Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche

Direction générale des ressources humaines

Rapport de l'agrégation interne et CAERPA de mathématiques année 2006

Ce rapport, rédigé par des membres du jury, est publié sous la responsabilité du président du jury

Table des matières

Composition du jury

1 Composition du jury

Président		
M. André GRAMAIN	Professeur des universités	Lyon
Vice-présidents		
M. Jacques CAMUS	Professeur des universités	Rennes
Mme Jeannette MARCHAL	Inspecteur général de l'éducation nationale	
M. Marc ROSSO	Professeur des universités	Paris VII
M. Georges SKANDALIS	Professeur des universités	Paris VII
M. Eric VAN DER OORD	Inspecteur général de l'éducation nationale	
Secrétaire général		
M. Jean-Marie CHEVALLIER	Maître de conférences	Orléans
Examinateurs		
M. René ADAD	Professeur agrégé	lycée militaire, Aix-en-Provence
M. Gilles ALDON	Professeur agrégé	lycée Jacques Brel, Vénissieux
M. Dominique BARBOLOSI	Maître de conférences	Aix-Marseille III
M. Christian BATUT	Maître de conférences	Bordeaux
M. Daniel BENNEQUIN	Professeur des universités	Paris VII
Mme Françoise BERQUIER	Maître de conférences	Lille
Mme Sylvie BONNET	Professeur de chaire supérieure	lycée Victor Hugo, Besançon
M. Joseph CESARO	Insp. d'académie/insp. pédagogique régional	académie de Nice
M. René CORI	Maître de conférences	Paris VII
M. Cyrille COULET	Professeur de chaire supérieure	lycée F. Mistral, Avignon
M. Patrick FERRAND	Insp. d'académie/insp. pédagogique régional	académie de Grenoble
M. Philippe FONTAINE	Professeur agrégé	lycée Guez de Balzac, Angoulême
Mme Françoise FONTANEZ	Professeur de chaire supérieure	lycée Buffon, Paris
M. Philippe GALL	Professeur de chaire supérieure	lycée Champollion, Grenoble
M. Patrick GENAUX	Professeur de chaire supérieure	lycée Kléber, Strasbourg
Mme Christine GEORGELIN	Maître de conférences	Tours
Mme Anne GERMANANGUE	Professeur agrégé	université de Poitiers
Mme Michèle GRILLOT	Maître de conférences	Orléans
M. Guy HENNIART	Professeur des universités	Paris XI
Mme Michèle HENRI	Professeur de chaire supérieure	lycée Camille Guérin, Poitiers
M. Oussama HIJAZI	Professeur des universités	Nancy
M. Salim KOBEISSI	Professeur agrégé	université de Grenoble II
M. Thierry LAMBRE	Professeur des universités	Clermont-Ferrand
M. Boris LAZAR	Insp. d'académie/insp. pédagogique régional	académie de Rennes
Mme Claire LE GOFF	Professeur agrégé	université de Paris VI
Mme Danièle LINO	Professeur chaire supérieure	lycée Roosevelt, Reims
Mme Véronique LODS	Professeur agrégé	académie de Rouen
M. Jean-François MALLORDY	Professeur de chaire supérieure	lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrandd
Mme Claudine PICARONNY	Maître de conférences	ENS Cachan
Mme Françoise PRADIÉ	Professeur chaire supérieure	lycée Gustave Eiffel, Bordeaux
Mme Martine RAYNAL	Insp. d'académie/insp. pédagogique régional	académie d'Aix-Marseille
Mme Nicole RIGAL	Maître de conférences	Paris V
M ; Dominique SCHILTZ	Professeur de chaire supérieure	lycée Faidherbe, Lille
M. Eric SIGWARD	Insp. d'académie/insp. pédagogique régional	académie de Strasbourg
Mme Angélique SKANDALIS	Professeur de chaire supérieure	lycée Janson de Sailly, Paris
M. Jean-Pierre VIAL	Professeur de chaire supérieure	lycée Buffon, PARIS
M. Laurent VIVIER	Maître de conférences	Nice

Statistiques

2 Statistiques

AGRÉGATION INTERNE ET CAERPA DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2006

RÉSULTATS STATISTIQUES

Les épreuves écrites ont eu lieu les 2 et 3 février 2006, la liste d'admissibilité a été signée le 27 mars 2006 :

Agrégation interne : 273 admissibles ; CAERPA : 18 admissibles.

Les épreuves orales se sont déroulées du 9 au 17 avril 2006, au lycée Janson de Sailly à Paris. La liste d'admission a été signée le 18 avril 2005 :

Agrégation interne : 110 admis ; CAERPA : 13 admis.

Remarques : Comme on peut le constater sur les tableaux d'évolution des deux concours donnés ci-après, le nombre des candidats présents aux deux épreuves écrites est en augmentation sensible par rapport à l'an passé. Le nombre de postes est stable au concours de l'enseignement privé, mais en diminution au concours d'agrégation.

Le calendrier prévu pour la session 2007 est le suivant :

Écrit : jeudi 1er et vendredi 2 février 2007.

Oral : du 8 au 22 avril 2007 à Paris.

Évolution des concours

AGRÉGATION INTERNE

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1989	120	2951	1706	232	120+52*
1990	225	2386	1326	444	225+85*
1991	352	2575	1299	510	352+43*
1992	331	2538	1195	508	331+34*
1993	334	2446	1184	478	334+13*
1994	330	2520	1244	475	330+12*
1995	330	2211	1212	446	330
1996	246	2249	1150	441	246
1997	200	2113	1084	436	200
1998	200	2083	1071	432	200
1999	168	1690	1162	436	168
2000	130	1868	1257	327	130
2001	129	1944	1419	289	125
2002	129	1845	1400	288	129
2003	130	1842	1479	288	130
2004	130	1813	1382	287	130
2005	138	1897	1401	311	138
2006	110	2172	1599	273	110

*liste supplémentaire

CAERPA

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1989					
1990					
1991	13				10
1992	20	269	102	22	14
1993	40	302	128	42	25
1994	36	331	156	57	36
1995	31	340	155	53	31
1996	39	375	176	64	39
1997	32	379	181	58	32
1998	28	372	169	61	28
1999	27	328	225	64	26
2000	27	359	246	46	24
2001	25	383	268	35	18
2002	23	326	229	22	10
2003	20	325	258	27	15
2004	24	311	241	21	9
2005	19	297	211	27	12
2006	19	329	240	18	13

2.1 Statistiques de l'agrégation interne 2006

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites

Les candidats aux concours étrangers gérés par le jury ne sont pas comptabilisés

Les candidats étrangers aux concours français sont comptés normalement

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	2172	1599	273	110
Femmes	722	515	59	25
Français et U.E.	2161	1590	273	110
Union Européenne	3	3	0	0
Étrangers hors UE	11	9	0	0
Moins de 50 ans	2005	1479	269	107
Moins de 45 ans	1834	1365	258	100
Moins de 40 ans	1604	1197	245	93
Moins de 35 ans	1186	903	214	88
Moins de 30 ans	306	230	59	23

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	8	6	4	12	11	10	13	12	10
épreuve 2 (sur 20)	8	6	4	11	10	9	12	11	9
Total écrit (sur 200)	82	63	46	115	101	95	126	114	100

le total d'écrit est ramené sur 20

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	3	3	2	0	0	0
18	0	0	0	3	3	2	0	0	0
17	1	1	1	7	7	5	0	0	0
16	1	1	1	7	7	5	2	2	2
15	3	3	1	12	12	10	9	9	7
14	11	11	9	39	38	24	17	17	12
13	25	25	19	63	62	37	32	32	24
12	52	52	40	114	111	65	65	63	42
11	91	91	61	166	151	80	121	112	69
10	156	156	83	265	216	97	202	167	80
9	273	273	110	373	247	102	343	227	95
8	437	273	110	530	264	107	524	258	104
7	632	273	110	761	271	108	732	270	109
6	894	273	110	1000	273	110	963	273	110
5	1110	273	110	1224	273	110	1178	273	110
4	1296	273	110	1367	273	110	1298	273	110
3	1428	273	110	1500	273	110	1408	273	110
2	1524	273	110	1581	273	110	1511	273	110
1	1585	273	110	1634	273	110	1589	273	110
0	1599	273	110	1646	273	110	1603	273	110

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	13	9	7	15	13	10
épreuve 2 (sur 20)	12	9	7	14	12	9
Total général (sur 400)	223	198	176	249	231	217

le total général est ramené sur 20

Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0
18	0	0	3	3	3	3
17	0	0	12	12	6	6
16	0	0	23	22	14	14
15	3	3	39	37	21	20
14	5	5	55	50	36	33
13	17	17	68	59	50	42
12	33	33	88	68	69	59
11	75	75	105	74	86	70
10	128	110	130	86	110	79
9	189	110	152	96	140	93
8	241	110	183	102	174	103
7	263	110	209	106	201	106
6	266	110	232	109	226	108
5	267	110	254	110	253	109
4	267	110	262	110	260	110
3	267	110	264	110	261	110
2	267	110	267	110	266	110
1	267	110	267	110	267	110
0	267	110	267	110	267	110

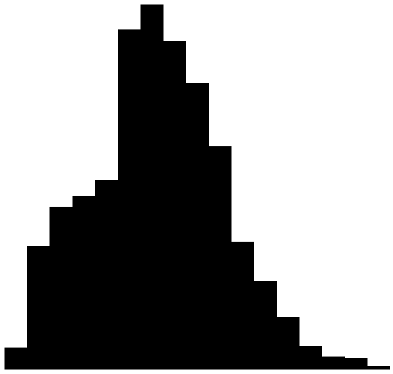
Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	107	75	7	4
BESANCON	29	22	3	2
BORDEAUX	92	77	14	4
CAEN	45	29	3	1
CLERMONTFERRAND	37	31	6	2
DIJON	60	46	6	3
GRENOBLE	90	74	13	3
LILLE	167	126	21	10
LYON	105	70	20	8
MONTPELLIER	89	61	9	6
NANCY METZ	77	59	11	1
POITIERS	55	45	8	3
RENNES	48	33	1	0
STRASBOURG	71	46	9	3
TOULOUSE	67	52	6	2
NANTES	61	40	10	4
ORLEANS TOURS	64	49	9	3
REIMS	41	30	2	0
AMIENS	65	53	11	1
ROUEN	66	52	9	4
LIMOGES	26	22	4	3
NICE	83	65	16	7
CORSE	8	8	0	0
REUNION	80	42	4	0
MARTINIQUE	28	19	0	0
GUADELOUPE	39	30	1	0
GUYANNE	16	15	0	0
PARIS/CRET/VERS	456	328	70	36

Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	38	14	0	0
ENSEIGNANT SUP	22	14	1	0
ENS.FPE.TIT	61	47	8	1
AG FPE	32	15	2	1
AGREGE	11	6	1	0
CERTIFIE	1878	1422	258	107
PLP	130	81	3	1

catégories				
	I	P	a	A
ENS.TIT.MEN	2074	1534	263	108
AG.FONC.PUB.ETA	96	65	10	2

Centres d'écrit				
	I	P	a	A
DIVERS	76	58	3	1
AIX	107	75	7	4
AMIENS	65	53	11	1
BESANCON	29	22	3	2
BORDEAUX	65	51	11	2
CAEN	45	29	3	1
CLERMONT FERRAN	37	31	6	2
DIJON	48	38	6	3
GRENOBLE	90	74	13	3
LILLE	154	117	20	10
LIMOGES	26	22	4	3
LYON	105	70	20	8
MONTPELLIER	89	61	9	6
NANCY	77	59	11	1
NANTES	61	40	10	4
NICE	82	64	16	7
ORLEANS	64	49	9	3
PARIS	454	326	69	35
PAU	27	26	3	2
POITIERS	51	43	7	3
REIMS	41	30	2	0
RENNES	48	33	1	0
ROUEN	66	52	9	4
STRASBOURG	71	46	9	3
TOULOUSE	67	52	6	2
PAPEETE	13	9	1	0
POINTE A PITRE	39	30	1	0
SAINT DENIS REU	75	39	3	0

Écrit 1



Écrit 2

Oral 1

Oral 2

2.2 Statistiques du CAERPA 2006

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites

Les candidats aux concours étrangers gérés par le jury ne sont pas comptabilisés

Les candidats étrangers aux concours français sont comptés normalement

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	329	240	18	13
Femmes	134	105	5	3
Moins de 50 ans	288	205	17	12
Moins de 45 ans	245	179	16	11
Moins de 40 ans	214	152	14	10
Moins de 35 ans	145	102	12	9
Moins de 30 ans	49	35	6	4

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	7	5	3	14	11	10	14	13	11
épreuve 2 (sur 20)	7	5	4	12	11	9	14	11	9
Total écrit (sur 200)	66	51	37	127	109	99	133	118	109

le total d'écrit est ramené sur 20

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	1	1	1
18	0	0	0	0	0	0	1	1	1
17	0	0	0	0	0	0	1	1	1
16	0	0	0	0	0	0	1	1	1
15	1	1	1	2	2	1	1	1	1
14	1	1	1	4	4	3	3	3	3
13	3	3	3	7	7	6	3	3	3
12	5	5	5	10	8	7	4	4	4
11	8	8	8	14	12	11	10	10	8
10	11	11	10	19	14	12	11	11	8
9	18	18	13	31	16	13	23	13	9
8	34	18	13	43	18	13	40	17	13
7	51	18	13	71	18	13	60	17	13
6	79	18	13	98	18	13	104	18	13
5	128	18	13	146	18	13	151	18	13
4	173	18	13	181	18	13	183	18	13
3	199	18	13	210	18	13	201	18	13
2	222	18	13	227	18	13	220	18	13
1	236	18	13	240	18	13	239	18	13
0	240	18	13	243	18	13	241	18	13

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	14	11	9	16	12	11
épreuve 2 (sur 20)	13	11	9	16	12	10
Total général (sur 400)	245	224	211	265	235	224

le total général est ramené sur 20

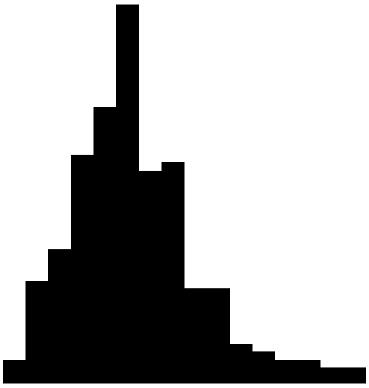
Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0
18	0	0	2	2	0	0
17	0	0	2	2	2	2
16	0	0	3	3	3	3
15	0	0	3	3	3	3
14	1	1	4	4	3	3
13	3	3	5	5	4	4
12	4	4	7	7	7	6
11	10	10	9	9	9	8
10	13	13	11	10	11	10
9	15	13	14	12	15	12
8	17	13	15	12	16	13
7	18	13	15	12	16	13
6	18	13	16	13	16	13
5	18	13	17	13	17	13
4	18	13	18	13	18	13
3	18	13	18	13	18	13
2	18	13	18	13	18	13
1	18	13	18	13	18	13
0	18	13	18	13	18	13

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	10	7	0	0
BESANCON	5	4	0	0
BORDEAUX	9	8	2	2
CAEN	9	5	1	1
CLERMONTFERRAND	7	5	0	0
DIJON	12	7	1	0
GRENOBLE	21	15	3	1
LILLE	46	37	2	2
LYON	12	10	0	0
MONTPELLIER	8	5	0	0
NANCY METZ	9	7	0	0
POITIERS	3	2	0	0
RENNES	32	21	4	2
STRASBOURG	12	8	0	0
TOULOUSE	12	8	0	0
NANTES	29	21	3	3
ORLEANS TOURS	4	4	0	0
REIMS	4	2	0	0
AMIENS	4	3	0	0
ROUEN	6	4	0	0
LIMOGES	1	1	0	0
NICE	1	1	0	0
REUNION	2	0	0	0
GUADELOUPE	1	1	0	0
GUYANNE	1	1	0	0
PARIS/CRET/VERS	69	53	2	2

Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	45	26	0	0
MAIT-DOC REM TI	284	214	18	13

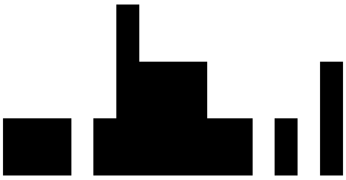
catégories				
	I	P	a	A
ENSEIGN PRIVE	329	240	18	13

Centres d'écrit				
	I	P	a	A
DIVERS	109	77	0	0
BORDEAUX	5	5	1	1
CAEN	9	5	1	1
DIJON	7	5	1	0
GRENOBLE	21	15	3	1
LILLE	44	35	2	2
NANTES	29	21	3	3
PARIS	69	53	2	2
PAU	4	3	1	1
RENNES	32	21	4	2

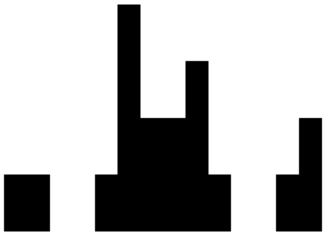


Écrit 1

Écrit 2



Oral 1



Oral 2

Programme

3 Programme du concours

3.1 Généralités

Avertissement : Le programme du concours est inchangé pour 2006, se reporter au BO n ° 3 du 29 avril 1999.

L'attention des candidats doit cependant être attirée sur l'évolution des programmes de l'enseignement secondaire, notamment en ce qui concerne des éléments de statistique inférentielle et de théorie des graphes.

Il est vraisemblable que le programme du concours sera modifié l'an prochain, pour préciser les contenus associés à cette évolution, ainsi qu'à l'évolution des programmes de BTS.

3.2 Programme

Programme de l'Agrégation Interne et CAERPA de Mathématiques

Un professeur de Mathématiques devrait avoir élaboré et intériorisé une vue globale, personnelle et cohérente de ses connaissances dans sa discipline à travers son histoire et ses liens avec les autres disciplines. La préparation à l'Agrégation Interne peut être l'occasion d'une fructueuse réflexion. C'est dans cet esprit qu'il a été procédé à cette mise à jour du programme complémentaire, la connaissance de ceux de toutes les sections de l'Enseignement Secondaire étant d'autre-part demandée aux candidats. Ce texte décrit un ensemble de connaissances souhaitable pour un professeur agrégé. Il sera périodiquement remis à jour. Il ne doit pas être interprété de façon rigide et formaliste. Son but est surtout d'aider les candidats dans leur réflexion et dans le nécessaire effort d'unification de leurs connaissances.
S'il est commode de présenter un programme en rubriques, ce découpage ne doit pas dégénérer en cloisonnement. C'est ainsi qu'il est proposé certains rapprochements qui peuvent être complétés par d'autres. Ce texte comporte aussi des répétitions quand une même notion intervient à plusieurs endroits. Ainsi, une même notion peut être d'abord approchée dans un cadre particulier, puis sous un aspect plus général.

A. PROGRAMME DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Ce programme comporte tous les programmes des classes de la seconde à la terminale incluses, dans toutes les sections.

B. PROGRAMME COMPLÉMENTAIRE

1. Ensembles

Vocabulaire de la théorie des ensembles. Produit d'un nombre fini d'ensembles. Application. Relation d'ordre.

Ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels. Ensemble dénombrable. Non dénombrabilité de $\mathbf{R}$.

Relation d'équivalence et ensemble quotient.

2. Algorithmique et informatique

Exemples d'algorithmes liés au programme.

Notion de variable, d'adresse. Instruction d'affectation, instructions conditionnelles, programmation itérative et récursive.

Fonctions et sous-programmes ; passage de paramètre. Rédaction en français ou en Pascal de programmes ne comportant qu'un petit nombre d'instructions pouvant utiliser des sous-programmes.

Aucun développement théorique n'est au programme.

3. Algèbre générale

a) Extensions successives de la notion de nombre

Anneau **Z** des entiers relatifs. Division euclidienne. Sous-groupes additifs de **Z**. Nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM). Théorème de Bézout. Algorithme d'Euclide. Congruences. Applications arithmétiques des anneaux quotients $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Théorème chinois. Groupe des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications à des problèmes de calendriers. Exemples de méthodes de codage et de cryptage. Équations diophantiennes $ax + by = c$.

Corps **Q** des nombres rationnels, **R** des nombres réels, **C** des nombres complexes. Théorèmes de d'Alembert-Gauss. Non dénombrabilité de **R** et **C**.

Groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines n-ièmes de l'unité. Relations d'inclusion entre ces groupes. Polygones réguliers.

b) Anneaux et corps (Écrit seulement)

Définition (les anneaux sont unitaires par définition). Formule du binôme. Idéaux d'un anneau commutatif. Morphismes d'anneaux. Anneaux quotients. Anneaux commutatifs intègres. Anneaux principaux. Exemple des entiers de Gauss, applications (équation $x^2 + y^2 = z^2$ dans **Z**).

Sous-corps. Corps premier. Caractéristique d'un corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Éléments algébriques sur un sous-corps. Dénombrabilité du corps des nombres algébriques sur **Q**. Nombres transcendants.

c) Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif K

Algèbre $\mathbf{K}[X]$. Division euclidienne. Idéaux de $\mathbf{K}[X]$. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun mutiple (PPCM). Théorèmes de Bézout. Algorithme d'Euclide. Polynômes irréductibles. Décomposition en facteurs irréductibles.
Fonctions polynômes. Racines, ordre de multiplicité, polynômes scindés. Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes. Cas où $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, p étant un nombre premier. Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé.

Théorème de d'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles sur **R** et **C**.

Dérivation des polynômes. Identité de Taylor.

d) Fractions rationnelles sur un corps commutatif K

Corps $\mathbf{K}(X)$ des fractions rationnelles. Forme irréductible. Fonctions rationnelles, zéros, pôles, ordre de multiplicité.

Décomposition en éléments simples. Cas où le corps est **R** ou **C**.

Exemples simples de problèmes d'élimination ; applications à la géométrie.

4. Groupes et géométrie

Les diverses notions sur les groupes devront être illustrées dans des situations géométriques (par exemple isométries d'un tétraèdre régulier, d'un cube).
Groupes, morphismes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques, ordre d'un élément. Théorème de Lagrange. Image et noyau.

Sous-groupe distingué (ou normal). Groupe quotient.

Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Stabilisateurs. Formule des classes. Éléments conjugués, classes de conjugaison, classes de sous-groupes conjugués. Signification géométrique des notions de conjugaison. Automorphismes intérieurs d'un groupe.

Polygones réguliers et groupes diédraux.

Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique ; cycles, génération par les transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné.

Groupes $GL(E)$ et $SL(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Groupes $O(E)$ et $SO(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien. Groupes $U(E)$ et $SU(E)$ où E est un espace hermitien. Groupe affine, groupe des homothéties et translations d'un espace affine. Groupe des isométries et des déplacements d'un espace affine euclidien. Formes réduites des isométries affines en dimension 2 et 3. Groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace. Groupe des similitudes directes et indirectes d'un plan affine euclidien.

5. Algèbre linéaire sur un sous-corps de C

a) Espaces vectoriels

Définition. Applications linéaires. Espace vectoriel $L(E, F)$. Algèbre $L(E)$. Groupe linéaire $GL(E)$. Espace produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels. Image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Sous-espaces en somme directe. Sous-espaces supplémentaires. Projecteurs. Endomorphismes involutifs.

Familles libres, génératrices, bases.
Étant donné u de $L(E, F)$, isomorphisme entre $\mathrm{Im}(u)$ et tout supplémentaire de $\ker(u)$.

Dans la suite, les espaces vectoriels sont tous supposés de dimension finie.

b) Espaces vectoriels de dimension finie

Définition. Théorèmes de la dimension, de la base incomplète. Dimension d'un sous-espace. Rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires.
Formule liant dimensions de la somme et de l'intersection de deux sous-espaces. Rang d'une application linéaire. Formule du rang. Caractérisation des automorphismes.

c) Matrices

Espaces $M_{p,q}(\mathbf{K})$ des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$. Isomorphisme canonique avec $L(K^q, K^p)$. Produit matriciel. Matrices inversibles. Groupe $GL(n, K)$.

Matrice d'une application linéaire entre espaces vectoriels munis de bases. Matrice de passage. Rang d'une matrice. Matrices équivalentes et caractérisation par le rang. Utilisation de sous-matrices carrées pour la détermination du rang. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

Matrice d'un endomorphisme d'un espace rapporté à une base. Matrices semblables. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

Systèmes d'équations linéaires. Rang. Conditions de compatibilité. Systèmes de Cramer. Résolution par opérations élémentaires (pivot de Gauss). Applications à des problèmes de géométrie.

d) Opérations élémentaires sur les matrices

Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Application à la résolution de systèmes linéaires, aux calculs de déterminants, à l'inversion de matrices carrées et au calcul du rang.

Applications linéaires associées aux opérations élémentaires : dilatations et transvections. Génération de $GL(n, \mathbf{K})$ et $SL(n, \mathbf{K})$.

e) Déterminants

Formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n. Déterminant d'une famille de n vecteurs relativement à une base. Déterminant d'un endomorphisme, d'un composé d'endomorphismes. Caractérisation des automorphismes.
Déterminant d'une matrice carrée. Expression développée. Déterminant de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices. Mineurs, cofacteurs, développement relativement à une ligne ou une colonne. Calcul par opérations élémentaires.

Application à l'inversion d'une matrice carrée. Formules de Cramer. Orientation d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Exemples de calculs de volumes simples.

Groupes $SL(E)$ et $SL(n, \mathbf{K})$.

f) Dualité

Formes linéaires et hyperplans. Équation d'un hyperplan. Dual E^* d'un espace vectoriel E. Base duale d'une base. Application à la formule d'interpolation de Lagrange. Bijection entre les ensembles des sous-espaces de E et E^* par l'orthogonalité. Orthogonal d'une somme ou d'une intersection de deux sous-espaces. Dimension de l'orthogonal.

Transposée d'une application linéaire. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

g) Réduction des endomorphismes

Sous-espaces stables par un endomorphisme.

Algèbre $\mathbf{K}[u]$ des endomorphismes polynomiaux en un endomorphisme u de E. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme.

Triangulation d'un endomorphisme, d'une matrice carrée, si le polynôme caractéristique est scindé. Ordre de multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé. Théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème de décomposition des noyaux. Polynôme minimal. Sous-espaces caractéristiques.

Critères de diagonalisabilité : la dimension de tout sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée ; il existe un polynôme scindé annulateur à racines simples.

Diagonalisation simultanée d'un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant entre eux.

Diagonalisation par blocs. Sous-espaces caractéristiques. Décomposition de Dunford : existence et unicité de l'écriture $u = d + n$ où d est diagonalisable et n nilpotent avec $d \circ n = n \circ d$ si le polynôme caractéristique est scindé.

Application de la réduction des endomorphismes à l'analyse (suites récurrentes, systèmes différentiels, etc.).

h) Cas où le corps $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

Application du théorème d'équivalence des normes en dimension finie à la topologie de $L(E)$. Définition de $\exp(u)$, application aux systèmes différentiels.

Exemples de parties denses de $L(E)$: $GL(E)$ est un ouvert dense de $L(E)$; si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, l'ensemble des endomorphismes diagonalisables est dense dans $L(E)$.

i) Formes quadratiques

Formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques. Morphisme de E vers E^* canoniquement associé à une forme bilinéaire. Matrice relativement à une base. Matrices congruentes.

Bases orthogonales. Décomposition en carrés (méthode de Gauss). Loi d'inertie et signature dans le cas réel. Application aux coniques et quadriques. Application à l'analyse des données.

6. Géométrie affine en dimension finie

Le corps de base est $\mathbf{R}$.

Définition d'un espace affine. Espace vectoriel associé. Sous-espaces affines, direction d'un sous-espace affine. Droites, plans, hyperplans.

Repères. Orientation. Volume algébrique d'un parallélépipède orienté.

Applications affines. Projecteurs. Groupe affine. Isomorphisme du stabilisateur d'un point et du groupe linéaire. Symétries. Groupe des homothéties et translations. Effet d'une application affine sur les volumes.

Barycentres. Repères et coordonnées barycentriques. Isobarycentre.

Parties convexes. Intersection, images directe et réciproque par une application affine. Enveloppe convexe d'une partie. Exemples de problèmes d'optimisation.

7. Algèbre linéaire euclidienne et hermitienne

Les espaces vectoriels sont tous de dimension finie.

a) Espaces euclidiens

Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme euclidienne. Identité du parallélogramme. Isomorphisme canonique avec le dual. Orthogonalité. Bases orthonormales. Orthonormalisation de Schmidt. Projecteurs et symétries. Adjoint d'un endomorphisme et matrice associée dans une base orthonormale. Groupe orthogonal $O(E)$ et spécial orthogonal $SO(E)$.

Endomorphismes symétriques, réduction dans une base orthonormée. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles dont l'une est définie positive. Application aux axes de symétrie des coniques et quadriques dans un espace euclidien. Ellipsoïde d'inertie. Application à l'analyse des données.

Application à l'étude d'une surface au voisinage d'un point régulier.
Endomorphismes symétriques positifs et applications (norme d'un endomorphisme).

b) Angles

Matrice d'une rotation. Le groupe $SO(E)$ est commutatif en dimension 2. Angles dans le plan euclidien orienté. Sinus et cosinus d'un angle. Exponentielle complexe. Nombre π. Fonctions trigonométriques circulaires. Morphisme canonique de $\mathbf{R}$ vers $SO(2)$. Mesure des angles.

Angles orientés de droites en dimension 2.

Angles en dimension 3 : angle d'une rotation dont l'axe est orienté. Génération de $SO(E)$ par les demi-tours.

Similitudes vectorielles en dimension 2 et 3.

c) Calcul matriciel et normes euclidiennes

Projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace. Matrice de Gram. Distance d'un point à un sous-espace. Problème des moindres carrés.

d) Calculs vectoriels en dimension 3

Produit vectoriel. Produit mixte. Applications à la géométrie des trièdres.

e) Espaces hermitiens

Inégalités de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme hermitienne. Sommes directes orthogonales. Bases orthonormales. Adjoint d'un endomorphisme, matrice dans une base orthonormale. Endomorphismes hermitiens. Groupe unitaire $U(E)$ et spécial unitaire $SU(E)$.

Réduction d'un endomorphisme hermitien, endomorphismes hermitiens positifs, applications (norme d'un endomorphisme).

8. Géométrie affine euclidienne orientée

a) Généralités

Espaces affines euclidiens. Distance de deux points. Inégalité triangulaire.

Groupes des isométries et des déplacements. Génération du groupe des isométries par les réflexions, du groupe des déplacements par les demi-tours en dimension 3.

Décomposition canonique d'une isométrie en $u = t \circ f = f \circ t$ où t est une translation et f une isométrie admettant au moins un point fixe. Application à la classification des isométries en dimension 2 et 3.

Exemples de groupes d'isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers et groupes diédraux. Tétraèdres réguliers, cubes, octaèdres.

Groupe des similitudes.

b) Géométrie plane

Propriété angulaire du cercle et applications.
Faisceau harmonique de deux droites et de leurs bissectrices.

Géométrie du triangle, éléments remarquables. Exemples de relations métriques et trigonométriques dans le triangle.
Utilisation des nombres complexes : affixe d'un point dans un repère orthonormé direct. Exemples d'applications géométriques (polygones réguliers, géométrie des cercles).

Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical. Orthogonalité entre cercles.

c) Coniques

Définitions bifocale et par foyer et directrice. Classification par l'excentricité. Équations réduites. Image par une application affine et classification en les trois genres affines : ellipse, parabole, hyperbole. Exemples de propriétés géométriques communes ou spécifiques à chaque genre.

Section plane d'un cône de révolution.

Trajectoire parabolique d'un objet pesant. Mouvement à accélération centrale. Mouvement des planètes.

9. Propriétés affines et métriques

Pour toutes les situations géométriques, on réfléchira aux propriétés de caractère affine et à celles de nature métrique (ou euclidienne).

Groupes affines et groupes euclidiens.
Propriétés affines et euclidiennes des coniques.
Notions différentielles de caractère affine et métrique.
Exemples d'utilisation de repères pour traiter des problèmes de géométrie.

10. Analyse à une variable réelle

a) Nombres réels ou complexes

Corps **R** et **C** des réels et complexes. La construction de **R** étant admise. Suites convergentes, divergentes, sous-suites, valeurs d'adhérence. Opérations sur les limites. Toute partie non vide majorée de **R** possède une borne supérieure. Toute suite croissante majorée est convergente. Suites adjacentes. Droite numérique achevée.

Complétude de **R** : toute suite de Cauchy de **R** ou **C** converge. Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de **R** ou **C** on peut extraire une sous-suite convergente.

Développement décimal d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels.

Comportement asymptotique d'une suite. Relations de comparaison : domination, prépondérance (u est négligeable devant v), équivalence. Notations $u = O(v)$ et $u = o(v)$.

Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Récurrences linéaires et homographiques.

b) Séries de nombres réels ou complexes

Séries à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est bornée. Étude de la convergence par les relations de comparaison, comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence pour les séries convergentes et divergentes. Comparaison d'une série et d'une intégrale, cas des séries de Riemann.

Critères de Cauchy pour les séries à termes réels ou complexes. Convergence absolue. Convergence d'une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue, signe et majoration du reste. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemple d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.

Opérations sur les séries. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

c) Continuité

Fonctions définies sur une partie de **R**. Limite, continuité à droite et à gauche, continuité.

Théorème des valeurs intermédiaires. Continuité sur un segment, théorème des extrema. Théorème de Heine de continuité uniforme sur un segment. Fonction réciproque d'une fonction monotone f sur un intervalle ; propriétés de la fonction réciproque f^{-1}.

Fonctions continues par morceaux sur un segment, approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier, des fonctions affines par morceaux, des polynômes (théorème de Weierstrass admis).

d) Dérivabilité

Dérivée à droite et à gauche en un point. Comportement de la dérivation relativement aux opérations algébriques. Dérivation d'une fonction composée, d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes. Application au sens de variation et au caractère lipschitzien.

Dérivées successives. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. Formule de Leibniz pour la dérivée k-ième d'un produit.

Fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1$, convexité de l'épigraphe, croissance de la dérivée, position de la courbe relativement aux cordes et aux tangentes. Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Formules de Taylor avec reste intégral, de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Étude locale des fonctions. Conditions nécessaires d'extremum. Développements limités. Opérations sur les développements limités.

Série de Taylor.

e) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances. Équations fonctionnelles caractérisant ces fonctions. Fonctions hyperboliques directes et réciproques.

Fonctions circulaires directes et réciproques.

f) Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne, relation de Chasles. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Intégration par parties, changement de variable, calculs

de primitives et d'intégrales.
Convergences en moyenne et en moyenne quadratique pour les suites de fonctions. Comparaison avec la convergence uniforme.

g) Intégrales sur un segment d'une fonction dépendant d'un paramètre

Théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme. Formule de Fubini si le paramètre décrit un segment. Lien avec les intégrales doubles.

h) Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions considérées sont continues par morceaux sur tout segment contenu dans l'intervalle I de définition.

Intégrale d'une fonction positive. Emploi des relations de comparaison.

Une fonction définie sur I à valeurs complexes est dite intégrable si l'intégrale de son module est finie.

Les deux théorèmes suivants sont admis :

Théorème de convergence monotone : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions à valeurs positives intégrables convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I, et si la suite des intégrales des f_n est majorée, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des $f_{n.}$

Théorème de convergence dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I, et si la suite des modules des f_n est majorée par une fonction g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des $f_{n.}$

i) Intégrales impropres

Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy. Convergence absolue. Intégration par parties.

Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Intégration de relations de prépondérance et d'équivalence.

j) Intégrales sur un intervalle quelconque d'une fonction dépendant d'un paramètre

Les deux théorèmes suivants sont admis :

Théorème de continuité : Soit f une fonction continue de deux variables (x, t) définie sur un produit $X \times I$ d'intervalles, intégrable en t sur I pour tout x fixé dans X. Si le module de $f(x, t)$ est majoré par $g(t)$, où g est continue et intégrable sur I, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x, t)$ sur I est continue sur X.

Théorème de dérivation : Soit f une fonction continue de deux variables (x, t) définie sur un produit $X \times I$ d'intervalles, intégrable en t sur I pour tout x fixé dans X et admettant une dérivée partielle f'_x par rapport à x. Si le module de f'_x(x,t) est majoré par $h(t)$, où h est continue et intégrable sur I, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x, t)$ sur I est dérivable sur X et sa dérivée est l'intégrale de f'_x par rapport à t.

Exemples de fonctions définies par une intégrale (fonction Gamma d'Euler, transformée de Fourier).

k) Analyse numérique

Approximations d'un nombre par des suites : rapidité de convergence, ordre d'un algorithme. Accélération de la convergence, méthode de Richardson-Romberg.
Approximation d'une solution d'équation $f(x) = 0$. Méthode de dichotomie. Approximations successives, méthode de Newton. Estimation de l'erreur.
Valeurs approchées d'une intégrale : méthode du point milieu, des trapèzes, de Simpson. Estimation de l'erreur.
Évaluation asymptotique du reste d'une série convergente ; recherche d'une valeur approchée de la somme d'une telle série.

Solutions approchées d'une équation différentielle $x' = f(t, x)$ par la méthode d'Euler.

11. Analyse à une variable complexe

a) Séries entières

Rayon de convergence. Disque ouvert de convergence. Convergence normale sur tout compact du disque ouvert de convergence. Exemples de calcul du rayon de convergence. Rayon de convergence de la série dérivée.

Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence. Dérivation par rapport à la variable complexe sur ce disque ouvert.

b) Extension à C des fonctions usuelles

Exponentielle complexe, exponentielle d'une somme, nombre π, fonctions sinus et cosinus.
Application à la mesure des angles.

12. Analyse fonctionnelle et vocabulaire de la topologie

a) Topologie et espaces métriques

Distance, boules ouvertes et fermées. Parties ouvertes et fermées. Voisinages. Intérieur, adhérence et frontière d'une partie. Distance à une partie, diamètre d'une partie. Parties denses, points isolés, points d'accumulation. Produits finis d'espaces métriques.

Suites, limites, valeurs d'adhérence, sous-suites, suites de Cauchy. Caractérisation de l'adhérence par les suites.

Continuité d'une application en un point, caractérisation par les suites. Continuité sur l'espace entier, caractérisation par les images réciproques des ouverts et fermés. Homéomorphismes. Applications uniformément continues. Algèbre des fonctions numériques continues.

b) Espaces vectoriels normés sur R ou C

Normes. Distance associée à une norme. Normes équivalentes. Continuité des opérations. Applications linéaires continues, normes de ces applications.

c) Espaces métriques compacts

Définition séquentielle. Parties compactes d'un compact. Parties compactes de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Produit d'un nombre fini d'espaces métriques compacts. Parties compactes de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$.

Image continue d'un compact. Théorème de Heine de continuité uniforme des applications continues.

d) Espaces métriques connexes

Définitions. Parties connexes. Union de parties connexes d'intersection non vide. Parties connexes de $\mathbf{R}$. Image continue d'un connexe. Théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs : elle implique la connexité et lui équivaut sur un ouvert d'un espace vectoriel normé.

e) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème d'équivalence des normes. Les parties compactes sont les fermés bornés. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires en dimension finie.

Exponentielle d'un endomorphisme.

f) Espaces métriques complets

Définition. Parties complètes d'un espace complet. Exemples de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Théorème du point fixe pour les contractions d'un espace complet dans lui même. Application aux approximations successives.

Critère de Cauchy pour l'existence de la limite d'une application en un point.

g) Espaces de Banach

Définition. Critère de Cauchy pour les séries. L'absolue convergence d'une série implique la convergence. Sous-espaces de Banach.
Espaces de Banach usuels de suites et de fonctions. Espace de Banach des applications linéaires continues d'un espace de Banach vers un autre.

Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergences simple, uniforme, uniforme sur tout compact. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Critère de Cauchy uniforme. Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ simplement convergente et dont la suite des dérivées converge uniformément.

Séries d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergence simple et uniforme. Convergence normale. Critère de Cauchy uniforme. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel.

h) Espaces préhilbertiens

Produit scalaire. Inégalités de Cauchy-Schwarz. Norme associée. Théorème de Pythagore. Familles orthonormales. Procédé de Schmidt. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; distance à un tel sous-espace.

Exemples de produits scalaires ; exemples de suites de polynômes orthogonaux.

i) Séries de Fourier

Polynômes trigonométriques, orthogonalité des fonctions e^{inx}. Coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$, $c_n(f)$ d'une fonction 2π-périodique f continue par morceaux. Sommes partielles $S_n(f,x) = \sum_{-n\leqslant k\leqslant n} c_k(f)e^{ikx}$.
Meilleure approximation en moyenne quadratique. Identité de Parseval et convergence en moyenne quadratique si f est continue par morceaux.

Théorèmes de convergence de Dirichlet et F é jer. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

13. Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert de R^n à valeurs dans R^p.

a) Topologie de $\mathbf{R^n}$.

Normes usuelles sur $\mathbf{R}^n$; elles sont équivalentes. Complétion. Parties compactes. Limites et applications continues.

b) Fonctions différentiables

Dérivée selon un vecteur. Développement limité à l'ordre 1. Différentiabilité en un point. Interprétation géométrique (plan tangent à une surface). Matrices jacobiennes, déterminant jacobien. Différentielle d'une fonction composée.

Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω : l'application associant à un point de Ω sa différentielle est continue.
Théorème admis : pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$, il faut et il suffit que les dérivées partielles soient continues sur Ω.

Composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Difféomorphismes. Caractérisation des difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe $\mathcal{C}^1$. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Caractérisation des constantes parmi les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert connexe.

Applications de classe $\mathcal{C}^k$. Théorème de Schwarz pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Gradient d'une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$. Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Extrema locaux d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de deux variables en un point où $rt - s^2 \neq 0$. Exemples de problèmes d'extrema issus de la géométrie.

Théorèmes (admis) d'inversion locale et des fonctions implicites. Application à la caractérisation des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe $\mathcal{C}^k$.

c) Équations différentielles

Systèmes linéaires $X' = A(t)X + B(t)$, où A (resp. B) est une application continue d'un intervalle I dans $M_n(\mathbf{C})$ (resp. $\mathcal{C}^n$).

Théorème (admis) d'existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.
Dimension de l'espace vectopriel des solutions. Méthode de la variation des constantes.

Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme, application au problème de Cauchy ; résolution du système $X' = AX$ par diagonalisation ou triangularisation de A ou emploi du théorème de Cayley-Hamilton. Équations linéaires scalaires à coeffients constants. Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène.

Équations linéaires scalaires $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où a, b, c sont continues sur un intervalle I et à valeurs complexes. Système du premier ordre associé, étude du problème de Cauchy ; solution de l'équation sans deuxième membre, méthode de variation des constantes. Résolution lorsqu'une solution de l'équation sans second membre ne s'annulant pas sur I est connue.

Notions sur les équations scalaires non linéaires (écrit seulement).

Solutions d'une équation $x' = f(t,x)$, ou $x'' = f(t,x,x')$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$; existence et unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy. Énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas $\mathcal{C}^1$.

Exemples d'études qualitatives.

Résolution d'équations à variables séparables et homogènes ; exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction en liaison avec des propriétés d'invariance.

Applications en physique et en géométrie différentielle.

14. Calcul intégral et probabilités

a) Intégrales multiples

Tous les théorèmes de ce paragraphe sont admis.

Intégrales curvilignes, longueur d'un arc de courbe, travail d'une force. Intégrales doubles et triples. Linéarité et additivité relativement aux ensembles.

Théorème de Fubini-Tonelli : Si f est une fonction de deux variables continue positive, on peut intervertir l'ordre des intégrations dans le calcul de l'intégrale double de f.
Extension au cas du produit d'une fonction de deux variables continue positive et d'une fonction indicatrice d'un ensemble géométriquement simple.

Théorème de Fubini : Si f est une fonction de deux variables continue de module intégrable, on peut intervertir l'ordre des intégrations dans le calcul de l'intégrale double de f.

Extension au cas du produit d'une fonction de deux variables continue et d'une fonction indicatrice d'un ensemble géométriquement simple.

Extension des théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini au cas de fonctions de n variables.

Applications à des calculs d'intégrales.

Théorème du changement de variables ; passage en coordonnées polaires.

Exemples de calculs d'aires et de volumes.

b) Modélisation d'une expérience aléatoire

Espace Ω des épreuves (ou des évènements élémentaires) ; tribu (ou ß-algèbre) des évènements ; mesure de probabilité sur cette tribu. Etude d'exemples dans le cas où Ω est fini ou infini dénombrable.

c) Espace probabilisé

Propriétés d'une probabilité. Probabilité conditionnelle $P_B[A]$ de A sachant B si $P[B]$ est positif. Formule des probabilités composées et formule de Bayes. Indépendance d'un nombre fini d'évènements.

d) Variables aléatoires réelles

Etant donné un espace probabilisé (Ω,f,P), on appelle *variable aléatoire réelle* (v.a.r. en abrégé), toute application X de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que l'image réciproque $\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{I})$ de tout intervalle I de $\mathbf{R}$ appartienne à la tribu f. On admettra que la somme, ou le produit, de v.a.r. est une v.a.r..

On se bornera à l'étude des deux familles suivantes de v.a.r. :

Variables aléatoires réelles discrètes. Une v.a.r. est dite *discrète* si elle prend un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs. Loi et fonction de répartition d'une v.a.r. discrète. Moments d'une v.a.r. discrète : espérance, variance et écart type. Espérance d'une somme de v.a.r. discrètes. Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbf{N}$. Lois discrètes usuelles : loi de Bernoulli ; loi binomiale ; loi géométrique et loi de Poisson.

Variables aléatoires réelles possèdant une loi avec densité. On appelle *densité de probabilité* sur $\mathbf{R}$, toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ intégrable sur $\mathbf{R}$ et d'intégrale égale à 1 (On se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe « Intégration sur un intervalle quelconque »).

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$. On dit qu'une v.a.r. X possède la loi de densité f, si pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$, $P[\{X \in I\}] = \int_I f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Fonction de répartition et moments (espérance, variance et écart type) d'une v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance d'une somme de v.a.r. possédant une densité (résultat admis). Lois usuelles possédant une densité : loi uniforme sur un intervalle borné ; loi exponentielle ; loi normale.

Si X est une v.a.r. de loi de densité f et si Φ est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue par morceaux sur tout segment et telle que la fonction $|\Phi|f$ soit intégrable sur $\mathbf{R}$, alors on admettra que $\Phi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par : $\mathrm{E}[\Phi(X)] = \int_{\mathbf{R}} \Phi(x) f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

e) Vecteurs aléatoires

On dira qu'une application $X = (X_1, \ldots, X_p)$ de Ω dans $\mathbf{R}^p$ est un *vecteur aléatoire* si chacune de ses composantes est une v.a.r.. On se limitera aux deux cas suivants :
Vecteurs aléatoires discrets. Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_p)$ de Ω dans $\mathbf{R}^p$ est dit discret si chacune de ses composantes est une v.a.r. discrète.

Loi d'un vecteur aléatoire X. Indépendance de p v.a.r. discrètes. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. discrètes. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. discrètes indépendantes.

Vecteurs aléatoires possédant une loi avec densité. On appelle *densité de probabilité sur* $\mathbf{R}^p$ toute fonction f de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}_+$, intégrable sur $\mathbf{R}^p$ et d'intégrale égale à 1 (On se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe « Intégrales multiples »). Soit f une densité de probabilité sur $\mathbf{R}^p$. On dit qu'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_p)$ possède la loi de densité f, si pour tous intervalles $I_1, ..., I_p$ de $\mathbf{R}$,

$$P[\{X_1 \in I_1\} \cap ... \cap \{X_p \in I_p\}] = \int_{I_1} \dots \int_{I_p} f(x_1, ..., x_p) \,\mathrm{d}\, x_1 \dots \mathrm{d}\, x_p.$$

Soit $X = (X_1, \dots,\ X_p)$ un vecteur aléatoire de loi de densité f. Soit ψ un produit d'une fonction continue de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$ par une fonction indicatrice d'un domaine « géométriquement simple » de $\mathbf{R}^p$ et telle que la fonction $|\psi| f$ soit intégrable sur $\mathbf{R}^p$. On admettra que $\psi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par :

$$\mathrm{E}[\psi(X)] = \int_{\mathbf{R}} \dots \int_{\mathbf{R}} \psi(x_1, x_2, \dots, x_p) f(x_1, x_2, \dots, x_p) \,\mathrm{d}\, x_1 \dots \mathrm{d}\, x_p.$$

Indépendance de p v.a.r. possédant une loi avec densité. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. indépendantes et possèdant une loi avec densité. Loi normale.

f) Théorèmes limites

Suites de v.a.r. indépendantes. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et loi faible des grands nombres.

Les résultats suivants sont admis : Loi forte des grands nombres pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées possèdant une espérance. Théorème central limite pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées et de variance finie.

Approximations de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi normale (loi de Gauss).

15. Géométrie différentielle

Les notions qui suivent doivent être illustrées par des exemples.

a) Courbes paramétrées en dimension 2 et 3

Étude locale d'une courbe paramétrée du plan. Changement birégulier de paramètre. Tangente, concavité, forme d'un arc au voisinage d'un point régulier ou singulier. Construction d'une courbe en coordonnées polaires.

Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace. plan osculateur.

b) Propriétés métriques des courbes

Longueur d'un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$. Abscisse curviligne.

En dimension 2, repère de Frenet. Courbure, centre de courbure.
En dimension 3, repère de Frenet, courbure, torsion.

c) Cinématique

Vitesse, accélération. Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, circulaires, à accélération centrale. Oscillateurs harmoniques. Exemples de problèmes de mécanique (pendule, chute des corps, mouvements des planètes).

Épreuves écrites

4 Rapport sur les épreuves écrites

4.1 Première épreuve écrite

4.1.1 Énoncé de la première épreuve écrite

On tâche de couvrir la plus grande surface possible d'un jardin carré par des dalles circulaires de même rayon ne se chevauchant pas. Il s'agit donc principalement de *géométrie*. Un dessin est fort utile, voire indispensable, pour découvrir, puis décrire l'idée d'une démonstration, ou illustrer un point de raisonnement ; il ne saurait toutefois constituer une démonstration à lui seul, et doit toujours être accompagné de notations précises et de justifications fournissant un raisonnement complet. Le barème tiendra largement compte des dessins et de leur justification.

Notations

On note E le plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Dans certaines questions, on identifie $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$ par l'application $(x,y) \mapsto x+iy$; on pourra, dès qu'il paraît utile, faire usage de cette identification. Deux parties X et Y de E sont dites *isométriques* s'il existe une isométrie φ de E telle que $\varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{Y}$.

Si A, B, C sont des points de E, on note :

AB le segment d'extrémités A et B, enveloppe convexe de l'ensemble $\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$,

$d(\mathrm{A},\mathrm{B})$ la distance entre les points A et B,

ABC l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\}$, appelée triangle ABC lorsque les points A, B et C ne sont pas alignés.

Soient a un nombre réel $\geqslant 0$ et M un point de E. On note $\mathrm{D}(\mathrm{M},a)$ le disque ouvert, $\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{M},a)$ le disque fermé et $\mathrm{C}(\mathrm{M},a)$ le cercle de centre M et de rayon a. Lorsque $a=1$, on écrit $\mathrm{D}(\mathrm{M})$ au lieu de $\mathrm{D}(\mathrm{M},1)$.

On pose $\mathrm{Q}(a) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leqslant a,\ |y| \leqslant a\}$ et $\mathrm{Q}^0(a) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < a,\ |y| < a\}$; un *carré de côté* $2a$ est une partie de E isométrique à $\mathrm{Q}(a)$.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties bornées de E qui ont une aire, et on note $s(\mathrm{X})$ l'aire d'un élément X de $\mathcal{A}$: c'est un nombre réel positif.

Par exemple, l'aire du carré $\mathrm{Q}(1)$ vaut 4 et celle d'un disque $\mathrm{D}(\mathrm{M})$ vaut π.

On **admet** que toutes les parties de E que le problème amène à considérer sont dans $\mathcal{A}$, pourvu qu'elles soient bornées ; aucune difficulté ne sera soulevée sur ce point. On admet aussi les propriétés suivantes :

a) Soient X et Y des éléments de $\mathcal{A}$; si Y contient X, on a $s(\mathrm{X}) \leqslant s(\mathrm{Y})$, et l'ensemble $\mathrm{Y}-\mathrm{X}$, complémentaire de X dans Y, appartient aussi à $\mathcal{A}$.

b) Soit $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille *finie* d'éléments de $\mathcal{A}$; alors l'intersection des X_i (si l'ensemble I n'est pas vide), ainsi que leur réunion appartiennent encore à $\mathcal{A}$. De plus, on a

$$s\Big(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i\Big) \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} s(\mathrm{X}_i),$$

avec égalité si les ensembles X_i sont disjoints deux à deux.

c) Soit X un élément de $\mathcal{A}$, et soit φ une application affine de E dans lui-même ; alors, l'ensemble $\varphi(\mathrm{X})$ appartient à $\mathcal{A}$, et l'on a

$$s(\varphi(\mathrm{X})) = |\lambda|\ s(\mathrm{X}),$$

où λ est le déterminant de l'application linéaire associée à φ.

d) Toute partie de E qui est incluse dans un segment de droite ou un cercle, appartient à $\mathcal{A}$ et son aire vaut 0.

Sauf (par exception) dans la question (VI, 7), les raisonnements menant à des calculs d'aires devront s'appuyer sur les propriétés a) à d) et sur les exemples donnés ci-dessus. S'il s'avère nécessaire d'utiliser une autre propriété connue des aires, il conviendra d'expliciter celle-ci.

Soit X un élément de $\mathcal{A}$; on appelle *dallage* de X une famille finie $(\mathrm{D}(\mathrm{M}_i))_{i\in\mathrm{I}}$ de disques ouverts (de rayon 1) inclus dans X et *disjoints deux à deux*. Le cardinal Card(I) est appelé cardinal (ou nombre d'éléments) du dallage.

Les six parties s'enchaînent logiquement. Chaque question peut être traitée en admettant les résultats établis dans les questions antérieures.

I. Préliminaires

1) Quelle est l'aire d'un carré de côté $2a$? 2) Pour un point M quelconque de E, quelles sont les aires des disques $\mathrm{D}(\mathrm{M},a)$ et $\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{M},a)$? 3) Soit X un élément de $\mathcal{A}$ et soit $(\mathrm{D}(\mathrm{M}_i))_{i\in\mathrm{I}}$ un dallage de X. Donner, en termes de $s(\mathrm{X})$, une majoration du cardinal de I. Pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, on note $\mathrm{N}(a)$ le cardinal maximal des dallages du carré $\mathrm{Q}(a)$. On définit ainsi une application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$, qui est évidemment croissante. 4) Déterminer la valeur de $\mathrm{N}(a)$ pour $0 \leqslant a \leqslant 1$. 5) Démontrer qu'un disque $\mathrm{D}(\mathrm{M})$, contenu dans $\mathrm{Q}(a)$, est en fait contenu dans $\mathrm{Q}^0(a)$. 6) Soient n un entier $\geqslant 1$ et a un nombre réel $\geqslant 0$. Démontrer que l'on a $\mathrm{N}(na) \geqslant n^2\,\mathrm{N}(a)$. 7) Soit a un nombre réel $\geqslant 1$ et soit $(\mathrm{M}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de points de E. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la famille $(\mathrm{D}(\mathrm{M}_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est un dallage du carré $\mathrm{Q}(a)$;

(ii) le carré $\mathrm{Q}(a-1)$ contient chacun des points M_i et, pour i et j distincts dans I, on a $d(\mathrm{M}_i,\mathrm{M}_j) \geqslant 2$. 8) Démontrer qu'il existe un nombre réel $a_2 \geqslant 0$ tel que $\mathrm{N}(a_2) = 2$ et $\mathrm{N}(a) < 2$ pour $0 \leqslant a < a_2$, et déterminer a_2. 9) Soit a un nombre réel $\geqslant 0$, et soit n un entier tel que l'on ait $\mathrm{N}(b) \geqslant n$ pour tout nombre réel $b > a$. Démontrer que l'on a $\mathrm{N}(a) \geqslant n$. [On pourra choisir, pour tout entier $k \geqslant 1$, un dallage $(\mathrm{D}(\mathrm{M}_i(k)))_{1\leqslant i\leqslant n}$ du carré $\mathrm{Q}(a+\frac{1}{k})$, et faire un raisonnement de compacité en utilisant la question 7)]

II. Existence de δ

Pour tout nombre réel $a > 0$, on pose $d(a) = \mathrm{N}(a)/a^2$. 1) Trouver une majoration de $d(a)$ pour $a > 0$. 2) Soient a un nombre réel > 0, n un entier $\geqslant 0$ et α un nombre réel tel que $0 \leqslant \alpha < 1$. Donner une minoration de $d((n+\alpha)a)$ en termes de $d(a)$ et de n (minoration indépendante de α). 3) On note δ la borne supérieure des $d(a)$ pour $a > 0$. Démontrer que $d(a)$ tend vers δ lorsque a tend vers $+\infty$.

III. Minoration de δ

Dans cette partie, on identifie $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$; on note $|z|$ le module du nombre complexe z. On pose $j = e^{2\pi i/3}$ et on note Λ le sous-groupe (additif) de $\mathbf{C}$ engendré par 2 et $2j$. 1) Démontrer que le module de tout élément non nul de Λ est au moins égal à 2. 2) En estimant le nombre des points de Λ situés dans un carré $\mathrm{Q}(a)$, démontrer que l'on a $\delta \geqslant 2/\sqrt{3}$.

IV. Un résultat auxiliaire

Dans cette partie, on identifie encore $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$, et on note $\overline{\mathrm{D}}$ l'ensemble des nombres complexes dont le module est $\leqslant 1$. Pour z_1, z_2, z_3 dans $\mathbf{C}$, on note $\mu(z_1, z_2, z_3)$ la plus petite des distances $|z_1 - z_2|$, $|z_2 - z_3|$ ou $|z_3 - z_1|$.

1) Démontrer que l'ensemble $\mu(\overline{\mathrm{D}} \times \overline{\mathrm{D}} \times \overline{\mathrm{D}})$ est une partie compacte, non vide, de $\mathbf{R}$. On note m le plus grand élément de cette partie. 2) Soient α, β, γ des nombres réels. Démontrer l'inégalité $\mu(e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}) \leqslant \sqrt{3}$ [on pourra se ramener à $\alpha = 0$]. 3) Soient z_1, z_2, z_3 des nombres complexes dont les modules sont $\leqslant 1$, mais pas tous égaux à 1.

a) Construire, par une manipulation géométrique simple à partir de z_1, z_2, z_3, des nombres complexes t_1, t_2, t_3 dont le module est $\leqslant 1$ et qui satisfont à $\mu(t_1, t_2, t_3) > \mu(z_1, z_2, z_3)$ [on pourra distinguer suivant le nombre des indices i pour lesquels $|z_i| = 1$].

b) En déduire que l'on a $m = \sqrt{3}$ et $\mu(z_1, z_2, z_3) < \sqrt{3}$.

V. Majoration de δ

Dans cette partie et la suivante, on va démontrer que δ vaut $2/\sqrt{3}$. On fixe un nombre réel $a \geqslant 1$ et on fixe aussi un dallage $(\mathrm{D}(\mathrm{M}_i))_{i\in\mathrm{I}}$ du carré $\mathrm{Q}(a)$. Pour $i \in \mathrm{I}$, on écrit D_i au lieu de $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i)$, on note Δ_i le disque ouvert $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i, 2/\sqrt{3})$ et Γ_i le cercle $\mathrm{C}(\mathrm{M}_i, 2/\sqrt{3})$. On note $\overline{\mathrm{Q}}$ le carré $\mathrm{Q}(a + \frac{2}{\sqrt{3}} - 1)$; le carré $\overline{\mathrm{Q}}$ contient tous les disques Δ_i, $i \in \mathrm{I}$.

Pour certaines questions, il pourra être commode de calculer en termes de coordonnées dans un repère orthonormé de E adapté à la situation.

1) Soient i et j deux indices distincts dans I. Démontrer que l'ensemble des points M de E qui satisfont à l'inégalité $d(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}) < d(\mathrm{M}_j, \mathrm{M})$ est un demi-plan ouvert, et préciser quelle est la droite bordant ce demi-plan. Pour $i \in \mathrm{I}$, on note V_i l'ensemble des points M du disque Δ_i qui satisfont aux inégalités

$$d(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}) < d(\mathrm{M}_j, \mathrm{M}) \quad \text{pour tout indice } j \in \mathrm{I} \text{ distinct de } i.$$

2) Démontrer que V_i est une partie ouverte de Δ_i contenant D_i. Dans la partie VI qui termine ce problème, on démontrera, pour tout $i \in \mathrm{I}$, l'inégalité

$$s(\mathrm{D}_i) \leqslant (\pi/2\sqrt{3})\, s(\mathrm{V}_i).$$

3) Admettant cela, prouver que l'on a $s\big(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{D}_i\big) \leqslant (\pi/2\sqrt{3})\, s(\overline{\mathrm{Q}})$.

4) En déduire que δ vaut $2/\sqrt{3}$.

VI. Démonstration d'une inégalité

On garde les notations de la partie précédente, mais on fixe l'indice $i \in \mathrm{I}$. On note $\mathrm{I}(i)$ l'ensemble des indices $j \in \mathrm{I}$, distincts de i, tels que $\Delta_i \cap \Delta_j$ ne soit pas vide.

1) Soit $j \in \mathrm{I}(i)$. Démontrer que les cercles Γ_i et Γ_j se coupent en deux points qui ne sont pas alignés avec M_i. Pour $j \in \mathrm{I}(i)$, on note A_j et B_j ces deux points d'intersection. On note T_j l'*intérieur* du triangle $\mathrm{M}_i\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j$, c'est-à-dire l'ensemble des barycentres à coefficients *strictement* positifs de M_i, A_j, B_j.

Pour un point M de Δ_i, distinct de M_i, on note $p(\mathrm{M})$ l'unique point de Γ_i situé sur la demi-droite d'origine M_i qui contient le point M.

2) Démontrer que, pour tout $j \in \mathrm{I}(i)$, on a $p(\mathrm{T}_j) = \Delta_j \cap \Gamma_i$.

3) Soient j et k deux indices distincts dans $\mathrm{I}(i)$. Démontrer que les ensembles $p(\mathrm{T}_j)$ et $p(\mathrm{T}_k)$ sont disjoints [utiliser la partie IV]. En déduire que les ensembles T_j et T_k sont disjoints. 4) Soit $j \in \mathrm{I}(i)$ et soit M un point de Δ_i distinct de M_i. Prouver que, si l'on a $d(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}) \geqslant d(\mathrm{M}_j, \mathrm{M})$, alors le point $p(\mathrm{M})$ appartient à $\Delta_j \cap \Gamma_i$. 5) Pour $j \in \mathrm{I}(i)$, démontrer que l'ensemble T_j est formé des points de l'ensemble V_i (défini dans la partie V), distincts de M_i, et dont l'image par p appartient à $\Delta_j \cap \Gamma_i$. 6) On note W_i l'ensemble des points de V_i qui n'appartiennent à aucun des T_j, $j \in \mathrm{I}(i)$. Démontrer l'égalité $s(\mathrm{W}_i \cap \mathrm{D}_i) = 3\, s(\mathrm{W}_i)/4$. 7) Dans cette question, on pourra utiliser les formules usuelles donnant l'aire d'un triangle ; on pourra aussi utiliser qu'un secteur circulaire de sommet M du disque $\mathrm{D}(\mathrm{M})$, dont l'angle a pour mesure α ($0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$), a une aire égale à $\alpha/2$.

Démontrer que, pour $j \in \mathrm{I}(i)$, on a

$$s(\mathrm{T}_j \cap \mathrm{D}_i) \leqslant (\pi/2\sqrt{3})\, s(\mathrm{T}_j)$$

[on pourra noter 2ℓ la distance $d(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}_j)$ et 2β la mesure de l'angle en M_i du triangle $\mathrm{M}_i\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j$].

8) Démontrer enfin l'inégalité $s(\mathrm{D}_i) \leqslant (\pi/2\sqrt{3})\, s(\mathrm{V}_i)$.

4.1.2 Solution de la première épreuve écrite

I. Préliminaires

1) L'homothétie $x \mapsto ax$, de rapport $a \geqslant 0$, dans $\mathbf{R}^2$, a pour déterminant $4\,\mathrm{F}a^2$. Elle transforme $\mathrm{Q}(1)$ en $\mathrm{Q}(a)$. D'après la propriété c), $s(\mathrm{Q}(a)) = a^2\, s(\mathrm{Q}(1))$ d'où $s(\mathrm{Q}(a)) = 4a^2$.

Puisqu'une isométrie vectorielle de $\mathbf{R}^2$ a pour déterminant 1 ou -1, le même raisonnement prouve qu'un carré de côté $2a$ a pour aire a^2.

2) L'application affine de E dans E donnée par $x \mapsto \mathrm{M} + ax$ (translation $\circ$ homothétie) transforme le disque $\mathrm{D}(0,1)$ en le disque $\mathrm{D}(\mathrm{M},a)$. L'application linéaire associée a pour déterminant a^2, donc $\mathrm{D}(\mathrm{M},a)$ a pour aire πa^2 (propriété c)).

Le cercle $\mathrm{C}(\mathrm{M},a)$ a une aire nulle (propriété d)), et $\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{M},a)$, réunion des ensembles disjoints $\mathrm{D}(\mathrm{M},a)$ et $\mathrm{C}(\mathrm{M},a)$, a aussi pour aire πa^2 (propriété b)).

3) Comme les disques $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i)$ sont deux à deux disjoints, on a, par la propriété b),

$$s(\cup_i \mathrm{D}(\mathrm{M}_i)) = \sum_i s(\mathrm{D}(\mathrm{M}_i)),$$

qui vaut π Card (I) car $s(\mathrm{D}(\mathrm{M}_i)) = \pi$ d'après(I.2).

Puisque l'ensemble X contient les disques $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i)$, la propriété a) entraîne π Card (I) $\leqslant s(\mathrm{X})$.

4) Pour $0 \leqslant a \leqslant 1$, on a $\mathrm{N}(a) \leqslant \mathrm{N}(1) \leqslant s(\mathrm{Q}(1))/\pi = 4/\pi < 2$, d'où $\mathrm{N}(a) \leqslant 1$, puisque $\mathrm{N}(a)$ est entier.

Comme le carré $\mathrm{Q}(1)$ contient le disque $\mathrm{D}(0)$, on a $\mathrm{N}(1) = 1$.

Soit $\mathrm{D}(\mathrm{M}_0)$, où $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$, un disque inclus dans $\mathrm{Q}(a)$. Le point $(x_0 + t, y_0)$ appartient alors au carré $\mathrm{Q}(a)$ pour $t \in]-1,1[$, ce qui donne $x_0 + 1 \leqslant a$, $x_0 - 1 \geqslant -a$, d'où $2a \geqslant 2$. Donc $\mathrm{N}(a) = 0$ pour $0 \leqslant a < 1$.

5) Soit $\mathrm{D}(\mathrm{M}_0)$, où $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$, un disque contenu dans $\mathrm{Q}(a)$, $a \geqslant 1$. Comme dans la question (I.4), on obtient $x_0 \in [-a+1, a-1]$ et de même pour y_0. Si un point $\mathrm{M} = (x,y)$ appartient à $\mathrm{D}(\mathrm{M}_0)$, on a

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < 1,$$

d'où $|x - x_0| < 1$ et $|y - y_0| < 1$, ce qui implique que x et y sont dans l'intervalle $]-a,a[$ et démontre que $\mathrm{D}(\mathrm{M})$ est contenu dans $\mathrm{Q}^0(a)$.

Le cas $a < 1$ est trivial (*cf.* (I.4)).

6) Soit $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i)$, $i = 1, \ldots, \mathrm{N}(a)$ un dallage de $\mathrm{Q}(a)$; les disques $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i)$ sont donc contenus dans le carré ouvert $\mathrm{Q}^0(a)$. Considérons les n^2 translatés de $\mathrm{Q}^0(a)$ par les vecteurs

$$v_{\ell,k} = ((2k+1-n)a, (2\ell+1-n)a), \quad k \text{ et } \ell \text{ variant de } 0 \text{ à } n-1.$$

Le carré translaté $\mathrm{Q}^0(a) + v_{\ell,k}$ est l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ satisfaisant aux inégalités

$$(2k-n)a < x < (2(k+1)-n)a, \quad (2\ell-n)a < y < (2(\ell+1)-n)a.$$

Donc ces translatés sont deux à deux disjoints et contenus dans le carré $\mathrm{Q}(na)$. La famille des $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i) + v_{\ell,k}$, i variant de 1 à $\mathrm{N}(a)$, et k et ℓ de 0 à $n-1$, est un dallage de $\mathrm{Q}(na)$ dont le cardinal est $n^2\mathrm{N}(a)$. On a donc $\mathrm{N}(na) \geqslant n^2\mathrm{N}(a)$.

7) On a déjà vu en (I.5) que, si le disque $\mathrm{D(M)}$ est contenu dans le carré $\mathrm{Q}(a)$, alors le point M appartient au carré $\mathrm{Q}(a-1)$. Le même raisonnement qu'en (I.5) prouve la réciproque.

Par ailleurs, si $d(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) < 2$, alors le milieu I du segment $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ est à une distance < 1 de M_1 et de M_2, donc ce point appartient à l'intersection $\mathrm{D(M_1)} \cap \mathrm{D(M_2)}$; ce qui prouve que les disques $\mathrm{D(M_1)}$ et $\mathrm{D(M_2)}$ ne sont pas disjoints.

Réciproquement, si un point M appartient à l'intersection $\mathrm{D(M_1)} \cap \mathrm{D(M_2)}$, on a $d(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) < 2$ en appliquant l'inégalité triangulaire.

Donc $d(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) \geqslant 2$ équivaut bien à $\mathrm{D(M_1)} \cap \mathrm{D(M_2)} = \emptyset$.

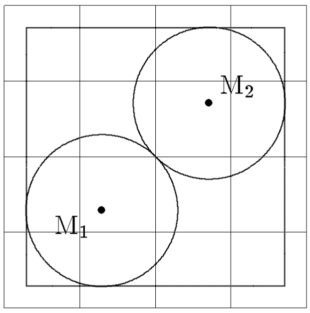
En regroupant ces deux équivalences, on obtient le résultat demandé.

8) Soit $b \geqslant 0$ et soient $\mathrm{M}_1 = (x_1, y_1)$ et $\mathrm{M}_2 = (x_2, y_2)$ deux points du carré $\mathrm{Q}(b)$. On a $|x_1 - x_2| \leqslant 2b$, $|y_1 - y_2| \leqslant 2b$, d'où $d(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) \leqslant 2b\sqrt{2}$. Pour $0 \leqslant b < \sqrt{2}/2$, d'après (I.7), on a donc $\mathrm{N}(1+b) \leqslant 1$. D'après (I.4) et le fait que l'application N est croissante, on a $\mathrm{N}(1+b) = 1$.

Pour $b = \sqrt{2}/2$, on prend $\mathrm{M}_1 = (-b, -b)$, $\mathrm{M}_2 = (b, b)$ et l'on a alors $d(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) = 2$. D'après (I.7), on a donc $\mathrm{N}(1 + \sqrt{2}/2) \geqslant 2$ (voir figure).

Supposons toujours $b = \sqrt{2}/2$. les seuls couples de points M_1, M_2 de $\mathrm{Q}(\sqrt{2}/2)$, distants de plus de 2, sont les couples d'extrémités des diagonales du carré $\mathrm{Q}(\sqrt{2}/2)$. Il n'y a donc pas de triplet de points du carré $\mathrm{Q}(\sqrt{2}/2)$ dont les distances mutuelles soient $\geqslant 2$. Par suite $\mathrm{N}(1 + \sqrt{2}/2) = 2$.

On a prouvé l'existence du nombre a_2 en démontrant que le nombre $1 + \sqrt{2}/2$ avait les propriétés souhaitées.



9) C'est clairement vrai d'après (I.4) lorsque $0 \leqslant a < 1$: en effet, dans ce cas, on a nécessairement $n = 0$ et $\mathrm{N}(a) = 0$.

On suppose dans la suite $a \geqslant 1$. Pour chaque entier $k \geqslant 1$, choisissons un dallage $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i(k))$, $i = 1, \ldots, n$, du carré $\mathrm{Q}(a + \frac{1}{k})$ par n disques. Alors, le point $(\mathrm{M}_1(k), \ldots, \mathrm{M}_n(k))$ de E^n appartient produit de carrés $\mathrm{Q}(a)^n$. Le carré $\mathrm{Q}(a)$, fermé et borné dans E, est compact ; un produit d'espaces compacts est compact ; donc le produit $\mathrm{Q}(a)^n$ est un espace compact. On a donc, dans $\mathrm{Q}(a)^n$, une valeur d'adhérence $(\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n)$ de la suite des n-uplets $(\mathrm{M}_1(k), \ldots, \mathrm{M}_n(k))$.

Comme la distance est une fonction continue sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$, les inégalités $d(\mathrm{M}_i(k), \mathrm{M}_j(k)) \geqslant 2$ pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, entraînent $d(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}_j) \geqslant 2$.

Pour k et ℓ entiers, $k \geqslant \ell \geqslant 1$, le point $\mathrm{M}_i(k)$ appartient au carré $\mathrm{Q}(a + \frac{1}{\ell} - 1)$ d'après (I.7). Les coordonnées du point $\mathrm{M}_i(k)$ sont donc $\leqslant a + \frac{1}{\ell} - 1$ en valeur absolue. Faisant tendre ℓ vers $+\infty$, on voit que le point M_i appartient au carré $\mathrm{Q}(a-1)$. Appliquant (I.7) à nouveau, on conclut que $(\mathrm{D}(\mathrm{M}_i))$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est un dallage de $\mathrm{Q}(a)$. On en déduit $\mathrm{N}(a) \geqslant n$.

II . Existence de δ

1) D'après (I.1), on a $s(\mathrm{Q}(a)) = 4a^2$. En appliquant (I.3) à l'ensemble $\mathrm{X} = \mathrm{Q}(a)$, on obtient $\mathrm{N}(a) \leqslant 4a^2/\pi$, d'où $d(a) \leqslant 4/\pi$.

2) Puisque la fonction N est croissante, on a $\mathrm{N}((n+\alpha)a) \geqslant \mathrm{N}(n\alpha)$. D'après (I.6), on a $\mathrm{N}(na) \geqslant n^2\,\mathrm{N}(a)$, d'où $\mathrm{N}((n+\alpha)a) \geqslant n^2\,\mathrm{N}(a)$, ce qui s'écrit

$$(n+\alpha)^2\, d((n+\alpha)a) \geqslant n^2\, d(a).$$

Il en résulte

$$(n+1)^2\, d((n+\alpha)a) \geqslant n^2\, d(a),$$

et finalement

$$d((n+\alpha)a) \geqslant \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^2 d(a).$$

3) Soit η un nombre réel, $0 < \eta < 1$, et soit a un nombre réel > 0 tel que $d(a) \geqslant \delta\eta$. Comme la fonction $n \mapsto \big(\frac{1}{1+1/n}\big)^2$ est croissante et tend vers 1 quand n tend vers l'infini, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que

$$\Big(\frac{1}{1+1/n}\Big)^2 \geqslant \eta \quad \text{pour} \quad n \geqslant k.$$

Si l'on a $b \geqslant ka$, il existe alors un entier $n \geqslant k$ et un nombre réel α, $0 \leqslant \alpha < 1$ tels que $b = (n+\alpha)a$, et, d'après (II.2), on a $d(b) \geqslant \delta\eta^2$. Comme on a, par ailleurs, $d(b) \leqslant \delta$, cela montre que $d(a)$ tend vers δ quand a tend vers l'infini.

III. Minoration de δ

1) Les éléments de Λ sont les nombres complexes $z = 2a + 2bj$ où a et b sont entiers. On calcule

$$|z|^2 = (2a-b)^2 + 3b^2 = 4(a^2 - ab + b^2).$$

Si le nombre complexe z n'est pas nul, le nombre entier $(a^2 - ab + b^2)$ ne l'est pas non plus, et on a donc $|z|^2 \geqslant 4$.

2) Soient λ et μ dans Λ ; si $\lambda \neq \mu$, on a $\lambda - \mu \in \Lambda - \{0\}$ donc $d(\lambda, \mu) \geqslant 2$ d'après la question (III.1). Soit a un nombre réel $\geqslant 1$. D'après (I.7), les disques $\mathrm{D}(\lambda)$, où λ parcourt $\mathrm{Q}(a-1) \cap \Lambda$, forment donc un dallage de $\mathrm{Q}(a)$. On a donc $\delta \geqslant \operatorname{Card}(\mathrm{Q}(a-1)\cap\Lambda)/a^2$.

Évaluons $\operatorname{Card}(\mathrm{Q}(a-1)\cap\Lambda)$ pour $a \geqslant 2$. Un point $2x + 2yj$ de Λ appartient à $\mathrm{Q}(a-1)$ si et seulement si $|y| \leqslant (a-1)/\sqrt{3}$ et $|2x - y| \leqslant a - 1$, ce qui équivaut à

$$|y| \leqslant (a-1)/\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \frac{-a+1+y}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a-1+y}{2}.$$

Soient ℓ un nombre réel $\geqslant 0$ et $[\ell]$ sa partie entière ; un intervalle compact de $\mathbf{R}$, de longueur ℓ, contient au moins $[\ell]$ points entiers, et on a $[\ell] \geqslant \ell - 1$. On obtient donc

$$\operatorname{Card}(\mathrm{Q}(a-1)\cap\Lambda) \geqslant \Big(\frac{2(a-1)}{\sqrt{3}} - 1\Big)(a-1-1),$$

d'où

$$\delta \geqslant \frac{1}{a^2}\Big(\frac{2(a-1)}{\sqrt{3}} - 1\Big)(a-2).$$

Faisant tendre a vers l'infini, on trouve $\delta \geqslant 2/\sqrt{3}$.

IV . Un résultat auxiliaire

1) Pour x et $y \in \mathbf{R}$, on a

$$\inf(x, y) = \frac{x+y}{2} - \left|\frac{x-y}{2}\right|.$$

Comme la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbf{R}$, l'application $(x, y) \mapsto \inf(x, y)$ est continue sur $\mathbf{R}^2$. Comme composée de fonctions continues, la borne inférieure de deux fonctions continues de E^3 dans $\mathbf{R}$ est donc continue, et, par récurrence, il en est de même de la borne inférieure de k fonctions continues sur E^3, pour tout entier $k \geqslant 1$. Par suite la fonction μ est continue sur E^3.

D'autre part, l'ensemble $\overline{\mathrm{D}}$ est fermé et borné dans E. Il est donc compact, de même que le produit $(\overline{\mathrm{D}}^{\,3})$.

L'image $\mu(\overline{\mathrm{D}}^{\,3})$ (d'un espace compact par une application continue) est une partie compacte de $\mathbf{R}$. Bien sûr, l'ensemble $\mu(\overline{\mathrm{D}}^{\,3})$ n'est pas vide et il a donc un plus grand élément m.

2) On calcule

$$\begin{aligned}|e^{i\beta} - e^{i\alpha}|^2 &= |e^{i(\beta-\alpha)} - 1|^2,\\ &= (\cos(\beta-\alpha) - 1)^2 + (\sin(\beta-\alpha))^2,\\ &= 2(1 - \cos(\beta-\alpha)),\end{aligned}$$

d'où

$$|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2\left|\sin\Big(\frac{\beta-\alpha}{2}\Big)\right|.$$

On peut supposer $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$, la conclusion ne dépendant que de $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$ à l'ordre près. On a donc

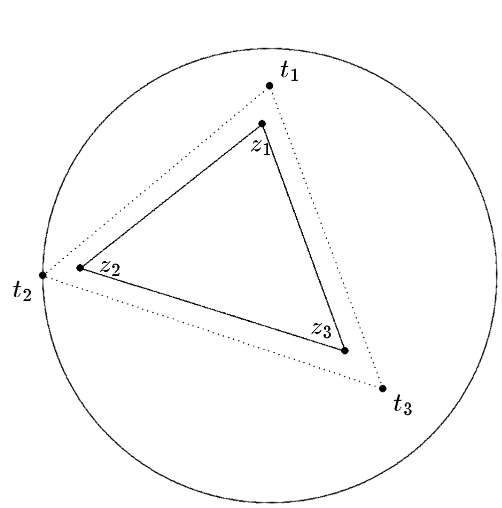
$$(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) + (\alpha + 2\pi - \gamma) = 2\pi,$$

et l'une des différences est $\leqslant 2\pi/3$. La distance correspondante est alors $\leqslant 2\sin(\pi/3) = \sqrt{3}$.

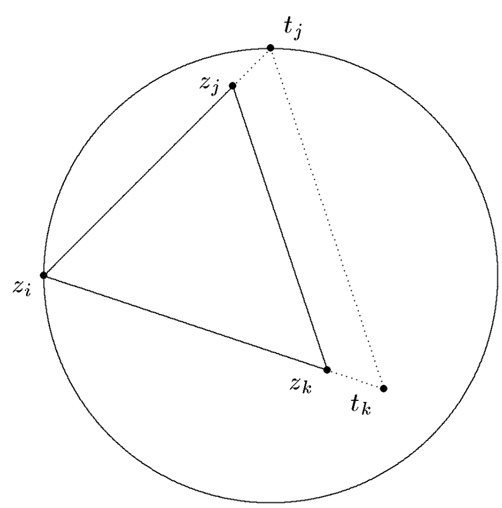
3. a) Si $\mu(z_1, z_2, z_3) = 0$, deux des nombres z_i sont égaux. On prend alors $(t_1, t_2, t_3) = (1, j, j^2)$. On suppose dans la suite que les z_i sont deux à deux distincts. On désigne par n le nombre des indices i pour lesquels $|z_i| = 1$.

Supposons d'abord $n = 0$. On note alors t le plus grand des modules des nombres z_i ; on a $0 < t < 1$. On pose $t_i = z_i/t$ pour $i = 1, 2, 3$. On a bien $|t_i| \leqslant 1$ pour $i = 1, 2, 3$ et

$$\mu(t_1, t_2, t_3) = \mu(z_1, z_2, z_3)/t > \mu(z_1, z_2, z_3).$$



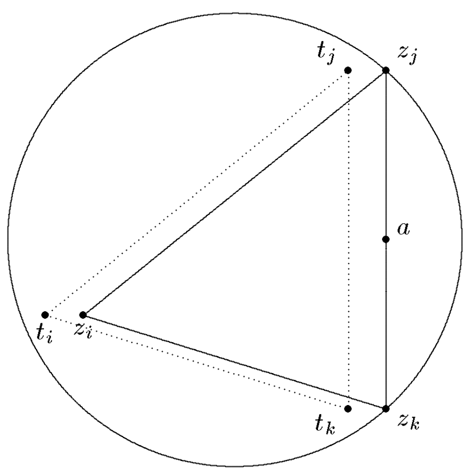
$n = 0$



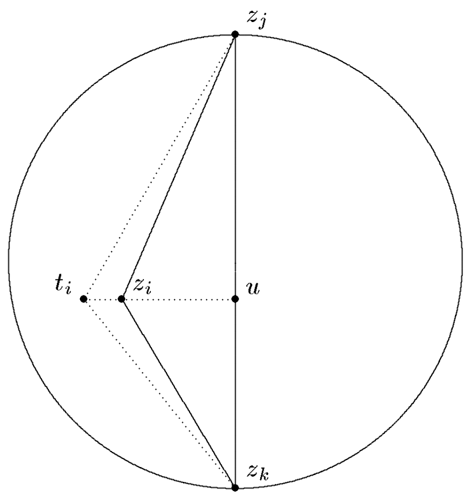
$n = 1$

Supposons ensuite $n = 1$. Soit i l'indice tel que $|z_i| = 1$. On note j et k les deux autres indices ; on a $|z_j| < 1$ et $|z_k| < 1$. Pour $t > 1$, soit h_t l'homothétie de centre z_i, de rapport t. Pour tout point $z \in \mathbf{C}$, $h_t(z)$ tend vers z lorsque t tend vers 1. Donc, pour t assez proche de 1, on a $|h_t(z_j)| < 1$ et $|h_t(z_k)| < 1$. On choisit un tel $t > 1$ et on pose $t_i = z_i$, $t_j = h_t(z_j)$, $t_k = h_t(z_k)$. On a bien $|t_i| \leqslant 1$ pour $i = 1, 2, 3$ et

$$\mu(t_1, t_2, t_3) = t\,\mu(z_1, z_2, z_3) > \mu(z_1, z_2, z_3).$$



$n = 2, \quad z_j + z_k \neq 0$



$n = 2, \quad z_j + z_k = 0$

Supposons enfin $n = 2$. On suppose $|z_i| < 1$, $|z_j| = |z_k| = 1$. Soit a le milieu du segment $z_j z_k$. Si $a \neq 0$, c'est-à-dire si les points z_j et z_k ne sont pas diamétralement opposés sur le cercle unité, on effectue une translation τ de vecteur $-\varepsilon a$, où $0 < \varepsilon < 1$ et où ε est assez petit pour que $|z_i - \varepsilon a|$ reste < 1. Comme $z_j - a$ et a sont orthogonaux, on a

$$|z_j|^2 = |z_j - a|^2 + |a|^2,$$
$$|z_j - \varepsilon a|^2 = |z_j - a|^2 + |(1-\varepsilon)a|^2.$$

On en déduit $|z_j - \varepsilon a| < |z_j|$. De même, on a $|z_k - \varepsilon a| < |z_k|$. On pose $z'_\ell = \tau(z_\ell)$ pour $\ell = i, j, k$; on a $\mu(z'_i, z'_j, z'_k) = \mu(z_i, z_j, z_k)$ puisque la translation τ conserve les longueurs. On est ainsi ramené au premier cas étudié où $n = 0$.

Si enfin $a = 0$, on déplace z_i perpendiculairement à la droite $z_j z_k$: si u est le projeté orthogonal de z_i sur la droite $z_j z_k$, on pose $t_j = z_j$, $t_k = z_k$ et $t_i = u + t(z_i - u)$, où $t > 1$ est assez proche de 1 pour que $|t_i| \leqslant 1$. On a alors

$$|t_i - z_j|^2 = |u - z_j|^2 + t^2\,|z_i - u|^2 > |z_i - z_j|^2,$$

d'où $|t_i - z_j| > |z_i - z_j|$ et, de même, $|t_i - z_k| > |z_i - z_k|$, d'où $\mu(t_i, t_j, t_k) = \mu(z_i, z_j, z_k)$.

3.b) Soit (u_1, u_2, u_3) un point de $\overline{\mathrm{D}}^3$ tel que $\mu(u_1, u_2, u_3) = m$. Alors, d'après (IV.3.a), tous les u_i ont pour module 1, et d'après (IV.2) on a donc $m \leqslant \sqrt{3}$.

Or, en considérant les points particuliers $1, j, j^2$ pour lesquels $\mu(1, j, j^2) = \sqrt{3}$, on obtient $m \geqslant \sqrt{3}$, d'où finalement $m = \sqrt{3}$.

A nouveau d'après (IV.3.a), on a $\mu(z_1, z_2, z_3) < \sqrt{3}$ puisque l'un des modules $|z_i|$ est < 1.

V . Majoration de δ

1) Les points M_i et M_j sont distincts. Soit L la médiatrice du segment $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j$. C'est l'ensemble des points M de E tels que $d(\mathrm{M},\mathrm{M}_i)=d(\mathrm{M},\mathrm{M}_j)$. Sur le complémentaire de L dans E, la fonction continue $\mathrm{M}\mapsto d(\mathrm{M},\mathrm{M}_i)-d(\mathrm{M},\mathrm{M}_j)$ prend des valeurs non nulles (en M_i et M_j par exemple). Son signe est constant dans chacun des demi-plans ouverts bornés par D (car ceux-ci sont connexes). L'ensemble considéré est donc le demi-plan ouvert borné par L qui contient le point M_i.

2) Remarquons d'abord que le disque D_i est contenu dans le disque Δ_i. Soit $\mathrm{M}\in\mathrm{D}_i$; on a $d(\mathrm{M},\mathrm{M}_i)<1$. Pour $j\in\mathrm{I}$, $j\neq i$, on a $d(\mathrm{M}_i,\mathrm{M}_j)>2$, donc $d(\mathrm{M},\mathrm{M}_j)>1$. Par suite le point M appartient à V_i, et on a démontré l'inclusion $\mathrm{D}_i\subset\mathrm{V}_i$.

Soit $j\in\mathrm{I}$, $j\neq i$; l'application $\mathrm{M}\mapsto d(\mathrm{M},\mathrm{M}_i)-d(\mathrm{M},\mathrm{M}_j)$ restreinte à Δ_i est continue. L'image réciproque U_j de $]-\infty,0[$ par cette application est ouverte dans Δ_i. L'ensemble V_i, intersection de la famille finie des ensembles U_j, pour $j\in\mathrm{I}$, $j\neq i$, est ouvert dans Δ_i, donc dans E.

3) Admettons l'inégalité $s(\mathrm{D}_i)\leqslant(\pi/2\sqrt{3})\,s(\mathrm{V}_i)$ pour tout $i\in\mathrm{I}$. On a

$$s(\cup_i\mathrm{D}_i)=\sum_i s(\mathrm{D}_i)\leqslant\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\sum_i s(\mathrm{V}_i).$$

Mais, par construction, les ensembles V_i sont disjoints deux à deux et on a donc $s(\cup_i\mathrm{V}_i)=\sum_i s(\mathrm{V}_i)$ d'après la propriété b) du Préambule. On en déduit

$$s(\cup_i\mathrm{D}_i)\leqslant\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,s(\cup_i\mathrm{V}_i).$$

Comme $\overline{\mathrm{Q}}$ contient tous les V_i, on obtient le résultat demandé.

3) On en déduit

$$\pi\,\mathrm{Card}\,(\mathrm{I})\leqslant\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,4\,(a+\frac{2}{\sqrt{3}}-1)^2,$$

d'où

$$d(a)\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\,(a+\frac{2}{\sqrt{3}}-1)^2/a^2.$$

Lorsque a tend vers $+\infty$, le second membre tend vers $2/\sqrt{3}$. On en déduit l'inégalité $\delta\leqslant2/\sqrt{3}$ d'après (II.3) et l'égalité $\delta=2/\sqrt{3}$ d'après (III.2).

VI. Démonstration d'une inégalité

On pose désormais $d(\mathrm{M}_i,\mathrm{M}_j)=2\ell$. On a $\ell\geqslant1$. 1) Comme en (I.7), $\Delta_i\cap\Delta_j=\phi$ signifie $d(\mathrm{M}_i,\mathrm{M}_j)<4/\sqrt{3}$, c'est-à-dire $\ell<2/\sqrt{3}$. Alors $\mathrm{C}_i\cap\mathrm{C}_j$ est formé des points M de E tels que $d(\mathrm{M},\mathrm{M}_i)=d(\mathrm{M},\mathrm{M}_j)=2/\sqrt{3}$. Notant J le milieu du segment $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j$, ce sont les points de la médiatrice du segment $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j$ satisfaisant à $d(\mathrm{M},\mathrm{J})^2=\frac{4}{3}-\ell^2$; il y en a deux exactement. Ils sont distincts de J et ne sont donc pas alignés avec M_i ni avec M_j.

2) L'ensemble T_j est formé des barycentres M à coefficients >0 de M_i et des points P du segment $\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j$, distincts de A_j et B_j ; on a alors $p(\mathrm{M})=p(\mathrm{P})$.

Choisissons un repère orthonormé d'origine M_i de sorte que le milieu J du segment $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j$ ait pour coordonnées $(\ell,0)$. Les coordonnées des points A_j et B_j sont (ℓ,m) et $(\ell,-m)$, avec $l^2+m^2=4/3$, $m>0$. Alors l'ensemble $\Gamma_i\cap\Delta_j$ est formé des points M dont les coordonnées (x,y) satisfont à

$$x^2+y^2=\frac{4}{3},\qquad(x-2\ell)^2+y^2<\frac{4}{3}.$$

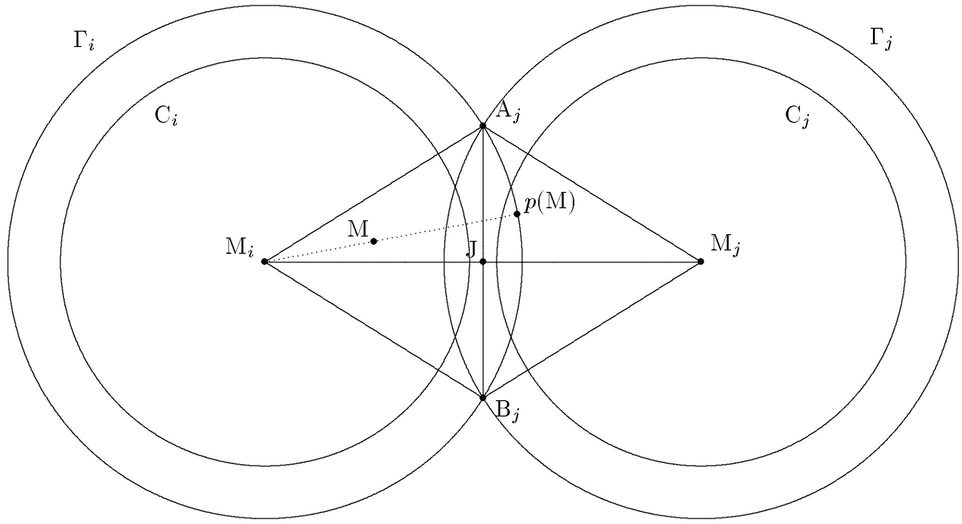
Compte tenu de la première équation, la deuxième relation équivaut à $x > \ell$. On a alors $\mathrm{M} = p(\mathrm{P})$ avec $\mathrm{P} = (\ell, \ell y/x)$ et

$$\left|\frac{\ell y}{x}\right| = \ell\,\frac{\sqrt{\frac{4}{3} - x^2}}{x} < \ell\,\frac{\sqrt{\frac{4}{3} - \ell^2}}{\ell} = m.$$

Donc le point P est bien dans le segment $\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j$ et distinct des points A_j et B_j. Ainsi l'ensemble $\Gamma_i \cap \Delta_j$ est contenu dans $p(\mathrm{T}_j)$.

Inversement, si P est dans le segment $\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j$ et distinct de A_j et B_j, il a pour coordonnées (ℓ, y) avec $|y| < m$. Le point $p(\mathrm{P})$ a pour coordonnées $\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{\ell^2+y^2}}\,(\ell, y)$. Comme on a $\ell^2 + y^2 < \ell^2 + m^2 = 4/3$, l'abscisse du point $p(\mathrm{P})$ est $> \ell$; ainsi $p(\mathrm{P})$ appartient à l'ensemble $\Gamma_i \cap \Delta_j$, et l'ensemble $p(\mathrm{T}_j)$ est contenu dans l'ensemble $\Gamma_i \cap \Delta_j$.

D'où finalement l'égalité $\Gamma_i \cap \Delta_j = p(\mathrm{T}_j)$.



NB. Dans la figure, le rapport des rayons des deux cercles a été altéré pour plus de lisibilité.

3) On a $p(\mathrm{T}_j) \cap p(\mathrm{T}_k) = \Delta_j \cap \Delta_k \cap \Gamma_i$ d'après la question précédente. Soit M un point de cette intersection. Alors le point M est à distance $2/\sqrt{3}$ de M_i, et à distance $< 2/\sqrt{3}$ de M_j et M_k. En appliquant (IV.3.b) (après une homothétie de rapport $2/\sqrt{3}$ et en prenant le point M pour origine) on obtient que l'une des distances $d(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}_j)$, $d(\mathrm{M}_j, \mathrm{M}_k)$, $d(\mathrm{M}_k, \mathrm{M}_i)$ est < 2, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que l'on a un dallage. Il en résulte donc $p(\mathrm{T}_j) \cap p(\mathrm{T}_k) = \phi$, ce qui nécessite $\mathrm{T}_j \cap \mathrm{T}_k = \phi$.

4) Avec le même repère et les mêmes notations qu'en (VI.2), l'inégalité $d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_i) \geqslant d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_j)$ signifie que les coordonnées (x, y) du point M satisfont à à $x \geqslant \ell$. Alors le point $p(\mathrm{M})$ a pour coordonnées $\frac{2}{\sqrt{3}}\,(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$ avec $r = d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_i) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si le point M_i appartient à Δ_i, alors $r < 2/\sqrt{3}$, d'où $\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{x}{r} > \ell$ et, d'après (VI.2) à nouveau, le point $p(\mathrm{M})$ appartient à $\Delta_j \cap \Gamma_i$.

5) Soit M un point de l'ensemble T_j. Alors $\mathrm{M} \neq \mathrm{M}_i$ et $p(\mathrm{M}) \in \Delta_j \cap \Gamma_i$ par (VI.2). Démontrons que le point M appartient à l'ensemble V_i. On note (x, y) les coordonnées du point M. On a bien $d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_i) < d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_j)$ car $0 < x < \ell$.

Supposons que l'on ait $d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_i) \geqslant d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_k)$ pour un indice k distinct de i et de j. On aurait alors $p(\mathrm{M}) \in \Delta_k \cap \Gamma_i$ d'après (VI.4), d'où $p(\mathrm{M}) \in p(\mathrm{T}_k)$ d'après (VI.2). Mais $p(\mathrm{T}_j) \cap p(\mathrm{T}_k)$ est vide par (VI.3). On a donc $d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_i) < d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_k)$ pour $k \neq i$, et le point M appartient à l'ensemble V_i.

Réciproquement soit M un point de V_i, distinct de M_i, tel que $p(\mathrm{M})$ soit dans $\Delta_j \cap \Gamma_i$. On note toujours (x, y) les coordonnées du point M. Comme $d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_i) < d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_j)$, on a $x < \ell$. La condition $p(\mathrm{M}) \in \Delta_j \cap \Gamma_i$ s'exprime (*cf.* (VI.2)) par

$$x > 0, \qquad \left|\frac{y}{x}\right| < \frac{m}{\ell},$$

et le point M est alors barycentre à coefficients $1 - x/\ell$ et x/ℓ respectivement des points M_i (de coordonnées $(0,0)$) et P (de coordonnées $(\ell, y\,\ell/x)$). Le point P appartient au segment $\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j$ en étant distinct de A_j et de B_j, donc le point M appartient à T_j.

6) Soit M un point de Δ_i, distinct de M_i et tel que $p(\mathrm{M})$ n'appartienne à aucun ensemble $\Delta_j \cap \Gamma_i$, $j \in \mathrm{I}(i)$. Alors, d'après (VI.4), le point M appartient à l'ensemble V_i. On en déduit que l'ensemble W_i est la réunion des rayons $[\mathrm{M}_i\mathrm{P}[$ où P parcourt l'ensemble des points de Γ_i qui ne sont dans aucun des Δ_j, $j \in \mathrm{I}(i)$. Par suite l'ensemble $\mathrm{W}_i \cap \mathrm{D}_i$ est l'homothétique de W_i par l'homothétie de centre M_i et de rapport $\sqrt{3}/2$, d'où le résultat par la propriété d) du préambule.

7) Avec les notations déjà introduites, l'aire de l'ensemble T_j est $m\ell$. Posons

$$m = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\beta, \qquad \ell = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\beta, \qquad \text{d'où } m\ell = \frac{2}{3} \sin 2\beta$$

avec $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. L'angle au sommet M_j de T_j vaut 2β, donc l'aire du secteur $\mathrm{T}_j \cap \mathrm{D}_i$ vaut β. Il s'agit donc de prouver que l'on a

$$\beta \leqslant \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \sin 2\beta.$$

La condition $\ell \geqslant 1$ se traduit par $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{6}$.

Mais la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ décroît de 1 à 0 sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a donc

$$\frac{\sin 2\beta}{2\beta} \leqslant \frac{\sin(\pi/3)}{\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

d'où le résultat.

Démontrons que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ décroît de 1 à 0 sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Pour $x \neq 0$, posons $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Lorsque x tend vers 0, avec $x \neq 0$, $g(x)$ tend vers 1. Par ailleurs, on a $g(\pi) = 0$. Pour $x > 0$, la dérivée est

$$g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

qui est du signe de $h(x) = x\cos x - \sin x$. La dérivée $h'(x) = -x\sin x$ est $\leqslant 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Comme $h(0) = 0$, on en déduit $h(x) \leqslant 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$. On en déduit que la fonction $g(x)$ décroît de 1 à 0 quand x varie de 0 à π.

8) L'ensemble V_i est la réunion disjointe de W_i et des ensembles T_j, $j \in \mathrm{I}(i)$. Donc

$$s(\mathrm{V}_i) = s(\mathrm{W}_i) + \sum_{j \in \mathrm{I}(i)} s(\mathrm{T}_j).$$

De même, l'ensemble D_i est la réunion disjointe de $\mathrm{D}_i \cap \mathrm{W}_i$ et des ensembles $\mathrm{D}_i \cap \mathrm{W}_j$, $j \in \mathrm{I}(i)$, d'où

$$s(\mathrm{D}_i) = s(\mathrm{D}_i \cap \mathrm{W}_i) + \sum_{j \in \mathrm{I}(i)} s(\mathrm{D}_i \cap \mathrm{T}_j).$$

On en tire

$$s(\mathrm{D}_i) \leqslant \frac{3}{4}\, s(\mathrm{W}_i) + \sum_{j \in \mathrm{I}(i)} s(\mathrm{D}_i \cap \mathrm{T}_j),$$

d'où le résultat puisque l'on a $\dfrac{3}{4} < \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

4.1.3 Commentaires sur la première épreuve écrite

Le problème ici abordé en dimension 2 est connu sous le nom de « problème d'empilement des sphères » : si n est un entier $\leqslant 1$, on cherche à placer dans un pavé $[-a, a]^n$ de $\mathbf{R}^n$ (pour un nombre réel positif a) le nombre maximal $\mathrm{N}(a)$ de boules ouvertes disjointes de rayon 1, et plus précisément on veut trouver la « densité maximale », ce qui revient à connaître la limite de $\mathrm{N}(a)/a^n$ quand a tend vers l'infini. En dimension 1 le problème est facile à résoudre ; en dimension 2 ou 3 la densité maximale est connue depuis Kepler et Gauss, mais les démonstrations entièrement rigoureuses sont plus récentes. l a fallu attendre le début du vingtième siècle pour $n = 2$, et la démonstration pour $n = 3$ du mathématicien américain Thomas Hales vient de paraître aux *Annals of Mathematics*. Le présent problème établit complètement qu'en dimension 2 le rapport $\mathrm{N}(a)/a^2$ tend vers $2/\sqrt{3}$ lorsque a tend vers l'infini. La densité $\pi\mathrm{N}(a)/4a^2$ (rapport de la somme des aires des dalles circulaires à l'aire du carré $[-a, a]^2$) tend donc vers $\pi/2\sqrt{3}$, qui est le rapport de l'aire d'un disque à l'aire d'un hexagone régulier circonscrit.

Comme le mentionnait le Préambule, ce problème, comme beaucoup de problèmes de géométrie, nécessite à la fois une bonne intuition, éclairée par des dessins, et de la rigueur dans la traduction mathématique des raisonnements « sur les dessins ». Rappelons qu'il s'agit de convaincre les correcteurs par un raisonnement juste et complet ([1]). Le barème a tenu compte à la fois de la présence de dessins appropriés et de la qualité des explications proposées.

Les six parties du problème s'enchaînent logiquement, mais elles sont de nature variée. D'ailleurs elles ont été plus ou moins abordées selon les candidats, et l'ensemble des questions traitées d'une même partie varie beaucoup d'une copie à l'autre. Seule la dernière partie, la plus difficile, a été peu abordée, exceptée la première question.

La solution donnée ci-dessus dans le Rapport ne donne bien sûr pas la seule rédaction possible. Les commentaires qui suivent mentionnent d'ailleurs parfois une variante possible de raisonnement, sans cependant mentionner toutes les possibilités.

Partie I

Pour les propriétés des aires à établir dans le problème, on demandait de s'appuyer sur les énoncés admis a) à d). C'était particulièrement important pour les questions de la première partie, intitulée « Préliminaires ». Citer la valeur exacte de l'aire d'un disque ou d'un carré aux questions (I.1) et (I.2) ne suffisait pas à obtenir tous les points ; de même la majoration dans (I.3) doit se baser explicitement sur les propriétés a) et c) et sur le calcul de l'aire de $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i)$ en (I.2). Dans ces questions, on trouve parfois des raisonnements maladroits et troublants, même s'ils ne sont pas incorrects ; par exemple certains candidats disent : comme D et C sont disjoints, on a $s(\mathrm{D} \cup \mathrm{C}) \leqslant s(\mathrm{D}) + s(\mathrm{C})$; le résultat n'est pas faux, mais il est aussi vrai si les ensembles D et C ne sont pas disjoints.

La question (I.4) exige des démonstrations précises. Affirmer que pour $a > 1$ le carré $\mathrm{Q}(a)$ ne contient pas de disque $\mathrm{D}(\mathrm{M})$ est précisément ce qu'il faut prouver ; invoquer le diamètre d'un disque ne suffit pas, puisque pour $a \geqslant \sqrt{2}/2$ le carré $\mathrm{Q}(a)$ contient des points A et B avec $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 2$.

La question (I.5) peut être traitée par la géométrie analytique, comme dans la solution donnée ci-dessus, ou par la topologie générale. En ce dernier cas, on dit que $\mathrm{Q}^0(a)$ est l'intérieur de $\mathrm{Q}(a)$ <u>dans E</u> et que l'ensemble $\mathrm{D}(\mathrm{M})$, qui est ouvert <u>dans E</u> et contenu dans $\mathrm{Q}(a)$, est par conséquent contenu dans $\mathrm{Q}^0(a)$, qui contient tous les ensembles ouverts dans E contenus dans $\mathrm{Q}(a)$. Faisons deux remarques à ce propos. D'une part la notation $\mathrm{Q}^0(a)$, si elle est suggestive, n'implique pas à elle seule que $\mathrm{Q}^0(a)$

soit l'intérieur de $Q(a)$ dans E ; il aurait fallu prouver ce fait, mais l'omission d'une preuve n'a pas été sanctionnée. D'autre part, il est rarement noté que le fait d'être ouvert, ou l'intérieur, sont des propriétés relatives. Ces termes soulignés ci-dessus sont souvent absents.

Dans la question (I.6), un dessin présentant le découpage du carré $Q(na)$ en petits carrés de côté $2a$, et montrant la reproduction dans ces petits carrés d'un dallage de $Q(a)$, ne peut emporter la conviction complète que si l'on prouve que l'on obtient ainsi un dallage de $Q(na)$, ce qui découle de la question (I.5). Un certain nombre de candidats ont été tentés de donner une démonstration par récurrence sur l'entier n. En bordant un carré de côté $2na$ par $2n+1$ carrés de côté $2a$, on obtient un carré de côté $2(n+1)a$. Cela illustre l'identité $(n+1)^2 = n^2+2n+1$, mais ne répond pas à la question.

La question (I.7) peut se diviser en la preuve de deux équivalences. Que $d(M_1, M_2) < 2$ soit équivalent à $D(M_1) \cap D(M_2) = \not\emptyset$ est considéré par beaucoup de copies comme ne méritant pas une démonstration. La preuve que $D(M) \subset Q(a)$ équivaut à $M \in Q(a-1)$ a donné lieu à beaucoup de raisonnements flous ou erronés. Il n'est nullement évident que les points de $Q(a)$ à distance au moins 1 du bord de $Q(a)$ soient ceux de $Q(a-1)$: c'est, à nouveau, à peu près ce qu'on demandait de démontrer.

Les résultats des questions (I.8) et (I.9) ne servaient pas dans la suite. Pour un entier positif n, on définit a_n comme le plus petit nombre réel positif tel que $N(a_n) = n$ (il faut justifier l'existence de a_n et on peut utiliser pour cela la question (I.9)). Le lecteur intéressé pourra calculer a_3 et a_4 et étudier le comportement de la suite (a_n) quand n tend vers l'infini. Pour la question (I.8), on se ramenait par la question (I.7) à trouver le plus petit nombre réel $b = \sqrt{2}/2$ tel que le diamètre du carré $Q(b)$ soit dégal à 2 ; mais pour conclure à $N(1+\sqrt{2}/2) = 2$, il fallait également noter que le carré $Q(\sqrt{2}/2)$ ne contient pas 3 points à distances mutuelles égales à 2. L'argument de compacité en (I.9) était suggéré par l'énoncé, mais il fallait l'appliquer à une suite dans un ensemble compact fixe, $Q(a)^n$ par exemple, et non pas prendre des valeurs d'adhérence des suites $(M_i(k))_{k\in\mathbf{N}}$ de façon indépendante pour i et j distincts. Il fallait aussi prouver que les points limites appartiennent bien à $Q(a-1)$.

Partie II

La question (II.1) se traite naturellement à partir de la question (I.3), et la question (II.2) à partir de la question (I.6). Certains candidats trouvent des estimations plus faibles que dans le corrigé. Elles sont encore valables, mais ne permettent pas nécessairement de conclure en (II.3) Cette question (II.3) demandait quelque soin dans l'usage des quantificateurs. Notons que, si l'on commence par parler de $\lim d(a)$ au début du raisonnement, il n'y a plus rien à démontrer.

Partie III

La question (III.1) exige qu'on connaisse la forme générale des éléments de Λ. Certaines copies trouvent que Λ est formé des $2^n(2j)^m$, avec n et m entiers ; d'autres pensent que Λ est formé de $2\mathbf{Z}$ et $2j\mathbf{Z}$! Il faut également savoir calculer le module de $m+nj$. Les raisonnements utilisant des inégalités comme $x^2 - xy + y^2 \geqslant x^2 - 2xy + y^2$ demandent que l'on prenne garde aux signes !

Dans la question (III.2), une estimation grossière basée sur une explication claire permettait d'obtenir une partie des points.

Partie IV

Pour la question (IV.1), le fait que l'application μ soit continue a rarement été entièrement justifié. Il faut aussi expliquer pourquoi l'ensemble $\overline{D}^3$ est compact, soit comme produit d'espaces métriques compacts, soit comme partie fermée et bornée de E^3. En (IV.2), un dessin et un peu de trigonométrie permettaient d'éviter des erreurs de calcul ; les relations élémentaires de trigonométrie semblent ignorées de beaucoup de candidats. Il ne suffit pas de dire : « par symétrie, le maximum est atteint pour des triangles équilatéraux ». Il s'agit d'une intuition, à conforter par une preuve, et l'argumentation par symétrie est fallacieuse.

Pour la question (IV.3.a), une erreur courante est de croire que l'on peut contrôler les distances dans une projection centrale. Une autre est de croire que si A, B, et C sont des points distincts de $\overline{D}$, le cercle circonscrit au triangle ABC est lui-aussi contenu dans $\overline{D}$. Des dessins simples donnent des contre-exemples. La question (IV.3.b) demande de la précision dans l'articulation du raisonnement ; il ne suffit pas de dire : « on a $m \leqslant \sqrt{3}$ d'après (IV.2) et $\mu(z_1, z_2, z_3) < \sqrt{3}$ d'après (IV.3.a) » (voir la solution ci-dessus).

Partie V

A la question (V.1), il fallait justifier le qualificatif « ouvert », soit par la topologie, soit par la géométrie analytique. Il fallait également prouver que l'on obtient bien un demi-plan, la condition donnée n'étant pas sous forme linéaire.

En (V.2), beaucoup de candidats pensent que V_i est l'intersection de Δ_i et d'un seul demi-plan ouvert. En (V.3), la seule difficulté est de voir que les parties V_i sont disjointes deux à deux, mais cela est dit dans très peu de copies.

Partie VI

Cette partie, où avaient été repoussées les questions les plus délicates, a été très peu abordée. Les propriétés qui apparaissent « sur le dessin » — encore fallait-il tracer un dessin correct — doivent être démontrées rigoureusement pour emporter la conviction des correcteurs.

([1]) A propos des particularités des démonstrations en géométrie et en analyse, les candidats peuvent consulter les articles suivants.

ARSAC (Gilbert), Variations et variables de la démonstration géométrique, *Recherches en didactique des mathématiques*, **19**, 1999, p. 357-390

ARSAC (Gilbert) et DURAND-GUERRIER (Viviane), Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques, spécificité de l'analyse, *Recherches en didactique des mathématiques*, **23**, 2003, p. 295-342

4.2 Deuxième épreuve écrite

4.2.1 Énoncé de la deuxième épreuve écrite

Propriétés qualitatives de certaines équations différentielles

Introduction

Ce problème présente des techniques permettant d'étudier les solutions d'équations différentielles, en général non linéaires, sans connaître explicitement ces solutions. Par conséquent, on ne cherchera pas à résoudre les équations différentielles qui apparaîtront au fil de l'épreuve, sauf si cela est demandé. Rappelons que, dans le cas d'une équation différentielle non linéaire, l'intervalle de définition d'une solution est lui aussi inconnu.

Définitions et notations

Pour tout entier $m > 0$, on munit l'espace vectoriel $\mathbf{R}^m$ du produit scalaire usuel

$$< x, y >= \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i \, y_i \, ;$$

la norme associée est notée $\|x\|$; on note $\mathrm{B}_f(x_0, \mathrm{R})$ la boule fermée de centre $x_0 \in \mathbf{R}^m$ et de rayon R.

Soient U une partie ouverte de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$, et f une application de U dans $\mathbf{R}^m$. On dit que l'application $u : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^m$ est une solution de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad x' = f(t, x)$$

si :

a) I est un intervalle non trivial (ni vide, ni réduit à un point) de la droite réelle $\mathbf{R}$,

b) u est une application dérivable de I dans $\mathbf{R}^m$,

c) pour tout $t \in \mathrm{I}$, on a $(t, u(t)) \in \mathrm{U}$ et $u'(t) = f(t, u(t))$.

Soient $u_1 : \mathrm{I}_1 \to \mathbf{R}^m$ et $u_2 : \mathrm{I}_2 \to \mathbf{R}^m$ deux solutions de (E) ; on dit que u_1 est une *restriction* de u_2 si $\mathrm{I}_1 \subset \mathrm{I}_2$ et si, pour tout $t \in \mathrm{I}_1$, on a $u_1(t) = u_2(t)$. On dit aussi que u_2 est un *prolongement* de u_1, ou encore que u_2 *prolonge* u_1.

Une solution de (E) est dite *maximale* si elle n'admet pas d'autre prolongement qu'elle-même.

De manière générale $\mathrm{C}^n(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ désigne l'ensemble des applications de X dans Y de classe C^n, lorsque cela a un sens.

On dit que l'application f est *localement lipschitzienne* en x si, pour tout point (t_0, x_0) de U, il existe deux nombres réels ε et k tous deux > 0 et tels que :

a) l'ensemble $\mathrm{C} = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \mathrm{B}_f(x_0, \varepsilon)$ soit inclus dans U,

b) si (t, x_1) et (t, x_2) sont deux points de C, on ait $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant k \, \|x_1 - x_2\|$.

On rappelle qu'une fonction $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{U}, \mathbf{R}^m)$ est localement lipschitzienne en x.

Les deux premières parties n'utilisent pas le théorème de Cauchy-Lipschitz, contrairement aux autres parties. L'énoncé de ce théorème est donné au début de la troisième partie.

Partie I

Soit q un nombre réel $\geqslant 0$ et soit u une application dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$; pour $t \in \mathbf{R}$, on écrit $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$. On suppose que la fonction u satisfait, sur $\mathbf{R}$, aux égalités

$$\begin{cases} u_1' &= u_2\,, \\ u_2' &= -u_1 \quad -qu_1^3\,. \end{cases}$$

L'existence d'une telle application u est admise ici.

1) Démontrer que u est solution d'une équation différentielle du type (E) en précisant bien quelle est l'application f.

2) Pour $q = 0$, déterminer l'application u et démontrer que l'image de l'arc $t \mapsto u(t)$ est un cercle. Représenter ceci sur un dessin, en n'oubliant pas de mentionner le sens de parcours.

3) Supposons $q > 0$ a) Démontrer qu'il existe un nombre réel p tel que l'image de u soit incluse dans la courbe

$$\mathrm{C}_p = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + \frac{q}{2}\, x_1^4 + x_2^2 = p\}.$$

b) Démontrer que p est $\geqslant 0$. Que dire de u si $p = 0$?

On suppose désormais $p > 0$.

c) Représenter sommairement la courbe C_p dans un repère orthonormé du plan. Les tangentes aux points où la courbe C_p coupe les axes du repère doivent apparaître sur le dessin.

d) Démontrer qu'il existe deux fonctions $\rho, \theta \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, avec $\rho > 0$, telles que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on ait

$$u_1(t) = \rho(t) \cos\theta(t) \quad \text{et} \quad u_2(t) = \rho(t) \sin\theta(t).$$

e) Calculer $\theta'(t)$ en fonction de ρ et θ, et en déduire que la trajectoire de u est exactement la courbe C_p.

Partie II : Barrières

Dans cette partie, on considère une partie ouverte U de $\mathbf{R}^2$ et une fonction $f \in \mathrm{C}^0(\mathrm{U}, \mathbf{R})$ localement lipschitzienne en x. On note toujours (E) l'équation différentielle $x' = f(t, x)$.

1) Soient a, b et K des nombres réels, avec $a < b$, et soit $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable satisfaisant à $h(a) = 0$ et $h' \leqslant \mathrm{K}h$. Démontrer que h est $\leqslant 0$ [on pourra par exemple chercher une fonction φ telle que $(h' - \mathrm{K}h)\,\varphi$ soit la dérivée d'une fonction simple].

2) *Lemme de la barrière inférieure* : On suppose que I est un intervalle réel non trivial et $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une application dérivable telle que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, le point $(t, \alpha(t))$ appartienne à U et que l'on ait l'inégalité

$$\alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t))\,.$$

On dit alors que α est une *barrière inférieure* de l'équation (E) sur l'intervalle I.

Soit $u : \mathrm{J} \to \mathbf{R}$ une solution de (E) et $t_0 \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$. On suppose $\alpha(t_0) \leqslant u(t_0)$ et on veut démontrer que $\alpha(t) \leqslant u(t)$ pour $t \geqslant t_0$, $t \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$. On procède par l'absurde et on suppose que cela est faux.

a) Démontrer qu'il existe t^* et t_1 dans $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ tels que $t_0 \leqslant t_1 < t^*$ et que l'on ait

$$u(t_1) = \alpha(t_1) \quad \text{et} \quad u(t) < \alpha(t) \quad \text{pour} \quad t_1 < t \leqslant t^*.$$

b) Etablir l'existence de $t_2 \in]t_1, t^*]$ et d'un nombre réel $\mathrm{C} \geqslant 0$ tels que, pour tout $t \in [t_1, t_2]$, on ait

$$|f(t, \alpha(t)) - f(t, u(t))| \leqslant \mathrm{C}\, |\alpha(t) - u(t)|.$$

c) En déduire que l'on a $\alpha' - u' \leqslant \mathrm{C}(\alpha - u)$ sur $[t_1, t_2]$. Trouver alors une contradiction et conclure.

3) *Exemple* : Prenons dans cette question $\mathrm{U} = \mathbf{R}^2$ et $f(t, x) = x^2 + (\sin tx)^2$.

a) Vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, l'application α de $]-\infty, \lambda[$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\alpha(t) = 1/(\lambda - t)$ est une barrière inférieure de (E) b) En déduire que, si $u : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ est une solution de (E) et s'il existe un nombre réel t_0 tel que $u(t_0) > 0$, alors l'intervalle I est majoré. 4) De façon analogue, énoncer et démontrer le lemme de la barrière supérieure. 5) *Unicité.* a) Déduire des résultats précédents que, si $u_1 : \mathrm{J}_1 \to \mathbf{R}$ et $u_2 : \mathrm{J}_2 \to \mathbf{R}$ sont deux solutions de (E) et s'il existe un nombre réel $t_0 \in \mathrm{J}_1 \cap \mathrm{J}_2$ tel que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, alors $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in \mathrm{J}_1 \cap \mathrm{J}_2$.

b) Nous allons démontrer par un exemple que l'unicité est fausse lorsqu'on ne suppose plus la fonction f localement lipschitzienne en x. Posons $\mathrm{U} = \mathbf{R}^2$ et prenons pour f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(t, x) = \sqrt{|x|}$.

i) Prouver que la fonction f est continue. Est-elle localement lipschitzienne ?

ii) Décrire toutes les solutions strictement positives de (E).

iii) Raccorder de telles solutions avec la fonction nulle pour construire deux solutions de (E) qui coïncident en un point mais pas en tout point.

Partie III : Entonnoirs et anti-entonnoirs

Dans la suite du problème, on admet le *théorème de Cauchy-Lipschitz* :

Soient U *une partie ouverte de* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ *et* $f \in \mathrm{C}^0(\mathrm{U}, \mathbf{R}^m)$ *une fonction localement lipschitzienne en* x. *Soit* (t_0, x_0) *un point de* U ; *alors*

a) l'équation différentielle (E) *admet une solution maximale unique* $u : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^m$ *satisfaisant à* $u(t_0) = x_0$;

b) son ensemble de départ I *est un intervalle ouvert de* $\mathbf{R}$;

c) toute solution v *de* (E) *telle que* $v(t_0) = x_0$ *est une restriction de* u.

Dans cette partie, on prend $m = 1$ et on prend pour U le produit $]a, b[\times]c, d[$, où a, b, c, d désignent des nombres réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$, et satisfont à $a < b$ et $c < d$. Soit $f \in \mathrm{C}^0(\mathrm{U}, \mathbf{R})$ une fonction localement lipschitzienne en x. On note toujours (E) l'équation différentielle $x' = f(t, x)$. 1) Soient p et q des nombres réels tels que $p < q$, et soit $g :]p, q[\to \mathbf{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est bornée. Démontrer que la fonction g admet une limite finie en q.

2) *Théorème de l'entonnoir.*

Soit $\mathrm{I} \subset]a, b[$ un intervalle non trivial et soient $\alpha, \beta : \mathrm{I} \to]c, d[$ des applications dérivables telles que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, on ait

$$\alpha(t) \leqslant \beta(t), \quad \alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t)) \;\text{ et }\; f(t, \beta(t)) \leqslant \beta'(t).$$

Dans cette situation, on dit que l'ensemble $\Delta = \{(t,x) \mid t \in \mathrm{I} \text{ et } \alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t)\}$ est un *entonnoir* de (E) sur l'intervalle I. Nous allons établir que les solutions qui entrent dans un entonnoir s'y trouvent piégées. Soit $u : \mathrm{J} \to \mathbf{R}$ une solution *maximale* de (E) et soit t_0 un point de J tel que $(t_0, u(t_0))$ appartienne à l'ensemble Δ.

a) Démontrer que $(t, u(t))$ appartient à Δ pour tout $t \geqslant t_0$ appartenant à $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$.

b) Démontrer que l'intervalle $\mathrm{I} \cap [t_0, +\infty[$ est contenu dans J.

3) *Exemple* : On prend $\mathrm{U} = \mathbf{R}^2$. On pose

$$f(t,x) = t - x + g(t,x),$$

où $g \in \mathrm{C}^1(\mathrm{U}, \mathbf{R})$ est une fonction qui satisfait à

$$\begin{cases} g(t,x) \geqslant 1 & \text{pour } x < t, \\ g(t,x) \leqslant 1 & \text{pour } t < x. \end{cases}$$

a) Démontrer que, pour tout nombre réel $\lambda > 0$, les fonctions α et β définies par $\alpha(t) = t - \lambda e^{-t}$ et $\beta(t) = t + \lambda e^{-t}$, définissent un entonnoir sur $\mathbf{R}$.

b) En déduire que toute solution maximale de (E) est définie sur un intervalle non majoré et admet une asymptote en $+\infty$.

Voici une nouvelle définition : Soit $\mathrm{I} \subset]a,b[$ un intervalle non trivial et soient $\alpha, \beta : \mathrm{I} \to]c,d[$ des applications dérivables telles que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, on ait

$$\beta(t) \leqslant \alpha(t)\,, \quad \alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t)) \quad \text{ et } \quad f(t, \beta(t)) \leqslant \beta'(t).$$

L'ensemble $\mathrm{A} = \{(t,x) \mid t \in \mathrm{I} \text{ et } \beta(t) \leqslant x \leqslant \alpha(t)\}$ est appelé un *anti-entonnoir* de l'équation (E) sur l'intervalle I.

4) *Un résultat d'unicité* : On se donne un tel anti-entonnoir A, en supposant de plus que l'extrémité droite de l'intervalle I est le point b, que $\alpha(t) - \beta(t) \to 0$ quand $t \to b$ avec $t < b$, et enfin que la fonction f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ positive ou nulle sur A.

Démontrer qu'il existe au plus une solution u de (E) sur I telle que $(t, u(t))$ appartienne à l'ensemble A pour tout $t \in \mathrm{I}$. 5) *Un résultat d'existence* : Dans cette question, A est un anti-entonnoir sur I, défini comme ci-dessus par des fonctions α et β, et on suppose que l'extrémité droite de l'intervalle I est le point b. Nous allons établir l'existence d'une solution u de (E) sur I telle que $(t, u(t))$ appartienne à l'ensemble A pour tout $t \in \mathrm{I}$. Pour cela considérons une suite strictement croissante $(t_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de I ayant pour limite b.

a) Pour toute application u de J dans $\mathbf{R}$, on note $-\mathrm{J}$ l'intervalle constitué des nombres réels t tels que $-t \in \mathrm{J}$, et on définit l'application $\widehat{u} : -\mathrm{J} \to \mathbf{R}$ par la formule $\widehat{u}(t) = u(-t)$. Démontrer que u est solution de (E) si et seulement si $\widehat{u}$ est solution d'une équation différentielle $(\widehat{\mathrm{E}})$ $\quad x' = \widetilde{f}(t,x)$, où $\widetilde{f}$ est une fonction que l'on précisera.

b) Vérifier que $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\alpha}$ définissent un entonnoir de l'équation $(\widehat{\mathrm{E}})$ sur l'intervalle $-\mathrm{I}$.

c) Déduire de l'étude des entonnoirs l'existence, pour chaque entier $n \geqslant 1$, de deux solutions u_n, v_n de (E), définies sur $[t_0, t_n]$ et telles que

$$u_n(t_n) = \alpha(t_n) \quad \text{et} \quad v_n(t_n) = \beta(t_n).$$

d) Prouver que la suite $(u_n(t_0))_n$ est décroissante, que la suite $(v_n(t_0))_n$ est croissante, et que l'on a $v_n(t_0) \leqslant u_n(t_0)$ pour tout $n \geqslant 1$.

e) En déduire l'existence d'un nombre réel x_0 tel que $v_n(t_0) \leqslant x_0 \leqslant u_n(t_0)$ pour tout $n \geqslant 1$.

f) Considérer l'unique solution maximale u de (E) telle que $u(t_0) = x_0$ et prouver l'existence annoncée.

Partie IV : Périodicité

Pour $\mathrm{T} \in]0, +\infty[$, on dit qu'une application $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ est T-*périodique* si, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $h(t + \mathrm{T}) = h(t)$.

Dans cette partie, on prend $\mathrm{U} = \mathbf{R}\times]c, d[$ et on suppose l'application $f \in \mathrm{C}^0(\mathrm{U}, \mathbf{R})$ localement lipschitzienne en x. De plus, on suppose que l'on a

$$\forall (t, x) \in \mathrm{U},\ \ f(t, x) = f(t + \mathrm{T}, x),$$

où T est un nombre réel > 0 donné. 1) Donner un exemple très simple d'une telle fonction f pour laquelle aucune solution de (E) n'est périodique.

2) Soit $u : \mathrm{J} \to \mathbf{R}$ une solution maximale de l'équation différentielle (E).

a) Vérifier que l'application v définie par $v(t) = u(t + \mathrm{T})$ est aussi une solution de (E) sur un intervalle à préciser.

b) En déduire que, s'il existe un nombre réel $t_0 \in \mathrm{J}$ tel que $t_0 + \mathrm{T} \in \mathrm{J}$ et $u(t_0 + \mathrm{T}) = u(t_0)$, alors u est T-périodique et $\mathrm{J} = \mathbf{R}$.

Définissons une application P (« *une période plus tard* ») de la façon suivante : Pour chaque $z \in]c, d[$, notons $\gamma_z : \mathrm{I}_z \to \mathbf{R}$ l'unique solution maximale de (E) telle que $\gamma_z(0) = z$. On pose

$$\mathrm{D} = \{z \in]c, d[\ \mid \mathrm{T} \in \mathrm{I}_z\}$$

et on note P l'application de D dans $\mathbf{R}$ définie par $\mathrm{P}(z) = \gamma_z(\mathrm{T})$.

3) Démontrer que, pour $z \in]c, d[$, la solution γ_z est T-périodique si et seulement si $z \in \mathrm{D}$ et $\mathrm{P}(z) = z$.

4) Démontrer que

a) l'ensemble D est un intervalle de $\mathbf{R}$,

b) l'application P est strictement croissante,

c) l'ensemble $\mathrm{P}(\mathrm{D}) = \{\mathrm{P}(z) \mid z \in \mathrm{D}\}$ est un intervalle de $\mathbf{R}$,

d) l'application P est continue.

5) *Exemple* : Prenons $f(t, x) = \sin t + 2\cos x$ et $\mathrm{T} = 2\pi$. Posons $u = \gamma_0$ et $v = \gamma_{-\pi}$. a) Etablir que les applications u et v sont bien définies sur $[0, 2\pi]$ [on pourra construire un entonnoir à l'aide de fonctions du type $t \mapsto \pm 3t + \lambda$].

b) Vérifier que la fonction nulle est une barrière inférieure de (E) sur $[0, 2\pi]$; en déduire que $u(2\pi) \geqslant 0$. Démontrer par un raisonnement similaire que $v(2\pi) \leqslant -\pi$.

c) Démontrer qu'il existe $z \in [-\pi, 0]$ tel que $\mathrm{P}(z) = z$.

d) En déduire que (E) admet au moins une solution 2π-périodique.

e) Démontrer que (E) admet une infinité de solutions 2π-périodiques.

Partie V : Application

Soient a_1 et a_2 des nombres réels tels que $0 < a_1 < a_2$ et soit $f \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$. Pour $x = (x_1, x_2)$ dans $\mathbf{R}^2$, on écrit $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. On note B l'ensemble des points (x_1, x_2) de $\mathbf{R}^2$ tels que $x_1 = \rho\cos\theta$, $x_2 = \rho\sin\theta$, avec $\theta \in \mathbf{R}$ et $\rho \in [a_1, a_2]$.

On fait en outre les hypothèses suivantes :

(H1) Pour x appartenant à la frontière de B dans $\mathbf{R}^2$, $f(x)$ pointe vers l'intérieur de B , ce qui signifie que, pour tout nombre réel θ , le produit scalaire $< f(a_i\cos\theta, a_i\sin\theta), (\cos\theta, \sin\theta) >$ est positif ou nul pour $i = 1$, négatif ou nul pour $i = 2$.

(H2) Le produit scalaire $< f(x_1, x_2), (-x_2, x_1) >$ ne s'annule pas sur B . Le but de cette partie est d'établir l'existence d'une solution périodique non constante, à valeurs dans B , de l'équation différentielle (E) $x' = f(x)$.

1) Montrer que l'on peut se ramener au cas où la condition suivante est réalisée : (H3) Le produit scalaire $< f(x_1, x_2), (-x_2, x_1) >$ est > 0 pour tout $x \in \mathrm{B}$.

On suppose désormais que la condition (H3) est réalisée.

2) Soit I un intervalle non trivial de $\mathbf{R}$ et soient $\theta : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ et $h : \mathbf{R} \to]0, +\infty[$ deux applications dérivables. Pour $t \in \mathrm{I}$, on pose

$$u_1(t) = h(\theta(t))\cos\theta(t)\,, \qquad u_2(t) = h(\theta(t))\sin\theta(t)\,,$$

et on note u l'application de I dans $\mathbf{R}^2$ définie par $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$.

Démontrer que u est une solution de (E) si et seulement si l'on a, pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$h'(\theta(t))\,\theta'(t) = g_1(\theta(t), h(\theta(t)))\,,$$

$$\theta'(t) = g_2(\theta(t), h(\theta(t)))\,,$$

où g_1 et g_2 sont deux applications de $\mathbf{R}\times]0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ que l'on précisera.

3) Prouver qu'il existe des nombres réels b_1 et b_2 , avec $0 < b_1 < a_1 < a_2 < b_2$, tels que la fonction g_2 soit > 0 sur $\mathbf{R}\times\,]b_1, b_2[$.

4) Pour $(\theta, \rho) \in \mathbf{R}\times\,]b_1, b_2[$, on pose

$$\mathrm{G}(\theta, \rho) = \frac{g_1(\theta, \rho)}{g_2(\theta, \rho)}\,.$$

On considère l'équation différentielle (E$'$) $\rho' = \mathrm{G}(\theta, \rho)$. Puisque l'application G est de classe C^1 et 2π-périodique en θ , on peut appliquer la partie IV avec $\mathrm{T} = 2\pi$. On continue de noter P l'application « *une période plus tard* ».

a) Démontrer que $[0, 2\pi] \times [a_1, a_2]$ est un entonnoir de (E$'$) .

b) Démontrer que $\mathrm{P}([a_1, a_2])$ est contenu dans $[a_1, a_2]$.

c) En déduire que l'application P admet au moins un point fixe dans $[a_1, a_2]$, puis que l'équation (E$'$) admet au moins une solution 2π-périodique $h : \mathbf{R} \to [a_1, a_2]$.

Désormais, on prend pour fonction $h : \mathbf{R} \to [a_1, a_2]$ une solution 2π-périodique de (E$'$) .

5) Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on pose $\psi(\theta) = g_2(\theta, h(\theta))$.

a) Prouver que la fonction ψ reste encadrée par deux nombres réels > 0.

b) En déduire que les solutions maximales de l'équation différentielle (E″) $\theta' = \psi(\theta)$ sont toutes des bijections de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

6) Conclure.

—— o o o ——

4.2.2 Solution de la deuxième épreuve écrite

Partie I

1) On prend pour f l'application de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par

$$f(t,x) = (x_2, -x_1 - qx_1^3)\,,$$

où $x = (x_1, x_2)$ et $\mathrm{U} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$.

2) On a $u_1' = u_2$ et $u_2' = -u_1$, donc la fonction u_1 est deux fois dérivable et satisfait à l'équation différentielle

$$u_1'' = -u_1.$$

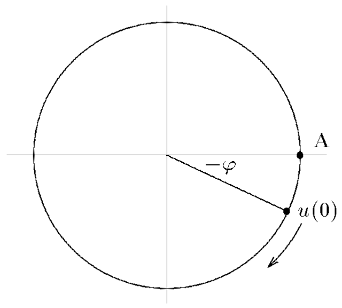
Les solutions de cette équation différentielle sont connues. Il existe deux nombres réels A et φ tels que l'on ait, pour $t \in \mathbf{R}$,

$$u_1(t) = \mathrm{A}\cos(t+\varphi).$$

On en déduit

$$u_2(t) = u_1'(t) = -\mathrm{A}\sin(t+\varphi).$$

Ceci montre que le point $u(t)$ décrit le cercle de centre $(0,0)$, de rayon $|\mathrm{A}|$, dans le sens indirect.



3) a) Supposons $q > 0$ et posons $\gamma = u_1^2 + \dfrac{q}{2}\,u_1^4 + u_2^2$. On a alors

$$\gamma' = 2u_1u_1' + 2qu_1^3u_1' + 2u_2u_2' = 2u_1u_2 + 2qu_1^3u_2 + 2u_2(-u_1 - qu_1^3) = 0$$

La fonction γ est donc constante sur $\mathbf{R}$. Soit $p \in \mathbf{R}$ sa valeur ; pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $\gamma(t) = p$; autrement dit le point $u(t)$ appartient à la courbe C_p pour tout $t \in \mathbf{R}$.

3) b) On a $p = u_1(t)^2 + \frac{q}{2}\,u_1(t)^4 + u_2(t)^2$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, de sorte que p est toujours $\geqslant 0$. Si $p = 0$, chacun des trois termes de la somme est nul et l'on a $u(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

3) c) Supposons désormais $p > 0$. Pour $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, posons

$$\mathrm{F}(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{q}{2}\,x_1^4 + x_2^2.$$

La courbe C_p est définie par l'équation $\mathrm{F}(x_1, x_2) = p$. La fonction F est polynomiale (donc de classe C^∞). Elle est invariante par les symétries $x_1 \mapsto -x_1$ et $x_2 \mapsto -x_2$. Ses dérivées partielles sont

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1} = 2x_1(1 + qx_1^2), \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2} = 2x_2.$$

Elles ne s'annulent simultanément qu'au point $(0,0)$ qui n'est pas sur la courbe C_p . La courbe est donc régulière. Les points d'intersection avec les axes sont les suivants :

Pour $x_1 = 0$, on a $x_2 = \pm\sqrt{p}$; comme $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}(0, x_2) = 0$, les tangentes en ces points sont horizontales.

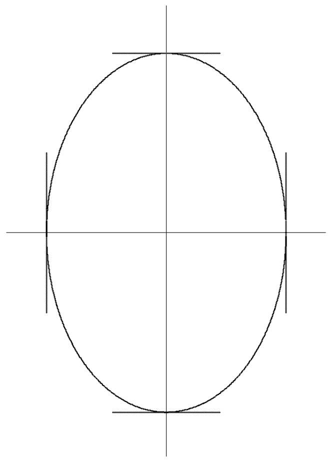
Pour $x_2 = 0$, on a $x_1 = \pm\lambda$, où λ^2 est la racine positive du polynôme $\frac{q}{2}\,x_1^4 + x_2^2 - p$. Remarquons l'inégalité $\lambda < \sqrt{p}$. Comme $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2}(x_1, 0) = 0$, les tangentes en ces points sont verticales.

Il résulte alors de la forme de l'équation que la courbe C_p est contenue dans le rectangle $-\lambda \leqslant x_1 \leqslant \lambda$, $-\sqrt{p} \leqslant x_2 \leqslant \sqrt{p}$.

Pour x_1 donné dans l'intervalle $[0, \lambda]$, l'équation $\mathrm{F}(x_1, x_2) = p$ possède une unique solution positive x_2 donnée par

$$x_2 = \sqrt{p - x_1^2 - \frac{q}{2}\, x_1^4}.$$

La fonction $t \mapsto \sqrt{p - t^2 - \frac{q}{2}\, t^4}$ est continue et décroissante de $\sqrt{p}$ à 0 sur l'intervalle $[0, \lambda]$. Ceci donne une idée de la courbe C_p dans le quart de plan $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$. Les symétries par rapport aux deux axes de coordonnées permettent de compléter.



3) d) Remarquons d'abord que la fonction u est de classe C^1 puisque l'on a $u'(t) = f(t, u(t))$ où la fonction f est continue (I.1). Une démonstration par récurrence montre d'ailleurs que la fonction u est de classe C^n pour tout entier $n \geqslant 1$, c'est-à-dire de classe C^∞.

Posons $\rho(t) = |u(t)| = \sqrt{u_1(t)^2 + u_2(t)^2}$. Comme la fonction u ne s'annule pas, la fonction ρ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et ne s'annule pas.

Pour démontrer l'existence d'une fonction θ, on peut identifier $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, le module du nombre complexe $u(t)/\rho(t)$ est égal à 1. Le théorème de relèvement de l'exponentielle affirme l'existence d'une fonction θ de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ telle que l'on ait $\exp(i\theta(t)) = u(t)/\rho(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Posons $\mathrm{U}(t) = u(t)/\rho(t)$. La fonction θ est caractérisée par sa dérivée $\theta'(t) = \mathrm{U}'(t)/\mathrm{U}(t)$ et par sa valeur en un point, par exemple $\theta(0)$, choisie (à 2π près) de telle sorte que $\exp(i\theta(0)) = \mathrm{U}(0)$.

3) e) En substituant $\rho \cos\theta$ et $\rho \sin\theta$ à u_1 et u_2 dans le système différentiel du début, on obtient un nouveau système :

$$\rho' \cos\theta - \rho\,(\sin\theta)\,\theta' = \rho\,\sin\theta,$$

$$\rho' \sin\theta + \rho\,(\cos\theta)\,\theta' = -\rho\,\cos\theta - q\,\rho^3(\cos\theta)^3.$$

De ce système, on déduit

$$\theta' = -1 - q\,\rho^2(\cos\theta)^4.$$

Il en résulte que l'on a $\theta'(t) < -1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. On en déduit $\theta(t) \leqslant \theta(0) - t$ pour $t \geqslant 0$, et $\theta(t) \geqslant \theta(0) - t$ pour $t \leqslant 0$. La fonction θ décroit de ∞ à $-\infty$ lorsque t varie de $-\infty$ à ∞.

Pour voir que la courbe C_p est entièrement parcourue par le point $u(t)$, il suffit de remarquer que, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, la courbe C_p possède exactement un point dont l'angle polaire est α. En effet, substituons $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ à (x_1, x_2) dans l'équation de la courbe C_p :

$$\frac{q}{2}\,(\cos\alpha)^4 r^4 + r^2 - p = 0.$$

Le carré r^2 est racine du polynôme $\frac{q}{2}(\cos\alpha)^4\,\mathrm{X}^2+\mathrm{X}-p$; or ce polynôme a une unique racine >0, d'où deux valeurs opposées et $\neq 0$ pour r.

Ceci établi, on a vu que toute valeur α de l'angle polaire est atteinte par la fonction θ. D'où le résultat.

Partie II : Barrières

1) Pour $t\in[a,b]$, posons $\Lambda(t)=h(t)e^{-\mathrm{K}t}$. La fonction Λ est dérivable et l'on a

$$\Lambda'(t)=\left(h'(t)-\mathrm{K}h(t)\right)e^{-\mathrm{K}t}\leqslant 0.$$

Comme $\Lambda(a)=0$, on a $\Lambda(t)\leqslant 0$, d'où aussi $h(t)\leqslant 0$ sur $[a,b]$.

2) a) On suppose l'exacte négation du résultat visé, à savoir qu'il existe, dans l'intervalle $\mathrm{I}\cap\mathrm{J}$, un nombre réel $t^*\geqslant t_0$ et tel que $\alpha(t^*)>u(t^*)$.

La fonction $u-\alpha$ est $\geqslant 0$ au point t_0 et <0 au point t^*, et elle est continue. L'ensemble X des points x de l'intervalle $[t_0,t^*]$ (contenu dans $\mathrm{I}\cap\mathrm{J}$) tels que $u(x)-\alpha(x)\geqslant 0$, est fermé dans $\mathbf{R}$ et contient le point t_0, mais pas le point t^*.

Soit t_1 la borne supérieure de l'ensemble X. Le point t_1 appartient à l'ensemble X qui est fermé dans $\mathbf{R}$; on a donc $t_0\leqslant t_1<t^*$ et $u(t_1)\geqslant\alpha(t_1)$. Par ailleurs, on a $u(t)-\alpha(t)<0$ pour $t_1<t\leqslant t_0$ puisque la borne supérieure t_1 est un majorant de l'ensemble X. En raison de la continuité des fonctions u et α, on a donc $u(t_1)-\alpha(t_1)\leqslant 0$, d'où finalement $u(t_1)=\alpha(t_1)$.

2) b) La fonction f est localement lipschitzienne en x, et le point $(t_1,u(t_1))$ appartient à U. Il existe donc deux nombres réels $\varepsilon>0$ et $\mathrm{C}>0$ tels que le rectangle

$$\Gamma(\varepsilon,\mathrm{C})=[t_1-\varepsilon,t_1+\varepsilon]\times[u(t_1)-\varepsilon,u(t_1)+\varepsilon]$$

soit inclus dans U et que, pour tous points (t,x_1) et (t,x_2) de $\Gamma(\varepsilon,\mathrm{C})$, on ait

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant \mathrm{C}|x_1-x_2|.$$

Fixons ε et C ayant ces propriétés.

Les fonctions u et α sont continues. Il existe donc un nombre réel t_2 tel que $t_1<t_2\leqslant t^*$ et $t_2\leqslant t_1+\varepsilon$ et que l'on ait

$$|u(t)-u(t_1)|\leqslant\varepsilon\quad\text{et}\quad|\alpha(t)-\alpha(t_1)|\leqslant\varepsilon\quad\text{pour}\quad t_1\leqslant t\leqslant t_2.$$

Rappelons que l'on a $\alpha(t_1)=u(t_1)$; ainsi, pour $t\in[t_1,t_2]$, les points $(t,u(t))$ et $(t,\alpha(t))$ appartiennent au rectangle $\Gamma(\varepsilon,\mathrm{C})$ et l'on a

$$|f(t,u(t))-f(t,\alpha(t))|\leqslant \mathrm{C}|u(t)-\alpha(t)|.$$

2) c) Pour tout $t\in\mathrm{I}$, on a $\alpha'(t)\leqslant f(t,\alpha(t))$ et $u'(t)=f(t,u(t))$. D'après (II.2.b), pour tout $t\in[t_1,t_2]$, on a

$$\alpha'(t)-u'(t)\leqslant f(t,\alpha(t))-f(t,u(t))\leqslant|f(t,\alpha(t))-f(t,u(t))|\leqslant \mathrm{C}|\alpha(t)-u(t)|.$$

D'après (II.2.a), on a $\alpha(t)-u(t)\geqslant 0$ pour $t\in[t_1,t_2]$; on en déduit

$$\alpha'(t)-u'(t)\leqslant \mathrm{C}(\alpha(t)-u(t)).$$

En appliquant la question (II.1) à la fonction $h=\alpha-u$, on obtient $\alpha(t)-u(t)\leqslant 0$ pour $t\in[t_1,t_2]$, ce qui contredit (II.2.a).

On a ainsi démontré, par l'absurde, que l'on a $\alpha(t)\leqslant u(t)$ pour $t\geqslant t_0$, $t\in\mathrm{I}\cap\mathrm{J}$.

3) a) Prenons $\alpha(t)=\dfrac{1}{\lambda-t}$ pour $t\in]-\infty,\lambda[$; on a

$$\alpha'(t)=\frac{1}{(\lambda-t)^2}\leqslant\frac{1}{(\lambda-t)^2}+\left(\sin\frac{t}{\lambda-t}\right)^2=f(t,\alpha(t)).$$

3) b) Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $u : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une solution de l'équation (E). Soit $t_0 \in \mathrm{I}$ un nombre réel tel que $u(t_0) > 0$. Choisissons un nombre réel $\lambda > t_0$ assez grand pour que $u(t_0) \geqslant 1/(\lambda - t_0)$, par exemple $\lambda = t_0 + 1/u(t_0)$, et démontrons que λ est un majorant de I.

L'application α de la question (II.3.a) est une barrière inférieure de l'équation (E). La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$, donc localement lipschitzienne en x (voir le préambule). On peut appliquer la question (II.2) d'où l'on déduit que l'on a $u(t) \geqslant \alpha(t)$ pour $t \in [t_0, \lambda[\cap \mathrm{I}$. Si λ n'était pas un majorant de l'intervalle I, ce serait un point intérieur à I et $[t_0, \lambda]$ serait contenu dans I. Lorsque t tend vers λ dans $[t_0, \lambda[$, $\alpha(t)$ tend vers ∞, donc $u(t)$ aussi, ce qui est contradictoire avec la continuité de la fonction u au point λ. On a ainsi démontré par l'absurde que λ est un majorant de I.

4) *Lemme de la barrière supérieure* : On suppose que I est un intervalle réel non trivial et $\beta : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une application dérivable telle que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, le point $(t, \beta(t))$ appartienne à U et que l'on ait l'inégalité

$$\beta'(t) \geqslant f(t, \beta(t)).$$

Soit $u : \mathrm{J} \to \mathbf{R}$ une solution de (E) et $t_0 \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$. On suppose $\beta(t_0) \geqslant u(t_0)$; on a alors $\beta(t) \geqslant u(t)$ pour $t \geqslant t_0$, $t \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$.

Pour démontrer cela, on peut adapter la démonstration de la question (II.2) ; ou bien on *utilise* ce résultat, en remarquant que la fonction $-\beta$ est une barrière inférieure de l'équation différentielle $x' = -f(t, -x)$.

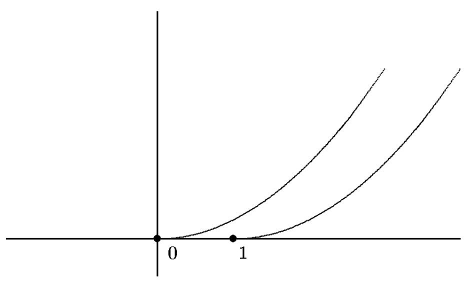
5) a) Toute solution de l'équation différentielle (E) en est à la fois barrière supérieure et barrière inférieure. Sous les hypothèses de l'énoncé, d'après les questions précédentes, on a donc $u_2(t) = u_1(t)$ dans $\mathrm{J}_1 \cap \mathrm{J}_2$ pour $t \geqslant t_0$.

Pour traiter la partie $\leqslant t_0$ de l'intervalle $\mathrm{J}_1 \cap \mathrm{J}_2$, on change t en $-t$. Plus précisément, les fonctions $t \mapsto u_1(-t)$ et $t \mapsto u_2(-t)$ sont solutions de l'équation différentielle $x' = -f(-t, x)$ à laquelle on peut appliquer le résultat précédent.

5) b.i) Les applications $(t, x) \mapsto x$, $y \mapsto |y|$ et $z \mapsto \sqrt{z}$ sont continues ; la fonction f est donc continue comme composée d'applications continues.

L'application f n'est pas localement lipschitzienne en x au point $(0, 0)$. En effet $\sqrt{|x|}/|x|$ tend vers l'infini quand x tend vers 0, avec $x \neq 0$, et ne peut être borné.

5) b.ii) Pour $x > 0$, l'égalité $x' = \sqrt{|x|}$ est équivalente à $(\sqrt{x})' = 1/2$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = 1/2$ sont les fonctions $t \mapsto (t - \gamma)/2$, où γ est un nombre réel arbitraire. Comme $\sqrt{x}$ est > 0, les solutions strictement positives *maximales* de (E) sont les fonctions u_γ définies sur les intervalles $]\gamma, \infty[$ par $u_\gamma(t) = (t - \gamma)^2/4$.



5) b.iii) Pour $\gamma \in \mathbf{R}$, notons v_γ la fonction sur $\mathbf{R}$ obtenue en prolongeant la fonction u_γ par 0 sur l'intervalle $]-\infty, \gamma]$. Remarquons que $u'_\gamma(t) = (t - \gamma)/2$ tend vers 0 quand t tend vers γ avec $t > \gamma$. Il en résulte que la fonction v_γ est de classe C^1. Elle est bien solution de l'équation différentielle (E).

Les fonctions v_0 et v_1 coïncident en $t = 0$, mais pas pour $t > 0$.

Partie III : Entonnoirs et anti-entonnoirs

1) Soit A un nombre réel tel que $|g'(t)| \leqslant \mathrm{A}$ pour $p < t < q$. Alors la fonction h définie sur l'intervalle $]p, q[$ par $h(t) = g(t) + \mathrm{A}t$ est dérivable et l'on a $h'(t) = g'(t) + \mathrm{A}$.

On en déduit d'abord $h'(t) \geqslant 0$ de sorte que la fonction h est croissante. Ensuite, on a $h'(t) \leqslant 2\mathrm{A}$. D'après le théorème des accroissements finis, pour t_0 et t dans $]p, q[$, on a $|h(t) - h(t_0)| \leqslant 2\mathrm{A}|t - t_0|| \leqslant 2\mathrm{A}(q - p)$. Ceci prouve que la fonction h est bornée sur l'intervalle $]p, q[$.

La fonction h, croissante et majorée, admet une limite quand t tend vers q, avec $t < q$. Il en est de même pour la fonction g.

On peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis pour voir que, pour toute suite (t_n) de points de l'intervalle $]p, q[$ qui tend vers q, la suite $(g(t_n))$ satisfait à la condition de Cauchy, et conclure.

2) a) Les conditions de l'énoncé expriment que la fonction α est une barrière inférieure et la fonction β une barrière supérieure. La conclusion résulte des questions (II.2) et (II.4) (lemmes des barrières inférieure et supérieure).

2) b) Démontrons que si l'intervalle $\mathrm{I} \cap [t_0, \infty[$ n'est pas contenu dans J, la solution u n'est pas maximale.

Le point t_0 appartient à I et à J. En outre, d'après l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz, l'intervalle de définition J de la solution maximale u est ouvert dans $\mathbf{R}$. Dire que $\mathrm{I} \cap [t_0, \infty[$ n'est pas contenu dans J, c'est dire qu'il existe un nombre réel $t_1 \in \mathrm{I}$ tel que $\mathrm{J} \cap [t_0, \infty[= [t_0, t_1[$.

Soit K l'ensemble des points (t, x) de U tels que

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad \alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t).$$

Comme les fonctions α et β sont continues, l'ensemble K est fermé et borné dans $\mathbf{R}^2$. Il est donc compact. La fonction f est continue ; elle est donc bornée sur K ; soit A un majorant de f sur K. De la question (III.2.a), on déduit que, pour $t \in [t_0, t_1[$, le point $(t, u(t))$ appartient à K et que l'on a donc $|u'(t)| \leqslant \mathrm{A}$.

D'après la question (III.1), la fonction u admet une limite finie m quand t tend vers t_1, avec $t < t_1$. Le point (t_1, m) est la limite des points $(t, u(t))$; il appartient donc aussi à l'ensemble K (qui est fermé dans $\mathbf{R}^2$). En particulier, le point (t_1, m) appartient à l'ensemble U.

La dérivée $u'(t) = f(t, u(t))$ tend vers $n = f(t_1, m)$ quand t tend vers t_1, avec $t < t_1$. La fonction u prolongée par $u(t_1) = m$ est dérivable à gauche au point t_1 et sa dérivée est égale à n. C'est un résultat classique que l'on peut admettre. On peut aussi le démontrer. Pour cela, soit ε un nombre réel > 0. Comme $u'(t)$ tend vers n, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que l'on ait $t_0 \leqslant t_1 - \eta$ et $|u'(t) - n| \leqslant \varepsilon$ pour $t_1 - \eta \leqslant t < t_1$. Pour t et $t' \in [t_1 - \eta, t_1[$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $u(t) - nt$ s'écrit $|u(t) - u(t') - n(t - t')| \leqslant \varepsilon|t - t'|$. Lorsque t' tend vers t_1, avec $t' < t_1$, on obtient $|u(t) - m - n(t - t_1)| \leqslant \varepsilon|t - t_1|$. Ceci démontre le résultat annoncé.

Ainsi, on a prolongé la solution u au point t_1 ; elle n'est donc pas maximale, ce qui est contradictoire. Par suite l'intervalle $\mathrm{I} \cap [t_0, \infty[$ est contenu dans J, autrement dit la solution u va jusqu'au bout de l'entonnoir Δ pour $t \geqslant t_0$, $t \in \mathrm{I}$.

3) a) Les fonctions α et β sont dérivables ; on a $\alpha(t) < t < \beta(t)$ et

$$\alpha'(t) = 1 + \lambda e^t, \quad \alpha(t) < t, \quad \text{d'où} \quad g(t, \alpha(t)) \geqslant 1, \quad f(t, \alpha(t)) = \lambda e^t + g(t, \alpha(t)) \geqslant \alpha'(t),$$

$$\beta'(t) = 1 - \lambda e^t, \quad \beta(t) > t, \quad \text{d'où} \quad g(t,\beta(t)) \leqslant 1, \quad f(t,\beta(t)) = -\lambda e^t + g(t,\beta(t)) \leqslant \beta'(t).$$

3) b) La fonction f est de classe C^1, donc localement lipschitzienne, et on peut appliquer les résultats de la question (III.2). Soit $u : J \to \mathbf{R}$ une solution maximale de l'équation différentielle (E). L'intervalle J n'est pas vide ; choisissons $t_0 \in J$ quelconque. Choisissons $\lambda > 0$ assez grand pour que

$$t_0 - \lambda e^{-t_0} \leqslant u(t_0) \leqslant t_0 + \lambda e^{-t_0}.$$

Pour cette valeur de λ, l'entonnoir

$$\Delta = \{(t,x) \mid t \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t)\}$$

contient le point $(t_0, u(t_0))$. D'après (III.2), l'intervalle J n'est pas majoré et l'on a, pour $t \geqslant t_0$, $\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t)$, autrement dit

$$t - \lambda e^{-t} \leqslant u(t) \leqslant t + \lambda e^{-t}.$$

Ceci montre que la droite d'équation $x = t$ est asymptote à la courbe $x = u(t)$ pour t tendant vers ∞.

4) Soient $u_1, u_2 : I \to \mathbf{R}$ deux solutions de l'équation différentielle (E) telles que $(t, u_1(t))$ et $(t, u_2(t))$ appartiennent à l'anti-entonnoir A pour tout $t \in \mathbf{R}$. D'après la question (II.5), il suffit qu'il existe un point t de I tel que $u_1(t) = u_2(t)$ pour que $u_1 = u_2$ partout.

Raisonnons par l'absurde et supposons les solutions u_1 et u_2 distinctes ; alors la fonction $v = u_2 - u_1$ ne s'annule jamais. Sur l'intervalle I, la fonction continue v a donc un signe constant. Quitte à échanger u_1 et u_2, on peut supposer $v > 0$ sur I. L'hypothèse sur la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ entraîne que, pour t fixé, la fonction partielle $x \mapsto f(t,x)$ est croissante. On a donc, pour $t \in I$,

$$v'(t) = u_2'(t) - u_1'(t) = f(t, u_2(t)) - f(t, u_1(t)) \geqslant 0.$$

La fonction v est donc croissante.

Par ailleurs, comme le point $(t, u(t))$ se trouve dans l'anti-entonnoir A, on a $\beta(t) \leqslant u_1(t) \leqslant u_2(t) \leqslant \alpha(t)$, d'où $0 \leqslant v(t) \leqslant \alpha(t) - \beta(t)$. Enfin, l'énoncé suppose que $\alpha(t) - \beta(t)$ tend vers 0 quand t tend vers b avec $t < b$; donc $v(t)$ tend aussi vers 0 dans les mêmes conditions.

La fonction v est positive, croissante et tend vers 0 à l'extrémité droite de l'intervalle I ; elle est donc identiquement nulle sur I, ce qui est contradictoire avec le fait que u_1 et u_2 soient distinctes.

On a prouvé l'unicité demandée.

5) a) Le calcul donne $\widetilde{f}(t,x) = -f(-t,x)$.

5) b) Cela résulte aussi d'un calcul sans difficulté.

5) c) Soit n un entier $\geqslant 1$. En application du théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une solution maximale w_n de l'équation différentielle $(\widehat{\mathrm{E}})$ telle que $w_n(-t_n) = \widehat{\alpha}(-t_n)$. Comme on a $\widehat{\beta}(-t_n) \leqslant w_n(-t_n) \leqslant \widehat{\alpha}(-t_n)$, en appliquant (III.2.b) à l'entonnoir $\widehat{\Delta}$, on voit que la solution w_n est définie sur un intervalle contenant $[-t_n, -t_0]$. Pour $t \in [t_0, t_n]$, posons $u_n(t) = w_n(-t)$. Alors u_n est solution de l'équation différentielle (E) et satisfait à $u_n(t_n) = \alpha(t_n)$.

La construction de v_n est analogue.

5) d) Rappelons d'abord que, si u et v sont des solutions distinctes de (E) sur un même intervalle J, on a démontré en (II.5) que $u(t) \neq v(t)$ en tout point t de J. Par suite la fonction $u - v$ a un signe constant sur l'intervalle J.

On a $u_n(t_n) = \alpha(t_n)$ et $v_n(t_n) = \beta(t_n)$; comme on a $\beta(t_n) \leqslant \alpha(t_n)$, on en déduit $v_n(t_n) \leqslant u_n(t_n)$ d'où $v_n(t) \leqslant u_n(t)$ pour $t \in [t_0, t_n]$ et en particulier $v_n(t_0) \leqslant u_n(t_0)$ d'après la remarque ci-dessus.

Remarquons aussi que l'on a $\beta(t) \leqslant v_n(t) \leqslant u_n(t) \leqslant \alpha_n(t)$ pour $t \in [t_0, t_n]$ ainsi qu'il résulte de (II.2) et de la construction de u_n et v_n (III.5.c).

La suite (t_n) est strictement croissante. Soit n un entier $\geqslant 1$; on a donc $t_0 < t_n < t_{n+1}$. Les inégalités $v_n(t_n) \leqslant v_{n+1}(t_n) \leqslant u_{n+1}(t_n) \leqslant u_n(t_n)$ entraînent les inégalités $v_n(t_0) \leqslant v_{n+1}(t_0) \leqslant u_{n+1}(t_0) \leqslant u_n(t_0)$.

Ceci démontre que la suite $(v_n(t_0))$ est croissante, que la suite $(u_n(t_0))$ décroissante et que l'on a $v_n(t_0) \leqslant u_n(t_0)$.

5) e) D'après la question précédente, la suite $(v_n(t_0))$ est croissante et majorée, la suite $(u_n(t_0))$ est décroissante et minorée. Elles ont donc des limites respectives v^* et u^* qui satisfont en outre à l'inégalité $v^* \leqslant u^*$. Tout point x_0 de l'intervalle $[v^*, u^*]$ convient.

5) f) Le point (t_0, x_0) appartient à U d'après ce qui précède. Soit u l'unique solution maximale de l'équation différentielle (E) telle que $u(t_0) = x_0$, et soit J son intervalle de définition.

Soit n un entier $\geqslant 1$. Les fonctions u_n et v_n, solutions de (E), définissent un entonnoir de (E) sur l'intervalle $[t_0, t_n]$. Par construction de x_0, on a $v_n(t_0) \leqslant u(t_0) \leqslant u_n(t_0)$. Il résulte de (II.2) que l'intervalle J contient l'intervalle $[t_0, t_n]$, et des considérations de (III.5.d) que l'on a $\beta(t) \leqslant v_n(t) \leqslant u(t) \leqslant u_n(t) \leqslant \alpha(t)$ pour $t \in [t_0, t_n]$.

La suite (t_n) a pour limite b, donc l'intervalle J contient l'intervalle $[t_0, b[$ réunion des intervalles $[t_0, t_n]$, et les inégalités $\beta(t) \leqslant u(t) \leqslant \alpha(t)$ sont valables sur cet intervalle.

Il reste à voir que l'intervalle J contient l'intervalle $]a, t_0] \cap \mathrm{I}$ et que les inégalités $\beta(t) \leqslant u(t) \leqslant \alpha(t)$ s'étendent à cet intervalle. Mais cela, c'est beaucoup plus direct. Il suffit d'appliquer le théorème de l'entonnoir à $\widehat{\beta}$, $\widehat{u}$ et $\widehat{\alpha}$, ce qui est légitime puisque $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\alpha}$ définissent bien un entonnoir de $(\widehat{\mathrm{E}})$.

Partie IV : Périodicité

1) Prenons pour f la fonction constante égale à 1, qui est périodique pour toute période. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont du type $t \mapsto t + c$, donc jamais périodiques.

2) a) La fonction v est définie dans l'intervalle $\mathrm{J} - \mathrm{T}$, translaté de J, par $v(t) = u(t + \mathrm{T})$. On a

$$v'(t) = u'(t + \mathrm{T}) = f(t + \mathrm{T}, u(t + \mathrm{T})) = f(t + \mathrm{T}, v(t)) = f(t, v(t)),$$

ce qui montre que la fonction v est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathrm{J} - \mathrm{T}$.

2) b) Par hypothèse, on a $v(t_0) = u(t_0)$. La propriété d'unicité des solutions (II.5) entraîne que les fonctions u et v coïncident sur l'intervalle $\mathrm{J} \cap (\mathrm{J} - \mathrm{T})$. Les fonctions u et v se recollent pour donner une solution dans la réunion $\mathrm{J} \cup (\mathrm{J} - \mathrm{T})$ de leurs intervalles de définition.

Mais la fonction u est une solution maximale ; on a donc $\mathrm{J} = \mathrm{J} \cup (\mathrm{J} - \mathrm{T})$, d'où $\mathrm{J} - \mathrm{T} \subset \mathrm{J}$. On démontrerait de la même manière, en considérant la fonction $t \mapsto u(t - \mathrm{T})$, l'inclusion $\mathrm{J} + \mathrm{T} \subset \mathrm{J}$, d'où $\mathrm{J} \subset \mathrm{J} - \mathrm{T}$ et finalement $\mathrm{J} = \mathrm{J} - \mathrm{T}$. Un intervalle de $\mathbf{R}$ invariant par une translation n'a pas d'extrémités ; s'il n'est pas vide, il est égal à $\mathbf{R}$.

On peut aussi démontrer que v est une solution maximale comme u et déduire du théorème de Cauchy-Lipschitz que l'on a $\mathrm{J} - \mathrm{T} = \mathrm{J}$.

D'après ce qui précède, on a bien $u(t + \mathrm{T}) = u(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

3) Soit $z \in]c, d[$. Si la fonction γ_z est T-périodique, alors $\mathrm{I}_z = \mathbf{R}$ d'après (IV.2.b), donc z appartient à D et $\mathrm{P}(z) = \gamma_z(0 + \mathrm{T}) = \gamma_z(0) = z$.

Inversement, supposons $z \in \mathrm{D}$ et $\mathrm{P}(z) = z$; alors T appartient à I_z et $\gamma_z(0 + \mathrm{T}) = \gamma_z(0)$. D'après (IV.2.b), on a $\mathrm{I}_z = \mathbf{R}$ et la fonction γ_z est T-périodique.

4) a) Soient z_1 et z_3 deux points de D tels que $z_1 \leqslant z_3$, et soit z_2 un point de l'intervalle $[z_1, z_3]$; démontrons que z_2 appartient à D. Les restrictions de γ_{z_1} et γ_{z_3} à l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$ définissent un entonnoir de (E). On a $\gamma_{z_1}(0) \leqslant \gamma_{z_2}(0) \leqslant \gamma_{z_3}(0)$, donc, d'après le théorème de l'entonnoir (III.2), l'intervalle I_{z_2} contient l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$, et par suite z_2 appartient à D.

Ceci prouve que l'ensemble D est un intervalle de $\mathbf{R}$.

4) b) Soient z_1 et z_2 deux points de D tels que $z_1 < z_2$. On a $\gamma_{z_1}(0) < \gamma_{z_2}(0)$ donc $\gamma_{z_1} < \gamma_{z_2}$ sur l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$ ainsi qu'on l'a déjà vu dans la question (III.4). En particulier $\gamma_{z_1}(\mathrm{T}) < \gamma_{z_2}(\mathrm{T})$, autrement dit $\mathrm{P}(z_1) < \mathrm{P}(z_2)$. Ainsi l'application P est strictement croissante.

4) c) Soient z'_1 et z'_3 deux points de P(D) tels que $z'_1 < z'_3$. Soient z_1 et z_3 les points de D tels que $z'_1 = \mathrm{P}(z_1)$ et $z'_3 = \mathrm{P}(z_3)$. Les fonctions γ_{z_1} et γ_{z_3} sont solutions de (E) sur l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$ et $\gamma_{z_1} < \gamma_{z_3}$; elles définissent donc à la fois un entonnoir et un anti-entonnoir sur cet intervalle.

Etant donné un point z'_2 tel que $z'_1 < z'_2 < z'_3$, il existe donc une solution u de (E) sur l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$ satisfaisant à

$$u(\mathrm{T}) = z'_2, \quad \gamma_{z_1}(t) \leqslant u(t) \leqslant \gamma_{z_3}(t) \quad \text{pour} \quad t \in [0, \mathrm{T}].$$

Posons $z_2 = u(0)$; en raison de l'unicité des solutions, la solution γ_{z_2} est définie et coïncide avec u sur l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$, de sorte que z_2 appartient à D et que $z'_2 = \mathrm{P}(z_2)$. Ceci prouve que l'ensemble P(D) est un intervalle.

4) d) Il est connu qu'une bijection strictement croissante d'un intervalle de $\mathbf{R}$ sur un intervalle de $\mathbf{R}$ est un homéomorphisme. Cela résulte par exemple du fait que l'image comme l'image réciproque d'un intervalle ouvert (resp. fermé) est un intervalle ouvert (resp. fermé).

5) a) Soit λ un nombre réel. Pour $t \in \mathbf{R}$, posons

$$\alpha(t) = \lambda - 3t, \quad \beta(t) = \lambda + 3t.$$

On a alors $\alpha(t) \leqslant \beta(t)$ pour $t \geqslant 0$, $\alpha' = -3$ et $\beta' = 3$. Comme $|f(t, x)|$ est toujours $\leqslant 3$, les fonctions α et β définissent un entonnoir sur l'intervalle $[0, \infty[$. La solution γ_λ telle que $\gamma_\lambda(0) = \lambda$ est donc bien définie sur l'intervalle $[0, \infty[$. Cela s'applique à $\lambda = 0$ et à $\lambda = -\pi$.

5) b) Pour $t \in \mathbf{R}$, on a $f(t, 0) = \sin t + 2$ qui est $\geqslant 0$. Par suite, la fonction constante égale à 0 est une barrière inférieure.

On a $u(0) = 0$; d'après (II.2), on a donc $u(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$, et en particulier $u(2\pi) \geqslant 0$.

De même, pour $t \in \mathbf{R}$, on a $f(t, -\pi) = \sin t - 2$ qui est $\leqslant 0$. La fonction constante égale à $-\pi$ est une barrière supérieure. On a $v(0) = -\pi$; d'après (II.4), on a donc $v(t) \leqslant -\pi$ pour tout $t \geqslant 0$, et en particulier $u(2\pi) \leqslant -\pi$.

5) c) D'après (IV.4.a) et (IV.5.a) l'intervalle $[-\pi, 0]$ est contenu dans l'intervalle D. D'après (IV.5.b), on a $\mathrm{P}(-\pi) \leqslant -\pi$ et $\mathrm{P}(0) \geqslant 0$. La fonction $z \mapsto \mathrm{P}(z) - z$ est continue sur l'intervalle $[-\pi, 0]$ (IV.4.d) ; elle est $\leqslant 0$ en $z = -\pi$ et $\geqslant 0$ en $z = 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point z de $[-\pi, 0]$ tel que $\mathrm{P}(z) - z = 0$, ce qui est demandé.

5) c) Choisissons un nombre réel $z \in [-\pi, 0]$ tel que $\mathrm{P}(z) = z$. D'après (IV.3) la fonction γ_z est une solution 2π-périodique de (E) ; d'après (IV.2), elle est définie sur $\mathbf{R}$.

5) d) On vient de démontrer l'existence d'une solution 2π-périodique de (E). Notons w une solution 2π-périodique de (E) (il en existe une). Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a $f(t, x + 2k\pi) = f(t, x)$; par suite $w + 2k\pi$ est encore une solution $2\pi-$ périodique de (E). D'où l'infinité demandée.

Partie V : Application

1) L'ensemble B est connexe, car il est l'image de $\mathbf{R} \times [a_1, a_2]$ par l'application $(\theta, \rho) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. L'application Φ de B dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\Phi(x) =< f(x_1, x_2), (-x_2, x_1) >$$

est continue. Par suite l'image $\Phi(\mathrm{B})$ est connexe ; c'est donc un intervalle de $\mathbf{R}$. Comme on suppose que Φ ne s'annule pas sur B (hypothèse (H2)), l'ensemble $\Phi(\mathrm{B})$ est contenu soit dans $]0, \infty[$, soit dans $]-\infty, 0[$. Dans le premier cas, l'hypothèse (H3) est satisfaite.

Dans le second cas, on transforme les données par symétrie. Prenons par exemple la symétrie orthogonale σ par rapport à la droite $x_2 = 0$ définie par $\sigma(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. Soit $u : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^2$ une solution de l'équation différentielle (E) et soit $\widetilde{u}$ l'application de I dans $\mathbf{R}^2$ définie par $\widetilde{u}(t) = \sigma(u(t))$. On a

$$\widetilde{u}'(t) = \sigma(u'(t)) = \sigma(f(u(t))).$$

Ainsi $\widetilde{u}$ est solution de l'équation différentielle $(\widetilde{\mathrm{E}})$ $x' = \widetilde{f}(x)$, où $\widetilde{f}(x) = \sigma(f(\sigma(x)))$.

L'hypothèse (H1) est conservée pour l'équation $(\widetilde{\mathrm{E}})$ puisque la symétrie σ conserve la couronne B, les composantes de son bord et les produits scalaires. On peut s'en assurer ; on a en effet

$$< \widetilde{f}(x), x >=< \sigma(f(\sigma(x))), x >=< f(\sigma(x)), \sigma(x) >,$$

qui est $\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$ selon que $|x| = a_1$ ou a_2.

L'hypothèse (H2) est aussi conservée, mais le signe est changé (ce que l'on voulait) et (H3) est satisfaite. En effet, notons R la rotation d'angle $\pi/2$; on a $< f(x_1, x_2), (-x_2, x_1) >=< f(x), \mathrm{R}(x) >$. En remarquant que l'on a $\sigma \circ \mathrm{R} = -\mathrm{R} \circ \sigma$, on a donc

$$\begin{aligned} < \widetilde{f}(x), \mathrm{R}(x) > &= < \sigma(f(\sigma(x))), (\mathrm{R} \circ \sigma)\sigma(x) >, \\ &= < \sigma(f(\sigma(x))), -(\sigma \circ \mathrm{R})\sigma(x) >, \\ &=- < (f(\sigma(x))), \mathrm{R}(\sigma(x)) > . \end{aligned}$$

On peut aussi faire ces raisonnements directement sur les coordonnées.

L'hypothèse (H1) est toujours vérifiée ; en effet, en posant $\theta' = -\theta$, on a

$$\begin{aligned} < \widetilde{f}(a_i\cos\theta, a_i\sin\theta), (\cos\theta, \sin\theta) >) &= f_1(a_i\cos\theta, -a_i\sin\theta)\cos\theta - f_2(a_i\cos\theta, -a_i\sin\theta)\sin\theta, \\ &= f_1(a_i\cos\theta', a_i\sin\theta')\cos\theta' + f_2(a_i\cos\theta', a_i\sin\theta')\sin\theta'. \end{aligned}$$

Par hypothèse ce produit scalaire est $\geqslant 0$ pour $i = 1$ et $\leqslant 0$ pour $i = 2$.

Pour l'hypothèse (H2), on a

$$\begin{aligned} < \widetilde{f}(x_1, x_2), (-x_2, x_1) > &= - x_2 f_1(x_1, -x_2) + x_1(-f_2(x_1, -x_2)), \\ &=- < f(x_1, -x_2), (-(-x_2), x_1) > . \end{aligned}$$

Le produit scalaire a changé de signe.

2) Calculons les dérivées par rapport à la variable t :

$$\begin{cases} u_1' &= h'(\theta)\,\theta'\cos\theta - h(\theta)\,(\sin\theta)\,\theta', \\ u_2' &= h'(\theta)\,\theta'\sin\theta + h(\theta)\,(\cos\theta)\,\theta'. \end{cases}$$

Pour que l'application u soit solution de l'équation différentielle (E), il faut et il suffit que l'on ait $u_1' = f_1(u)$, $u_2' = f_2(u)$. En inversant le système ci-dessus, en remarquant que h ne s'annule pas, et en posant

$$g_1(\theta,h)=f_1(h\cos\theta,h\sin\theta)\cos\theta+f_2(h\cos\theta,h\sin\theta)\sin\theta,$$

$$g_2(\theta,h)=-f_1(h\cos\theta,h\sin\theta)\,\frac{\sin\theta}{h}+f_2(h\cos\theta,h\sin\theta)\,\frac{\cos\theta}{h},$$

la condition est équivalente à

$$\begin{aligned} h'(\theta)\,\theta' &= g_1(\theta,h(\theta)),\\ \theta' &= g_2(\theta,h(\theta)). \end{aligned}$$

3) D'après l'hypothèse (H3) , la fonction Φ définie pour $\theta\in\mathbf{R}$ et $h>0$ par

$$\Phi(\theta,h)=-f_1(h\cos\theta,h\sin\theta)\,h\sin\theta+f_2(h\cos\theta,h\sin\theta)\,h\cos\theta,$$

est >0 sur l'ensemble $[0,2\pi]\times[a_1,a_2]$. Cette fonction est continue ; elle est donc >0 sur un voisinage de $[0,2\pi]\times[a_1,a_2]$ dans $[0,2\pi]\times]0,\infty[$. Comme l'intervalle fermé $[0,2\pi]$ est compact, ce voisinage contient un voisinage du type $[0,2\pi]\times]b_1,b_2[$, où $0<b_1<a_1<a_2<b_2$.

4) a) On pose ici $\mathrm{U}=\mathbf{R}\times]b_1,b_2[$. La condition (H1) donne, pour tout $\theta\in\mathbf{R}$,

$$g_1(\theta,a_1)\geqslant 0\geqslant g_1(\theta,a_2).$$

Comme la fonction g_2 est >0 sur U , on en déduit, pour tout $\theta\in\mathbf{R}$,

$$\mathrm{G}_1(\theta,a_1)\geqslant 0\geqslant \mathrm{G}_1(\theta,a_2).$$

Ceci exprime que les fonctions constantes égales respectivement à a_1 et à a_2 définissent un entonnoir $[0,2\pi]\times[a_1,a_2]$ de l'équation différentielle (E$'$) .

4) b) D'après le théorème de l'entonnoir (III.2), une solution maximale ρ de l'équation différentielle (E$'$) telle que $a_1\leqslant\rho(0)\leqslant a_2$ est définie au moins sur $[0,2\pi]$; elle reste dans l'entonnoir et on a $a_1\leqslant\rho(2\pi)\leqslant a_2$. Par suite l'intervalle $[a_1,a_2]$ est contenu dans D et l'application P envoie l'intervalle $[a_1,a_2]$ dans lui-même.

4) c) L'application P est continue (IV.4) et envoie l'intervalle $[a_1,a_2]$ dans lui-même. Elle admet donc un point fixe dans cet intervalle (*cf.* par exemple (IV.5)). Comme dans (IV.5), on en déduit l'existence d'une solution périodique.

5) a) Rappelons que la fonction g_2 est >0 sur $\mathbf{R}\times]b_1,b_2[$. De plus $h(\theta)$ est toujours supposé dans l'intervalle $[a_1,a_2]$. La fonction ψ est continue et >0 sur l'intervalle compact $[0,2\pi]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. La borne inférieure μ_1 est atteinte, donc elle est >0 . Soient μ_2 la borne supérieure ; on a

$$0<\mu_1\leqslant\psi(\theta)\leqslant\mu_2$$

pour tout $\theta\in[0,2\pi]$, donc pour tout $\theta\in\mathbf{R}$ par périodicité.

5) b) L'équation différentielle (E$''$) $\theta'=\psi(\theta)$ s'écrit encore $\theta'=f(t,\theta)$, où f est définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(t,\theta)=\psi(\theta)$. La fonction f est de classe C^1 car la fonction g_2 est de classe C^1 et la fonction h aussi (h est dérivable et $h'=\mathrm{G}(\theta,h)$ est continue).

Soient t_0 et $\theta_0\in\mathbf{R}$; les fonctions α et β définies sur $[t_0,\infty[$ par

$$\alpha(t)=\theta_0+\mu_1 t,\quad \beta(t)=\theta_0+\mu_2 t,$$

définissent un entonnoir sur $[t_0,\infty[$ pour l'équation différentielle (E$''$) . D'après (III.2), la solution maximale θ de l'équation (E$''$) telle que $\theta(t_0)=\theta_0$ est définie au moins sur $[t_0,+\infty[$. Un raisonnement similaire sur $\widehat{\theta}:t\mapsto\theta(-t)$ montre que la solution θ est définie sur $\mathbf{R}$ en entier.

La fonction θ est strictement croissante puisque la fonction ψ est >0 en tout point. L'inégalité $\theta(t)\geqslant\theta_0+\mu_1 t$ pour $t\geqslant t_0$ montre que $\theta(t)$ tend vers ∞ quand t tend vers ∞ . De même $\theta(t)$ tend vers $-\infty$ quand t tend vers $-\infty$. Il en résulte que la fonction θ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

6) Soit toujours h une solution 2π-périodique de l'équation différentielle (E'), et soit θ une solution maximale de l'équation (E'') (théorème de Cauchy-Lipschitz). La fonction θ est définie sur $\mathbf{R}$ d'après (V.5). Pour $t \in \mathbf{R}$, posons

$$u(t) = (h(\theta(t)) \cos\theta(t), h(\theta(t)) \sin\theta(t)).$$

La fonction u est solution de l'équation (E) d'après (V.2).

La fonction u n'est pas constante, puisque $u'(t) = f(u(t))$, et $f(x) \neq 0$ d'après l'hypothèse (H2).

D'après (V.5.b), il existe $\mathrm{T} \in \mathbf{R}$ tel que $\theta(\mathrm{T}) = \theta(0) + 2\pi$. Notons que T est > 0 car la fonction θ est croissante. On a alors $u(\mathrm{T}) = u(0)$. L'application $t \mapsto u(t + \mathrm{T})$ est solution de (E) ; elle est égale à u pour $t = 0$, donc pour tout $t \in \mathbf{R}$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Ceci prouve que la fonction u est périodique de période T.

∘ ∘ ∘

4.2.3 Commentaires sur la deuxième épreuve écrite

Ce problème met en place les outils que sont les barrières, les entonnoirs et anti-entonnoirs pour prouver existence et unicité de solutions d'équations différentielles et étudier des propriétés de ces solutions. Il conduit à une dernière partie établissant l'existence d'une solution périodique d'une équation différentielle dans le plan. Aucun résultat n'étant admis, le problème est assez long pour une épreuve de cette durée, et aucun candidat ne l'a achevé. Les résultats utilisés sont tous du domaine de l'analyse classique : topologie de la droite réelle, accroissements finis, coordonnées polaires.

Les copies n'ont en général traité substantiellement que les questions de trois premières parties. Bon nombre de copies ont traité les trois premières questions de la partie IV. La meilleure copie a abordé toutes les parties du problème, mais n'est pas venue à bout de toutes les difficultés, notamment de celles de la partie IV.

La rédaction des copies est généralement bonne, et les raisonnements souvent convaincants. Avec une certaine qualité de rédaction, on peut attendre que des professeurs de mathématiques en exercice fournissent des raisonnements rigoureux. C'est le cas, dans cette épreuve, pour une bonne proportion de copies. Il reste que nombre de candidats invoquent des noms de théorèmes ou des résultats antérieurs qui devraient, par cette seule invocation, établir les conclusions cherchées. Ce n'est pas suffisant : pour appliquer un résultat à une situation, il est nécessaire d'énoncer ce résultat, d'établir que l'on est bien dans une situation où il peut être appliqué, et enfin de conclure. Par ailleurs, certaines questions demandaient des raisonnements assez délicats qui ont mis en difficulté des candidats par ailleurs à l'aise dans les questions plus classiques. Nous allons passer en revue ces points délicats, en incitant à une lecture positive pour éviter de considérer ces commentaires comme un simple bétisier.

Partie I

Il fallait d'abord bien lire l'énoncé pour se mettre d'accord sur ce qu'est une solution d'une équation différentielle : c'est une fonction, et elle est définie sur un intervalle. Dans la question (I.2), beaucoup de copies ne voient pas que la fonction u_1 est donnée, ni qu'il s'agit de dire que l'on connaît toutes les solutions de l'équation différentielle $u_1'' + u_1 = 0$, et que la fonction u_1 est l'une d'entre elles. Il ne suffit pas de dire que l'on connaît une solution, par exemple la fonction $t \mapsto \sin t$, pour que la fonction u_1 soit nécessairement celle-là.

La question (I.3) demandait un tracé « sommaire » de la courbe C_p, « sommaire » pour deux raisons, d'abord parce que p et q ne son pas fixés, ensuite pour éviter que les candidats passent trop de temps à des tracés point par point. L'énoncé ne demandait pas explicitement quelles symétries pouvaient faciliter le tracé, et bien des copies les ont ignorées ; en revanche l'énoncé demandait bien de placer les points des axes de coordonnées et de préciser les tangentes. La comparaison de la distance à l'origine de ces points a été rarement faite, et les tracés s'en ressentent : globalement, le résultat n'est pas très bon.

La fin de cette question, (I.3.d) et (I.3.e), n'a été bien traitée que dans très peu de copies. On se reportera à la solution donnée ci-dessus pour voir ce qui était attendu. Un phénomène de « fatigue en fin de partie » a fait que des candidats qui avaient calculé la dérivée θ' n'ont pas conclu à la stricte monotonie de la fonction θ.

Partie II

La première question a été en général bien traitée. Il n'est pas nécessaire d'argumenter longuement pour dire que la fonction Λ, définie par $\Lambda(t) = h(t)\, e^{-\mathrm{K}t}$, est dérivable ; encore faut-il dire qu'elle est dérivable avant de calculer sa dérivée.

La question (II.2) nécessite des raisonnements assez fins. Ainsi, dans le a), le théorème des valeurs intermédiaires ne suffit pas ; le point t_1 doit être le plus grand pour lequel les fonctions u et α sont égales. Cette question a été assez discriminante.

La question (II.3) n'appelle que deux remarques : d'abord, le calcul de la dérivée n'est pas toujours exact ; ensuite, on doit dire pourquoi la fonction f a bien les propriétés qui permettent d'appliquer les résultats précédents.

Dans la question (II.5.a), il ne faut pas oublier de vérifier que les deux solutions coïncident pour $t \leqslant t_0$. La suite de la question a été peu, et souvent mal, traitée alors qu'il s'agit d'un exemple assez classique. En particulier, il ne faut pas oublier de vérifier que les dérivées coïncident bien dans les recollements si l'on veut obtenir des fonctions de classe C^1.

Partie III

Au grand étonnement des correcteurs, la question (III.1) est souvent mal traitée, alors qu'il s'agit encore d'une application classique du théorème des accroissements finis, et que l'on peut la traiter de plusieurs manières (voir solution). La question (III.2.a) a été généralement bien traitée par un tiers des candidats. La question (III.2.b), assez délicate, a été très peu traitée. La question (III.3.a), traitant d'un exemple, a été beaucoup plus abordée, et en général bien traitée, (comme précédemment, on doit dire pourquoi la fonction f a bien les propriétés...), mais souvent sans que le candidat persévère et traite la question (III.3.b). La fin de cette partie a été très peu abordée. Les questions (III.5.a) et (III.5.b) ont été correctement traitées dans les copies qui les ont abordées.

Partie IV

Curieusement, la première question a été peu traitée. La question (IV.2.a) a été traitée correctement. Dans la question (IV.2.b), c'est souvent une rédaction maladroite qui ne permet pas d'arriver à la démonstration de la conclusion. Le résultat paraît bien clair, mais il faut un peu raisonner sur les intervalles de la droite et utiliser le fait que la fonction u est une solution maximale. Le raisonnement est détaillé dans la solution ci-dessus ; il ne peut pas être omis ni raccourci. La question (IV.3) a été généralement bien traitée par les candidats qui ont abordé la quatrième partie.

La dernière partie n'a pratiquement jamais été abordée.

Épreuves orales

5 Rapport sur les épreuves orales

5.1 Considérations générales

5.1.1 Session 2006

Le jury est, cette année encore, relativement satisfait de la prestation orale des candidats admissibles. Après les épreuves orales, la qualité des prestations a permis de pourvoir tous les postes offerts au concours d'agrégation. Pour le CAERPA, on observe une diminution sensible du nombre des candidats admissibles et une stabilité du nombre des candidats admis. Il n'a pas été possible de pourvoir tous les postes offerts au CAERPA.

5.1.2 Déroulement des épreuves

Chacune des deux épreuves comporte un temps de préparation de trois heures. Les candidats reçoivent une convocation aux épreuves d'admission mentionnant l'heure du début de la préparation (se présenter un quart d'heure avant), ainsi que l'heure de passage devant la commission d'oral pour chacune des deux épreuves. En règle générale, les jours de passage sont deux jours consécutifs. Noter que le jury siège les dimanches et jours fériés.

Le premier jour, le candidat choisit une enveloppe qui contient un choix de deux sujets d'exposés. Ces deux sujets sont du même grand groupe, soit algèbre et géométrie, soit analyse et probabilités. Pendant la préparation, le candidat choisit le sujet qu'il va traiter ; il est peu stratégique d'hésiter trop longtemps.

Le deuxième jour (en général), le candidat choisit une enveloppe contenant un choix de deux sujets de l'épreuve d'exercices. Ces deux sujets sont du grand groupe que le candidat n'a pas tiré lors de l'épreuve d'exposé. Le jury veille à ce que les sujets de chaque couplage soient suffisamment différenciés pour qu'il y ait un vrai choix.

5.1.3 Evolution du concours

Le rapport de la session 2005 avait annoncé une certaine évolution de la première épreuve orale. Cette année, on a introduit dans la liste des titres d'exposés des sujets plus larges que les sujets habituellement posés. L'introduction des « leçons de synthèse » a entraîné bien entendu la suppression d'un certain nombre des leçons plus spécialisées qui étaient précédemment proposées.

Ces sujets plus larges sont facilement identifiables dans les listes qui suivent. Ils doivent être traités dans les mêmes conditions que les autres sujets, c'est-à-dire que l'épreuve comprend bien trois parties (plan, développement, questions des examinateurs) comme indiqué ci-dessous.

Le plan prendra plus la forme d'un exposé que d'une leçon. Ainsi, le candidat qui traite le sujet sur la trigonométrie pourra suivre cette notion dans les programmes de l'enseignement du second degré pour conclure sur les définitions rigoureuses utilisant les séries entières, ou bien suivre un processus inverse. Il n'est aucunement demandé aux candidats un exposé exhaustif de ces questions larges en quinze minutes. Il s'agit de valoriser l'expérience et la réflexion pédagogique des professeurs, au lieu de leur demander une leçon type sur un point précis du programme, ce qui conduit souvent au bachotage dans la préparation au concours.

Le développement doit répondre aux critères généraux indiqués ci-dessous. Ce doit être un développement rigoureux et significatif d'un point particulier cohérent avec le sujet.

Les thèmes de la seconde épreuve ne sont pas changés. Mais là encore, l'expérience et la compétence pédagogique doivent se valoriser dans la préparation d'une séance d'exercice.

5.1.4 Préparation aux épreuves et documents

Pendant la préparation, tout document personnel est interdit. Seuls sont autorisés les livres et revues en vente libre dans le commerce. Les candidats peuvent utiliser les livres de la bibliothèque qui est mise à leur disposition, et dont l'inventaire figure en fin de ce rapport. Ils peuvent aussi utiliser leurs livres personnels à condition qu'ils ne soient pas annotés. Lors des trois heures de préparation, les candidats sont libres, à tout moment, de consulter ou d'emprunter des livres à la bibliothèque ou de prendre dans leurs bagages les livres qu'ils ont apportés.

Les calculatrices de poches sont considérées comme des document personnels et sont, à ce titre, interdites. Cependant, selon le sujet traité, l'usage d'une calculatrice peut être autorisé par le président du jury, ou son représentant, à condition que le candidat justifie de son utilisation lors de la présentation de l'exposé ou des exercices devant la commission d'oral.

5.1.5 Liste des sujets de la session 2006

LEÇONS D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

101 Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.

102 Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.

103 Congruences dans $\mathbf{Z}$, anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

104 Propriétés élémentaires liées à la notion de nombre premier.

105 PGCD, PPCM dans $\mathbf{Z}$, théorème de Bézout. Applications.

106 PGCD dans $\mathrm{K[X]}$, où K est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.

107 Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels.

108 Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une application linéaire.

109 Formes linéaires, hyperplans, dualité (on pourra se limiter à des espaces vectoriels de dimension finie). Exemples.

110 Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, polynômes d'endomorphisme.

111 Changements de bases en algèbre linéaire (applications linéaires, formes bilinéaires ...). Applications.

112 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications.

113 Déterminants. Applications.

114 Groupe des homothéties et translations dans le plan affine. Applications.

115 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimensions 2, de dimension 3.

116 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien (dimension finie). Applications.

117 Formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien de dimension finie (les généralités sur les formes quadratiques seront supposées connues). Applications géométriques.

118 Applications géométriques des nombres complexes.

119 Isométries du plan affine euclidien, formes réduites. Applications.

120 Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, formes réduites.

121 Géométrie du triangle.

122 Barycentres. Applications.

123 Droites et plans dans l'espace.

124 Projecteurs et symétries dans un espace affine de dimension finie.

125 Cercles dans le plan affine euclidien.

126 Cinématique du point : vitesse, accélération. Exemples de mouvements. On pourra se limiter aux mouvements plans.

127 Division euclidienne.

128 Utilisation de groupes en géométrie.

129 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes. Racines, polynomes irréductibles, factorisation.

130 Rang en algèbre linéaire.

131 Utilisation de transformations en géométrie.

132 Coniques.

133 Courbes planes paramétrées.

134 Diverses notions d'angle et leurs utilisations.

135 Équations et géométrie.

136 Factorisation de matrices. Cas des matrices symétriques réelles. Applications.

137 Formes réduites d'endomorphismes. Applications.

138 Résolution de problèmes modélisés par des graphes.

139 Trigonométrie.

LEÇONS D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

201 Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence.

202 Séries à termes réels positifs.

203 Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi–convergence (les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs étant supposés connus).

204 Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes.

205 Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation de fonctions.

206 Parties compactes de $\mathbf{R}^n$. Fonctions continues sur une telle partie. Exemples.

207 Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.

208 Théorème du point fixe. Applications.

209 Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.

210 Séries entières. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.

211 Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés. Exemples.

212 Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques, nombre π .

213 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.

214 Théorème de Rolle. Applications.

215 Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.

216 Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.

217 Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples.

218 Calcul de valeurs approchées d'une intégrale. Exemples d'estimation de l'erreur.

219 Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$. Exemples

220 Intégrale d'une fonction numérique continue sur un intervalle compact. Propriétés.

221 Intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications.

222 Équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a , b , c sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes.

223 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants ; écriture matricielle ; exponentielle d'une matrice. Exemples.

224 Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentielle. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Fonctions composées.

225 Fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$. Inégalité des accroissements finis. Applications.

226 Suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli, variable aléatoire de loi binomiale, approximations de cette loi.

227 Probabilité conditionnelle et indépendance. Couples de variables aléatoires. Exemples.

228 Espérance, variance ; loi faible des grands nombres.

229 Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.

230 Approximation d'un nombre réel. Théorèmes et méthodes.

231 Équations et systèmes différentiels.

232 Exponentielles et logarithmes

233 Fonctions définies sur un intervalle, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^n$. Dérivabilité, théorème des accroissements finis, exemples.

234 Intégrales et primitives.

235 Le nombre π .

236 Recherche d'extremums.

237 Suites de fonctions. Divers modes de convergence. Exemples.

238 Suites de nombres réels.

239 Utilisations de la dérivée d'une fonction numérique.

EXERCICES D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

301 Exercices sur les groupes.

302 Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans $\mathbf{Z}$.

303 Exercices faisant intervenir la division euclidienne.

304 Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.

305 Exercices faisant intervenir les nombres premiers.

306 Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM et mettant en œuvre des algorithmes associés.

307 Exercices faisant intervenir des dénombrements.

308 Exercices faisant intervenir les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.

309 Exercices faisant intervenir polynômes et fractions rationnelles sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

310 Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.

311 Exercices faisant intervenir la notion de rang.

312 Exercices faisant intervenir des matrices inversibles.

313 Exercices faisant intervenir des systèmes linéaires.

314 Exercices faisant intervenir des déterminants.

315 Exemples de recherche et d'emploi de vecteurs propres et valeurs propres.

316 Exercices faisant intervenir la réduction des endomorphismes.

317 Exercices sur les endomorphismes diagonalisables.

318 Exercices faisant intervenir des projecteurs ou des symétries.

319 Exemples de méthodes et d'algorithmes de calcul en algèbre linéaire.

320 Exercices sur les isométries vectorielles dans les espaces euclidiens en dimension 2 et en dimension 3.

321 Exercices faisant intervenir la réduction des matrices réelles symétriques.

322 Exercices sur les formes quadratiques.

323 Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.

324 Exercices faisant intervenir des similitudes planes directes ou indirectes.

325 Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimension 2 et en dimension 3.

326 Exercices faisant intervenir la notion de barycentre.

327 Exercices faisant intervenir des applications affines.

328 Exercices sur les aires et les volumes.

329 Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimension 2 et en dimension 3.

330 Exercices sur la cocyclicité.

331 Exercices sur les cercles.

332 Exercices de géométrie plane faisant intervenir des triangles isométriques ou semblables.

333 Exercices sur les coniques.

334 Exemples d'étude de courbes planes.

335 Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).

336 Exercices sur les propriétés métriques des courbes de l'espace.

337 Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.

338 Exemples de groupes en géométrie.

339 Exercices de construction en géométrie plane.

340 Exercices de géométrie faisant intervenir le choix d'un repère.

341 Exercices de cinématique du point.

342 Exercices de cinématique du point.

343 Exercices sur les triangles.

EXERCICES D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

401 Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes.

402 Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.

403 Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.

404 Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.

405 Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.

406 Exemples de comportement asymptotique de suites ; rapidité de convergence ou de divergence.

407 Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.

408 Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.

409 Exercices sur les suites de polynômes orthogonaux.

410 Comparaison sur des exemples de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions d'une variable réelle.

411 Exemples d'étude de fonctions définies par une série.

412 Exemples de développements en série entière. Applications.

413 Exemples d'emploi de séries entières ou trigonométriques pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

414 Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.

415 Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une variable réelle.

416 Exemples d'approximations de fonctions numériques ; utilisations.

417 Exemples d'utilisation de développements limités.

418 Exemples d'utilisation d'intégrales pour l'étude de suites et de séries.

419 Exemples d'utilisation de suites ou de séries pour l'étude d'intégrales.

420 Exemples de calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

421 Exemples d'étude d'intégrales impropres.

422 Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.

423 Exemples de calculs d'aires et de volumes.

424 Exemples de calculs d'intégrales multiples.

425 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.

426 Exemples de résolution d'équations différentielles scalaires, linéaires ou non linéaires.

427 Exemples de résolution de systèmes différentiels linéaires.

428 Exemples d'équations différentielles issues des sciences expérimentales ou de l'économie.

429 Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une variable, d'une fonction numérique de deux variables.

430 Exemples d'approximations d'un nombre réel.

431 Approximations du nombre π .

432 Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.

433 Exemples d'étude probabiliste de situations concrètes.

434 Exemples de calcul de primitives.

435 Exemples de variables aléatoires et applications.

436 Exemples de problèmes de dénombrement.

437 Exemples de calculs de la norme d'une application linéaire continue.

438 Exemples de calculs de la longueur d'un arc de classe $\mathcal{C}^1$.

439 Exemples de systèmes différentiels linéaires $\mathrm{Y}' = \mathrm{AY}$ à coefficients réels constants en dimension 2. Allure des trajectoires.

5.2 La première épreuve orale

Cette épreuve comprend trois parties : le plan, le développement, puis les questions du jury. Chacune dure un quart d'heure. Elle est précédée d'une préparation de trois heures. Avant de faire des commentaires spécifiques à chacune des phases de l'épreuve, commençons par des remarques d'ordre général.

Il est conseillé de bien lire et comprendre le sujet. Il vaut mieux éviter de se disperser en cherchant dans un trop grand nombre d'ouvrages. Il faut bien sûr maîtriser les résultats du programme de l'agrégation correspondant au sujet traité, mais si un candidat, pour une application ou une comparaison de méthodes, évoque d'autres outils du programme, il est nécessaire qu'il les connaisse aussi.

Les deux premières parties de l'épreuve : plan et exposé se déroulent sans interruption, les questions ne débutent qu'ensuite et portent en premier lieu sur ce qui vient d'être présenté. Ce mode de fonctionnement impose au candidat de faire tenir l'intégralité de son plan et de son développement sur le tableau (recto verso). Il y a bien assez de place à condition de gérer correctement le tableau.

Le plan

En voici le principe : en quinze minutes, il s'agit de faire un exposé structuré sur le sujet choisi : définitions, énoncés clairs et précis, exemples, contre exemples, applications. . .Cela doit ressembler à un cours magistral dans lequel on ne présente toutefois aucune démonstration. Il doit être conforme au programme de l'agrégation interne.

Le candidat n'est pas obligé d'être exhaustif sur le sujet, mais il est souhaitable qu'il puisse expliquer ses choix. Le jury attend avant tout un exposé logique avec des énoncés complets et exacts, des définitions et théorèmes (qu'il ne faut pas confondre) et une présentation rendue attrayante par l'intérêt porté par le candidat au sujet, par de nombreux exemples et quelques figures. Mais il est important aussi de montrer que l'on a compris l'utilité et la portée du chapitre en donnant des applications, surtout si le titre de la leçon le demande explicitement.

Le candidat doit gérer l'espace, le tableau, et la durée de quinze minutes. Beaucoup de candidats restent dix minutes sur des généralités avant de « bâcler au sprint » les résultats importants ou les applications. Les abréviations sont tolérées, on peut s'abstenir d'écrire quelques résultats proches d'autres résultats déjà mentionnés, mais les propositions et les définitions doivent être intégralement écrites au tableau « prêtes à être apprises par des élèves ». L'énoncé oral des prérequis est possible ; en modérer la longueur.

Le candidat peut consulter ses notes personnelles en cours d'exposé mais ne peut se contenter de les recopier !

Il termine son exposé en indiquant le point qu'il se propose de développer dans la deuxième partie. Il est déconseillé d'attendre ce moment pour prendre une décision et de montrer aux examinateurs des hésitations sur ce choix

Le plan, comme le développement, ne peuvent se limiter à un compte rendu de lecture d'un ouvrage, si bon que soit cet ouvrage. C'est ainsi qu'il est fortement déconseillé aux candidats de se servir d'ouvrages se présentant comme des recueils de leçons modèles à l'usage des concours. Les examinateurs sont rarement dupes et arrivent, notamment lors des questions au candidat, à vérifier les connaissances du candidat et sa compréhension réelle du sujet.

Par ailleurs, le jury est plus indulgent pour un plan de niveau mathématique modeste, mais bien maîtrisé, que pour un exposé plus ambitieux que le candidat récite par cœur sans en avoir compris les articulations.

Le développement

Le candidat a le choix de développer une démonstration, un exemple ou une application. Ce choix doit être consistant, cohérent avec le niveau de l'exposé et pouvoir être présenté en quinze minutes. Il doit porter sur une partie significative de l'exposé : un même développement, bien préparé pendant l'année, peut servir dans plusieurs leçons mais pas dans toutes.

Pendant cette phase le candidat doit mettre en valeur ses qualités pédagogiques, il doit travailler sans notes ; il a compris ce qu'il expose et le rend compréhensible à son auditoire :

- il commence par expliquer les idées importantes de la démonstration avant de rentrer dans les détails techniques,

- il s'appuie le plus possible sur des figures, et pas seulement en géométrie,

- il insiste sur les points difficiles,

- il montre qu'il a bien compris le rôle de chacune des hypothèses

Nous conseillons aux candidats de préparer soigneusement cette partie.

Les questions du jury

Le candidat doit avoir conscience que, par ses questions, le jury ne cherche qu'à

- corriger une erreur commise, rectifier une imprécision dans le plan ou une démonstration,

- contrôler si la démonstration est comprise ou seulement récitée, par exemple en variant les hypothèses,

- vérifier que le candidat a une maîtrise suffisante des sujets abordés : par exemple un candidat qui a énoncé le théorème de Heine ne devrait pas avoir de difficulté à démontrer que la fonction *sinus* est uniformément continue sur toute la droite,

- donner au candidat l'occasion de montrer ses connaissances sur d'autres aspects du sujet ou des applications, en restant dans le cadre du programme.

On ne demande pas à un candidat qui vient de passer déjà plus de trente minutes d'épreuve devant un jury d'improviser la résolution d'un exercice.

Ainsi, le candidat ne doit pas se laisser démonter par ces questions, leur seul but est de lui permettre de se valoriser.

Choix des leçons

Cette année, peu de candidats ont choisi les sujets des nouvelles leçons de synthèse. Les candidats qui ont choisi l'un de ces sujets ont eu des prestations de niveau varié, certaines très bonnes, mais, dans beaucoup de cas, médiocres faute d'une structuration pertinente du plan et faute aussi, sans doute, de l'habitude de présenter un ensemble bien articulé de savoirs.

Comme les années précédentes, le jury a constaté une réticence de la part d'un bon nombre de candidats à choisir une leçon de géométrie ou de calcul des probabilités. C'est regrettable car la préparation au concours interne d'agrégation pourrait être l'occasion pour les professeurs de mettre à jour leurs connaissances dans ces deux domaines qui ont une place importante dans les programmes actuels de l'enseignement secondaire.

5.3 La seconde épreuve orale

Déroulement de l'épreuve

Cette épreuve, comme la précédente, dure 45 minutes au maximum et elle est précédée de trois heures de préparation.

A son arrivée, le candidat tire au sort une enveloppe comportant deux thèmes d'exercices et choisit l'un d'entre eux. Il dispose alors de trois heures pendant lesquelles il peut librement consulter les ouvrages mis à sa disposition par la bibliothèque de l'agrégation, ou bien ceux qu'il aura pris soin d'apporter avec lui.

Pendant sa préparation, le candidat sélectionne trois à six exercices correspondant au thème retenu et rédige un document comportant la liste des énoncés, ainsi que les motivations et remarques correspondantes. A l'issue de la préparation, des photocopies de ce document sont réalisées par les surveillants ; ces photocopies sont remises aux examinateurs et l'épreuve orale proprement dite peut alors commencer.

L'épreuve se déroule alors en trois temps :

1) Présentation motivée de l'ensemble des exercices sélectionnés par le candidat (durée maximale de 15 minutes).

2) Résolution commentée d'un des exercices au choix du candidat parmi ceux qu'il vient de présenter (durée maximale de 15 minutes).

3) Questions du jury (durée minimale de 15 minutes).

Présentation motivée des exercices

Il s'agit d'expliquer les raisons qui ont conduit au choix des exercices. Celles-ci peuvent être d'ordre pédagogique ou d'ordre mathématique, l'un n'excluant évidemment pas l'autre. Voici quelques suggestions quant aux motivations possibles :

Objectif : Il est important d'indiquer à quel public s'adressent les exercices et ce qu'ils supposent connu de ce public. Il faut également décrire quel est l'objectif de chaque exercice : illustration ou complément d'un résultat de cours, entraînement à une technique de calcul particulière, mise en évidence d'une propriété remarquable, ... On peut préciser la nature du travail de l'élève (exercice d'entraînement, de réinvestissement, d'évaluation, de recherche...).

Niveau : Les difficultés éventuelles d'un énoncé doivent être soulignées. Le souci de graduer ces difficultés ou d'aider à les surmonter par des indications appropriées constitue un aspect possible de la présentation des exercices.

Cohérence : Les énoncés ne doivent pas constituer une collection hétéroclite : leur ensemble doit posséder un certain degré de cohérence, variable selon les sujets. Indiquer les connexions pouvant relier certains énoncés est une démarche appréciée. Penser à indiquer la place de ces exercices dans une séquence d'enseignement.

Intérêt : Un exercice peut apporter un éclairage particulier sur une notion, ou laisser entrevoir un développement de celle-ci ou encore en donner une application pertinente. De tels critères peuvent être mis en avant pour justifier du choix d'un exercice. Lorsqu'il existe diverses méthodes pour résoudre un problème donné, un exercice peut avoir pour objectif d'en comparer certaines, ne serait-ce que sur des exemples. Ceci peut également constituer une motivation intéressante.

Bien souvent, les candidats n'ont pas pris la peine de réfléchir à cette première partie de leur oral et se contentent, en une minute ou deux, de relire leurs énoncés. D'autres encore, pratiquent avec plus ou moins de conviction la stratégie du « remplissage », qui consiste à occuper au mieux les quinze minutes dont ils disposent en diluant la présentation de leurs exercices à grands coups de phrases creuses comme « J'ai choisi de vous proposer tel exercice parce que je le trouvais intéressant », ou bien « Tel exercice conduit à la démonstration de tel résultat, ce qui est bien pratique ». D'autres enfin, se contentent d'énoncer quelques théorèmes en rapport avec les exercices : ce n'est pas cela non plus qui est attendu.

Une autre erreur à éviter est le hors sujet : le candidat doit veiller à ce que les exercices qu'il propose entrent bien dans le cadre délimité par le titre du sujet. De plus, si l'intitulé est du type « Exercices faisant intervenir telle notion ... », il faut bien comprendre qu'on ne demande pas de simples exercices d'entraînement sur la notion en question. A titre d'exemple, si l'intitulé est « Exercices faisant intervenir des déterminants », on ne saurait se limiter au calcul de quelques déterminants. On attend en revanche des exercices montrant diverses utilisations de cette notion (à titre indicatif : résolution des systèmes de Cramer, calcul des valeurs propres d'un endomorphisme à l'aide du polynôme caractéristique, déterminants de Gram, calcul de la distance d'un point à un sous-espace de dimension finie, jacobien et caractérisation des difféomorphimes, caractérisation de la positivité des matrices symétriques réelles et application à la convexité d'une fonction numérique de plusieurs variables réelles par sa matrice Hessienne, etc.).

Motiver le choix d'une liste d'exercices, c'est expliquer la pertinence de ce choix, préciser les prérequis, situer les exercices dans leur contexte, commenter leur apport sur le plan pédagogique ... tout ceci doit faire l'objet d'une réflexion personnelle et d'un réel questionnement.

Certains candidats présentent très honorablement cette première partie de l'épreuve, et mettent ainsi en valeur leurs compétences pédagogiques et leurs acquis professionnels.

Résolution détaillée d'un exercice

A l'issue de la présentation des exercices, le candidat désigne un exercice qu'il se propose de résoudre en détail. Insistons sur le fait que ce choix revient au candidat et non aux examinateurs. Au cours de cette phase, tout comme pour la précédente, les examinateurs n'interviennent pas et le candidat doit faire preuve d'autonomie.

Tout d'abord, la pertinence du choix de l'exercice sera un élément important d'appréciation. Il s'agit de trouver un juste équilibre entre deux situations extrêmes : on voit parfois des candidats énumérer quatre énoncés d'exercices plutôt consistants pour finalement proposer la résolution d'un premier exercice très élémentaire. Ceci est bien sûr à éviter, mais il ne faut pas non plus tomber dans l'excès inverse : on voit aussi des candidats s'engager dans la résolution d'un exercice dont ils n'avaient visiblement pas mesuré la complexité. Présenter un exercice difficile impose qu'on en maîtrise les différents aspects, et cela ne s'improvise pas le jour de l'oral.

Bref : ni trop rudimentaire, ni trop ambitieux !

On doit par ailleurs bien comprendre qu'un exercice ne peut consister en la démonstration d'un théorème du cours. Par exemple, le fait que les seuls idéaux de l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers en sont les sous-groupes $n\mathbf{Z}$ doit raisonnablement faire partie d'un plan de cours sur la divisibilité dans $\mathbf{Z}$, mais ne saurait être proposé en exercice de la seconde épreuve.

Ajoutons encore que certains candidats s'avèrent incapables de fournir un énoncé correct des théorèmes qu'ils utilisent lors de la résolution de leurs exercices. Par exemple, le théorème du changement de variables pour les intégrales multiples est le plus souvent utilisé de manière « formelle », les candidats se trouvant la plupart du temps dans l'incapacité de formuler la moindre hypothèse de validité, y compris dans un cas particulier usuel comme celui des coordonnées polaires. Une telle situation est évidemment dommageable pour le candidat.

Enfin, le jury va évaluer la prestation du candidat en tenant compte de critères mathématiques (clarté de la démonstration, précision des arguments), mais aussi de critères non mathématiques, comme la fluidité de l'élocution et la gestion du tableau. Sur ce dernier point, il est regrettable que certains candidats (heureusement peu nombreux) présentent leurs calculs au tableau de façon véritablement chaotique ; ceci est du plus mauvais effet surtout de la part d'un professeur déjà en fonction. Une écriture lisible, des calculs correctement organisés, un certain équilibre entre les explications données oralement et celles écrites au tableau : ce sont des compétences professionnelles que les épreuves orales évaluent.

Questions du jury

Ces questions peuvent être de plusieurs sortes. Tout d'abord, il est bien souvent demandé au candidat de donner des précisions sur la résolution de l'exercice qu'il a proposé. Ceci permet de corriger d'éventuels lapsus (ou de mettre en évidence une faille dans la démonstration) et de s'assurer que le candidat a réellement saisi les divers aspects de la résolution (en examinant par exemple l'impact d'une modification des hypothèses sur le résultat annoncé). Ensuite, le candidat pourra être questionné sur un autre exercice figurant dans sa liste, ou sur un prolongement de l'un de ces exercices.

Par ailleurs, les examinateurs cherchent à déterminer si les notions apparaissant dans tel ou tel énoncé sont effectivement connues du candidat. En ce sens, le candidat, par un choix d'exercices trop ambitieux, risque d'élever le niveau des questions qui peuvent lui être posées. Il n'est pas recommandé d'évoquer des questions à propos desquelles on n'a aucun recul. Du reste, il n'est pas nécessaire de prendre un tel risque, puisqu'un choix bien équilibré d'exercices de niveau moyen, suivi d'un exposé correctement maîtrisé permettent d'obtenir une bonne note à l'épreuve.

Pour terminer, soulignons clairement que les questions du jury n'ont en aucun cas pour but de déstabiliser le candidat. Elles visent simplement à cerner au mieux l'étendue de ses connaissances afin de le classer, le plus justement possible, par rapport aux autres candidats.

Bibliothèque de l'agrégation

6 Bibliothèque de l'agrégation de mathématiques

AABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs (# 1)	MIT Press
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices (# 2)	Masson
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique (# 1)	Vuibert
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie (# 1)	Dunod
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations (# 1)	Cambridge
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe (# 2)	Cassini
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques – Tome 1A - Topologie (# 5) – Tome 1B - Fonctions numériques (# 6) – Tome 2 - Suites et séries numériques (# 7) – Tome 3 - Analyse fonctionnelle (# 6) – Tome 5 - Algèbre générale, polynômes (# 4) – Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie (# 6) – Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie (# 6)	Ellipses
ANDREWS G.	Number Theory (# 1)	Dover
APPLE A.W.	Modern compiler implementation – in C (# 1) – in Java (# 1) – in ML (# 1)	Cambrigde
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG (# 1)	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie – Tome I (# 2) – Tome II (# 1)	Ellipses
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse (# 9)	Dunod
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4 (# 1)	Dunod

ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques – 1. Algèbre (# 9) – 2. Analyse (# 7) – 3. Compléments d'analyse (# 8) – 4. Algèbre bilinéaire et géométrie (# 6)	DUNOD
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires (# 2)	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires (# 3)	MIR
ARTIN E.	Algèbre géométrique (# 5)	GAUTHIER-VILLARS
ARTIN E.	Algèbre géométrique (# 1)	GABAY
ARTIN M.	Algebra (# 2)	PRENTICE HALL
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée – Tome 1 (# 1) – Tome 2 (# 1)	PUF
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité (# 1)	MASSON
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates (# 1)	MASSON
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation (# 2)	BELIN
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle (# 1)	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel (# 3)	MASSON
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms Introduction to design & analysis (# 1)	ADDISON WESLEY
BADOUEL E., BOUCHERON S. **DICKY A., PETIT A.** **SANTHA M., WEIL P.,** **ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale (# 1)	SPRINGER

BAKHVALOV N.	Méthodes numériques (# 2)	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique (# 1)	HERMANN
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation) (# 1)	BELIN
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires (# 1)	DUNOD
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre (# 1)	DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES
BASS J.	Cours de Mathématiques – Tome 1 (# 2) – Tome 2 (# 2)	MASSON
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology (# 1)	SPRINGER
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers (# 3)	MC GRAW HILL
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle (# 3)	ARMAND COLIN
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés (# 3)	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie – Index (# 3) – 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs (# 3) – 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères (# 1) – 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes (# 3) – 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques (# 2) – 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères (# 3)	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie tome 2 (# 1)	NATHAN
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics (# 1)	PRENTICE HALL

BIDEGARAY B. **MOISAN L.**	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation (# 1)	SPRINGER
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics (# 1)	OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs (# 5)	PUF
BOAS R.	A primer of real functions (# 1)	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
BON J.L.	Fiabilité des systèmes (# 1)	MASSON
BONNANS J.F. **GILBERT J.C.** **LEMARECHAL C.** **SAGASTIZABAL C.**	Optimisation numérique (# 2)	SPRINGER
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique – Topologie générale, chapitres V à X (# 2) – Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII (# 2) – Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III (# 2) – Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV (# 2)	HERMANN
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes (# 3)	HERMANN
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités (# 1)	SPRINGER
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications (# 4)	MASSON
BRIANE M. **PAGES G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition (# 1)	VUIBERT
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'. (# 2)	ARMAND COLIN
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics (# 1)	CAMBRIDGE
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire – 1. Espaces vectoriels , Polynômes (# 4) – 2. Matrices et réduction (# 2)	ELLIPSES

CABANNES H.	Cours de Mécanique générale (# 2)	Dunod
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux (# 1)	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes (# 2)	PUF
CARREGA J.C.	Théorie des corps (# 1)	Hermann
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971) (# 4)	Hermann
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977) (# 1)	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles (# 4)	Hermann
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques (# 6)	Hermann
CARTIER P. **KAHANE J.P.** **ARNOLD V. et al.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui (# 1)	Cassini
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing (# 1)	Prentice Hall
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée) (# 3)	Masson
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation – Analyse 2 (# 2) – Analyse 3 (# 3)	Masson
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices (# 1)	Masson
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra (# 2)	Springer Verlag
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie (# 6)	Masson
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie (# 5)	Hermann

CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	– Algèbre 1 (# 1) – Algèbre 2 (# 2)	Ellipses
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation (# 3)	Masson
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes (# 1)	Vuibert
COHN P.M.	Algebra Volume 1 (# 1)	John Wiley
COLLET P.	Modeling binary data (# 1)	Chapman and Hall
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques (# 1)	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique – 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats (# 1) – 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles (# 1)	Dunod
CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique (# 1)	Dunod
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités (# 3)	Cassini
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics – Volume 1 (# 1) – Volume 2 (# 1)	John Wiley
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	Ediscience
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry (# 1)	John Wiley
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos (# 1)	Institute of Physics Publishing
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	– Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe (# 3) – Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe (# 2)	Masson

DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités (# 2)	Masson
DARTE A. **VAUDENAY S.**	Algorithmique et optimisation (# 1)	Dunod
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique Théorie de la démonstration (# 1)	Dunod
DEHEUVELS P.	L'intégrale (# 2)	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale (# 2)	Que-sais-je ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques (# 3)	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique (# 2 ?)	Dunod
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité (# 2)	Springer
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments (# 2)	Jacques Gabay
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles (# 2 (1 de 1991 + 1 de 1996))	PU Grenoble
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations (# 1)	Ellipses
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes (# 2)	Cassini
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications (# 1)	Springer
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres (# 2)	PUF
DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN, RUAUD** **MIQUEL, SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés – 1ère année MPSI, PCSI, PTSI (# 3) – 2ème année MP, PC, PSI (# 3)	Dunod

DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2 (# 2)	Ellipses
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire (# 4)	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal (# 3)	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques (# 1)	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. – Fondements de l'analyse moderne (# 5) – Éléments d'Analyse Tome 2. (# 5)	Gauthier-Villars
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle – Première année (# 3) – Deuxième année (# 3)	Gauthier-Villars
DUBUC S.	Géométrie plane (# 4)	PUF
DUCROCQ A. **WARUSFEL A.**	Les Mathématiques, plaisir et nécessité Un parcours guidé dans l'univers des mathématiques (# 1)	Vuibert
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages (# 1)	Vuibert
DYM H. **Mac KEAN H.P.**	Fouriers series and integrals (# 2)	Academics Press
EBBINGHAUS, HERMES HIRZEBRUCH, KOECHER LAMOTKE, MAINZER NEUKIRSCH, PRESTEL, REMMERT	Les Nombres (# 2)	Vuibert
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions (# 1)	Dunod
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles (# 3)	Ellipses

EPISTEMON L. (OVAERT J.L. VERLEY J.L.)	Exercices et problèmes – Analyse. Volume 1 (# 1) – Algèbre. (# 3)	Cédic/Nathan
EXBRAYAT J.M. MAZET P.	Notions modernes de mathématiques – Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles (# 3) – Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse (# 3) – Analyse 2 : Éléments de topologie générale (# 3)	Hatier
FADDEEV D. SOMINSKI I.	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure (# 3)	MIR
FAIRBANK X. BEEF C.	POX - Exercices posés au petit oral de l'X (# 7)	Ellipses
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie (# 1)	Calvage et Mounet
FARAUT J. KHALILI E.	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur (# 1)	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications – Volume 1 (# 2+1 mal relié) – Volume 2 (# 2)	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence (# 2)	Masson
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions – Tome 1 - Topologie (# 3 (1ère) + 7 (2ème)) – Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle (# 1 (1ère) + 5 (2ème)) – Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples (# 7) – Tome 4 - Séries, équations différentielles (# 1+7)	Vuibert
FRANCHINI J. JACQUENS J-C.	Mathématiques Spéciales – Algèbre (# 1) – Analyse 1 (# 1) – Analyse 2 (# 1)	Ellipses
FRANCINOU S. GIANELLA H. NICOLAS S.	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1 (# 2)	Cassini
FRANCINOU S. GIANELLA H.	Exercices de Mathématiques Algèbre 1 (# 1)	Masson

FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur (# 1)	Hermann
FRESNEL J.	Géométrie algébrique (# 3)	UFR Maths Bordeaux
FRESNEL J.	Géométrie (# 3)	IREM de Bordeaux
FRESNEL J.	Anneaux (# 1)	Hermann
FRESNEL J.	Groupes (# 1)	Hermann
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie (# 1)	Hermann
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra (# 1)	Springer
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire (# 3)	Cassini
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices – Tome 1 (# 1) – Tome 2 (# 1)	Dunod
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus (# 2)	Vuibert
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse (# 2)	Springer
GOBLOT R.	Algèbre commutative (# 2)	Masson
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie (# 1)	Masson
GODEMENT R.	Analyse – Tome 1 (# 2) – Tome 2 (# 2) – Tome 3 (# 1)	Springer
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre (# 4)	Hermann
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations (# 1)	Wiley

GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation – Topologie et Analyse fonctionnelle (# 2) – Calcul différentiel (# 1)	Ellipses
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales – Tome 1 - Algèbre (# 1) – Tome 2 - Topologie et analyse réelle (# 1) – Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel (# 1) – Tome 4 - Géométrie affine et métrique (# 1) – Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes (# 1)	PUF
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' – Algèbre (# 2) – Analyse (# 2)	Ellipses
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire (# 2)	Hermann
GRAMAIN A.	Intégration (# 1)	Hermann
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction) (# 1)	Oxford
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics (# 1)	Wiley
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse (# 7)	Ellipses
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands (# 1)	Cassini
HAMMAD P.	Cours de probabilités (# 3)	Cujas
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités (# 3)	Cujas
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing (# 1)	Springer
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers (# 2)	Oxford
HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do (# 1)	Oxford

HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing (# 1)	Addison Wesley
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications (# 2)	Masson
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis – Volume 1 (# 1) – Volume 2 (# 1) – Volume 3 (# 2)	Wiley-Interscience
HERVE M.	Les fonctions analytiques (# 4)	PUF
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle (# 2)	Masson
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation (# 1)	Addison Wesley
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices (# 1)	Belin
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory (# 2)	Springer Verlag
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy) (# 1)	Vuibert-Springer
ITARD J.	Les nombres premiers (# 1)	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra – Tome I (# 2) – Tome II (# 2)	Freeman and Co
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes (# 4)	Cassini
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis (# 1)	Dover
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces (# 3)	Hermann
KNUTH D.E.	The art of computer programming – Volume 1 : Fundamental algorithms (# 1) – Volume 2 : Seminumerical algorithms (# 1) – Volume 3 : Sorting and Searching (# 1)	Addison-Wesley

KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle (# 1)	ELLIPSES
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres (# 1)	MODULO
KÖRNER T.W.	Fourier analysis (# 2)	CAMBRIDGE
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis (# 1)	CAMBRIDGE
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2 (# 1)	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens (# 1)	CASSSINI
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles (# 2)	PUF
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles (# 1)	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution (# 1)	MASSON
LANG S.	Algèbre linéaire – Tome 1 (# 2) – Tome 2 (# 2)	INTEREDITIONS
LANG S.	Algebra (# 1 (1ère) + 5 (7ème))	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Linear Algebra (# 3)	ADDISON-WESLEY
LAVILLE G.	Courbes et surfaces (# 1)	ELLIPSES
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation (# 2)	ELLIPSES
LAX P. D.	Linear Algebra (# 1)	WILEY
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie (# 3)	PUF

LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques (# 1)	Jacques Gabay
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation (# 8)	Masson
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales – Tome 1 : Topologie (# 8) – Tome 3 : Intégration et sommation (# 5) – Tome 4 : Analyse en dimension finie (# 8) – Tome 5 : Analyse fonctionnelle (# 5)	Masson
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS – Tome I - Algèbre 1 (# 2) – Tome 2 - Algèbre et géométrie (# 6) – Tome 3 - Analyse 1 (# 6) – Tome 4 - Analyse 2 (# 9)	Ellipses
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques – Tome 1 pour M-M' : Algèbre (# 4) – Tome 1 pour A-A' : Algèbre (# 4) – Tome 2 : Analyse (# 11) – Tome 3 : Géométrie et cinématique (# 5) – Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples (# 4)	Dunod
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle (# 3)	Masson
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie (# 4)	PUF
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie (# 1)	Armand Colin
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition) (# 1)	Vuibert
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus (# 1)	Vuibert
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words (# 1)	Cambridge
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre – 1 : Structures fondamentales (# 4) – 2 : Les grands théorèmes (# 4)	Gauthier-Villars

MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory (# 1)	Springer
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices (# 1)	Masson
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes (# 2)	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque (# 2)	Hermann
Manuels Matlab	– Using Matlab version 5 (# 3) – Using Matlab version 6 (# 2-3 ?) – Statistics Toolbox (# 1-3 ?)	
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI (# 1)	Ellipses
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle – Tome 2 : Exercices et corrigés (# 1) – Tome 3 : Exercices et corrigés (# 1) – Tome 4 : Exercices et corrigés (# 1)	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions (# 2)	De Boeck Université
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation (# 1)	Ellipses
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability (# 1)	Springer
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités (# 1)	Dunod
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique (# 3)	Ellipses
MEUNIER	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés – Tome 2 (# 1)	PUF
MIGNOTTE M.	Algèbre concrète, cours et exercices (# 1)	Ellipses
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel (# 2)	PUF

MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages (# 1)	Cambridge
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes (# 3)	Cassini
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes (# 1)	Calvage et Mounet
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques (# 5)	Hermann
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions (# 2)	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries (# 4)	Ellipses
MONIER J.M.	Cours de mathématiques – Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI (# 1) – Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI (# 2) – Analyse 3 MP, PSI, PC, PT (# 1) – Analyse 4 MP, PSI, PC, PT (# 1) – Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI (# 3) – Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT (# 4) – Exercices d'analyse MPSI (# 1) – Exercices d'analyse MP (# 2) – Exercice d'algèbre et géométrie MP (# 3)	Dunod
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique – Tome 1 (# 3) – Tome 2 (# 3)	Vuibert
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel (# 1)	Seuil
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés (# 1)	Masson
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités (# 1)	Masson
NIVEN I.	Irrational numbers (# 2)	Mathematical Association of America
NORRIS J.R.	Markov chains (# 1)	Cambridge

OPREA J.	Differential geometry (# 1)	PRENTICE HALL
OUVRARD J.Y.	– Probabilités 1 (capes, agrégation) (# 2) – Probabilités 2 (maîtrise, agrégation) (# 3)	CASSINI
PAGES G. **BOUZITAT C.**	En passant par hasard . . . ? Les probabilités de tous les jours (# 1)	VUIBERT
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs (# 2)	SPRINGER
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course (# 1)	DOVER
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems (# 1)	SPRINGER
PERRIN D.	Cours d'Algèbre (# 3)	ELLIPSES
PERRIN D.	Cours d'Algèbre (# 5)	ENSJF
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE (# 3)	CASSINI
PETAZZZONI B.	Seize problèmes d'informatique (# 1)	SPRINGER
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis – Volume I (# 3) – Volume II (# 3)	SPRINGER VERLAG
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse (# 1)	ELLIPSES
QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse (# 1)	DUNOD
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis (# 1)	INTERNATINAL STUDENT EDITION
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales – 1- Algèbre (# 10) – 2- Algèbre et applications à la géométrie (# 11) – 3- Topologie et éléments d'analyse (# 14) – 4- Séries et équations différentielles (# 8) – 5- Applications de l'analyse à la géométrie (# 8)	MASSON

RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions – Algèbre (# 1) – Analyse 1 (# 5) – Analyse 2 (# 7)	MASSON
RAMIS J.- P., WARUSFEL A. **BUFF X., GARNIER J.** **HALBERSTADT E.** **LACHAND-ROBERT T.** **MOULIN F., SAULOY J.**	Mathématiques Tout-en-un pour la licence Cours complet avec 270 exercices corrigés – niveau L1 (# 2)	DUNOD
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application (# 1)	WILEY
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques (# 1)	LIVRE DE POCHE
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel (# 2)	HERMANN
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants (# 2)	SPRINGER
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple (# 1)	VUIBERT
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières (# 1)	CÉDIC/NATHAN
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques (# 2)	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle (# 2)	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Interpolation, approximation Analyse pour l'agrégation (# 2)	VUIBERT
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3 (# 2)	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe (# 3)	MASSON
RUDIN W.	Functional analysis (# 3)	MC GRAW HILL
RUDIN W.	Real and complex analysis (# 4)	MC GRAW HILL

SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques (# 2)	Masson
SAMUEL P.	Géométrie projective (# 2)	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres (# 2)	Hermann
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1 (# 1)	Ellipses
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre (# 1)	Springer
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux (# 1)	Ellipses
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices (# 1)	Vuibert
SCHWARTZ L.	Analyse – I Topologie générale et analyse fonctionnelle (# 5) – II Calcul différentiel et équations différentielles (# 1)	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse (# 6)	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithms (# 2)	Addison Wesley
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java (# 1)	Pearson Education
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C (# 1)	Dunod
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes (# 1)	Springer
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique (# 3)	PUF
SERVIEN Cl.	– Analyse 3 (# 1) – Analyse 4 (# 1)	Ellipses

SIDLER J.C.	Géométrie Projective (# 1)	Dunod
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation (# 1)	Thomson C. T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse (# 1)	Dunod
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I (# 1)	Waddworth and Brooks
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre (# 1)	Cassini
TAUVEL P.	Cours de Géométrie (# 1)	Dunod
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation (# 2)	Masson
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2 (# 1)	Masson
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2 (# 2)	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1 (# 1)	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres (# 2)	Institut Elie Cartan
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers (# 2)	Que sais-je ? PUF
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne (# 1)	Hermann
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions (# 4)	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions (# 2)	Oxford
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires (# 1)	Masson

TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables (# 1)	Vuibert
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires (# 1)	IREM des Pays de Loire
TURING A **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing (# 1)	Seuil
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique – I Théorie des fonctions (# 3) – II Équations fonctionnelles - Applications (# 3)	Masson
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités (# 1)	Hermann
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation (# 2)	Masson
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes Équations différentielles (# 1)	Hermann
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies (# 2)	Classiques Hachette
WARUSFEL, ATTALI COLLET, GAUTIER, NICOLAS	Mathématiques – Analyse (# 1) – Arithmétique (# 1) – Géométrie (# 1) – Probabilités (# 1)	Vuibert
WEST D. B.	Introduction to graph theory (# 1)	Prentice Hell
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis (# 3)	Cambridge
WILF H.	Generatingfunctionology (# 1)	Academic Press
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire (# 2)	Cassini
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages (# 1)	MIT Press
YALE P.B.	Geometry and Symmetry (# 1)	Dover

YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics (# 1)	Dover
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie (# 3)	Cassini
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation (# 1)	Masson