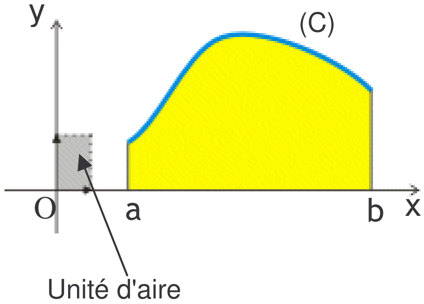
Calcul intégral

Terminale S

I] Aire et intégrale

1. **Définition 1:** A toute fonction positive ou nulle (en abrégé **positive**) définie sur un intervalle [a ; b] avec a<b , de courbe représentative C dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$, on associe l'ensemble A_f des points M du plan dont les coordonnées (x;y) vérifient $a \le x \le b$ et $0 \le y \le f(x)$, c'est à dire la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations x = a et x = b.



Définition 2 : Pour toute **fonction f positive et continue** sur [a ; b] avec a< b , on appelle intégrale de f sur [a ; b] et l'on note $\int_a^b f(x)\,dx$, l'aire de A_f.

Remarques

- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.
- si f est négative sur [a ; b] alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est égal à l'opposé de l'aire de A_f .
- $\int_a^b f(x)\,dx$ se lit : "intégrale ou somme de a à b de f(x) dx".
- La variable x est appelée variable "muette".

  On peut remplacer x par n'importe quel autre variable : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx$.
- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

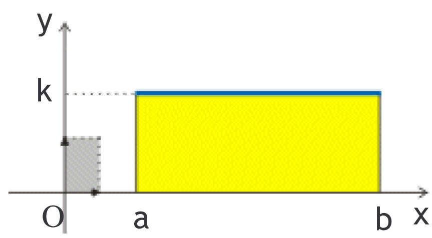
  Si le repère a pour unités graphiques 2cm sur l'axe Ox et 3 cm sur l'axe Oy, alors l'unité d'aire est 6cm^2.

Exemple

Si f est une fonction constante positive k, alors

$\int_a^b f(x)\,dx$ correspond à l'aire d'un rectangle,

On a $\int_a^b k\,dx = k(b - a)$.



2. **Propriétés de l'intégrale** :

   a. Toute fonction continue sur [a ; b] admet une intégrale sur cet intervalle.

   b. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$; $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

c. **Relation de Chasles** Soit une fonction, *f*, continue sur un intervalle I ; pour tous nombres réels *a*, *b* et *c* de I, on a: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

d. **Linéarité:** Soit deux fonctions, *f* et *g*, continues sur un intervalle I ; pour tous nombres réels *a* et *b* de I, on a : $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ où α et β sont des réels.

e. **Positivité de l'intégrale** : Soit une fonction *f* continue sur un intervalle I ; pour tous nombres réels *a* et *b* de I tels que $a \le b$. Si $f \ge 0$ sur [*a* ; *b*], alors : $\int_a^b f(t)dt \ge 0$.

f. **Respect de l'ordre par intégration**. Soit deux fonctions, *f* et *g*, continues sur un intervalle I pour tous nombres réels *a* et *b* de I tels que $a \le b$. Si $f \le g$ sur I, alors : $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$.

g. **Inégalité de la moyenne** Sur un intervalle [*a*, *b*] avec *a*<*b* la fonction est comprise entre *m* et *M* ; on a $m \le f(x) \le M$

On intègre on a alors $\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx$

C'est à dire $m(b - a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b - a)$

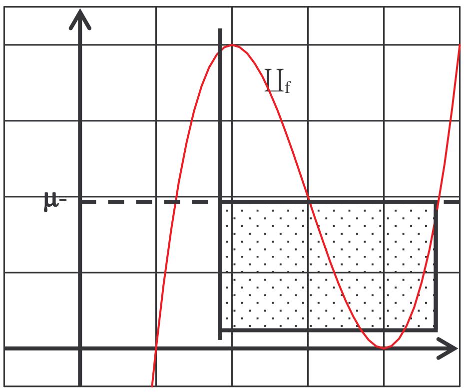
h. **Définition : Soit f une fonction *continue et positive* sur [a ; b].**

La valeur moyenne de f sur [a ; b] est le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Interprétation graphique :

Puisque $\int_a^b \mu\,dx = \mu(b-a)$, on a donc $\int_a^b \mu\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Ainsi, l'aire du domaine associé à une fonction f sur [a ; b] est égale à celle du rectangle de dimensions μ et b – a.



Interprétation cinématique :

La vitesse moyenne d'un mobile est la valeur moyenne de la vitesse . En effet, avec la notation donnée, on a :

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du trajet}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \text{valeur moyenne de la vitesse.}$$

II] Primitives d'une fonction

1. **Définition** :Soit f une fonction continue sur un intervalle I.Une fonction F définie sur I est **une primitive** de f lorsque **la dérivée** de F sur I est f . $F' = f$

2. **Théorème 1:** (admis) Toute **fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I**
3. **Théorème 2** : Les primitives de f sur un intervalle diffèrent entre elles d'une constante ; les primitives de f sont de la forme F + k (où k est une constante).

Exemple (vocabulaire important) :

Déterminer **une** primitive sur IR de $f(x) = x^3 - 2x + 3$: $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 3x$

Déterminer **les** primitives sur IR de $f(x) = x^3 - 2x + 3$; $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 3x + k$ ($k \in$ IR)

Déterminer **la** primitive sur IR de $f(x) = x^3 - 2x + 3$ telle que $F(0) = 1$;

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 3x + k \text{ et } F(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1 \text{ d'où } F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 3x + 1.$$

Remarque 1 : L'hypothèse **I est un intervalle (ou sur un intervalle [*a* ; *b*])** est fondamentale. En effet, soit les fonctions F et G définies sur IR* par $F(x) = \frac{1}{x}$ et $\begin{cases} G(x) = \frac{1}{x} + 1 \text{ si } x > 0 \\ G(x) = \frac{1}{x} - 1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Sur chacun des intervalles]-∞ ; 0[et]0 ; + ∞[F et G ont la même fonction dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ mais il n'existe pas de constante K telle que, pour tout x de IR*,on ait $G(x) = F(x) + K$.

Remarques 2 : La primitive d'une somme est la somme des primitives.
La primitive d'un produit d'une constante par une fonction est le produit de cette constante par la primitive de la fonction.

4. **Théorème** : Soit une fonction f continue sur un intervalle I et a un élément de I. L'**unique primitive de *f* sur I prenant la valeur 0 en *a*** est la fonction F définie par : $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

5. **Propriété :** Si F est une primitive quelconque de f continue sur I, a et b étant des réels quelconques de I alors $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

6. **Intégration par partie :** Soit u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle I telles que u ' et v ' soient continues sur I. Pour tous réels a et b de I on a :

$$\int_a^b u'(x)\times v(x)\,dx = \left[u(x)\times v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\times v'(x)\,dx$$

exemple : calculer $\int_1^e \ln(x)\,dx$.

Remarque:

La formule de dérivation par parties est basée sur la propriété des dérivées : $[u\ v]' = u'v + uv'$

Elle pourra être retenue de façon abrégée sous la forme $\int u'v = [u\ v] - \int uv'$ ou $\int uv' = [u\ v] - \int u'v$

Après avoir fait une intégration par parties, la nouvelle intégrale que l'on a à calculer doit être plus simple que la première. Si ce n'est pas le cas, il faut peut-être modifier le choix de u et v'.

On pourra, si besoin est, utiliser plusieurs fois l'intégration par parties.

ATTENTION :

1 **primitive** → c'est une **fonction**

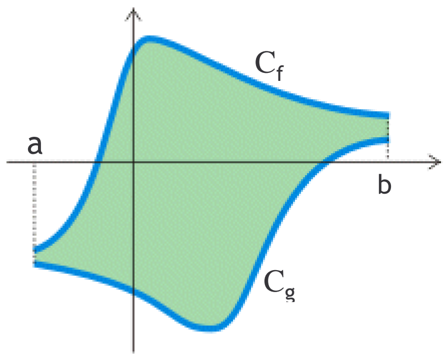
1 **intégrale** → c'est un **nombre** (positif, négatif ou nul) calculé à partir d'une primitive

III] Application du calcul intégral

1. **Calcul d'aires de surfaces planes** :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a ; b] (a < b) telles que, pour tout $x \in [a\ ;\ b]$: $g(x) < f(x)$.
L'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f et de g et les droites d'équation x = a et x = b, c'est-à-dire l'ensemble des points M(x ; y) vérifiant $\{ a \leq x \leq b\ ;\ g(x) \leq y \leq f(x) \}$

est donnée en unités d'aires par $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$



2. **Calcul de certains volumes:**

Pour un volume V de hauteur H dont la section avec un plan à la hauteur h a pour aire S(h), on a :

$$V = \int_0^H S(h)\,dh \quad \text{unités de volume.}$$