » si la courbe est située en dessous de l'axe des abscisses.

On marque « + » si la courbe est située en dessus de l'axe des abscisses.

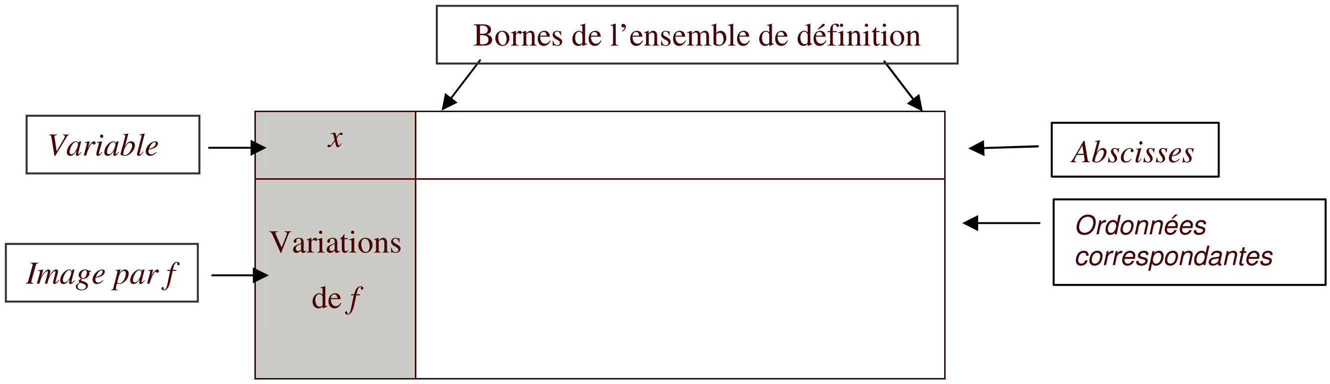
Cela revient en fait à étudier la position relative de la courbe (C) par rapport à l'axe des abscisses.

8) **Enoncer les variations de la fonction f.**

La fonction *f* est croissante sur les intervalles [-5 ; -2] et [1 ; 4],

et elle est décroissante sur l'intervalle [-2 ; 4].

9) **Faire le tableau des variations de la fonction *f*.**



10) **Donner les extremums de *f* sur [-5 ; 4], puis sur [-2 ; 4].**

Sur [-5 ; 4], le minimum de *f* est -1,5, il est atteint en -5.

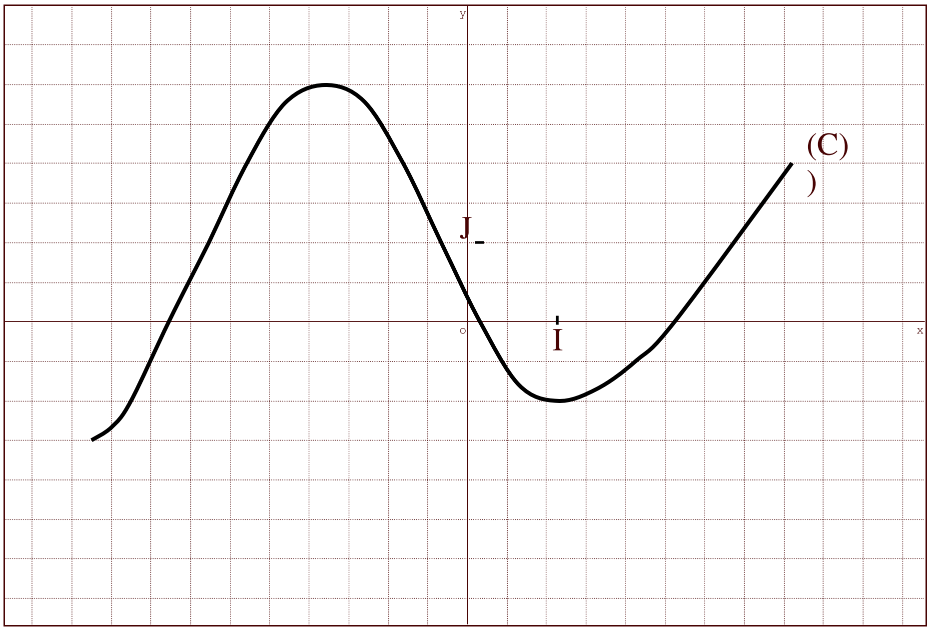
et le maximum de *f* est 3, il est atteint en -2.

Sur [-2 ; 4], le minimum de f est -1, il est atteint en 1.

et le maximum de f est 3, il est atteint en -2.

Exemple

La courbe C ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction *f*.



1) Déterminer l'ensemble de définition de *f*
2) Lire graphiquement l'image de 2 par *f*.
3) Lire graphiquement les antécédents éventuels de 2 par *f*.
4) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$.
5) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 1$.
6) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 1$.
7) Etablir le tableau de signe de la fonction *f*.
8) Enoncer les variations de la fonction f.
9) Donner les extremums de *f* sur [-5 ; 4], puis sur [-2 ; 4].