Interrogation écrite n=°2 : fonctions dérivables Correction

Une et une seule bonne réponse. Barême: pas de réponse 0;bonne réponse:+1;mauvaise réponse:-0,5

1) La fonction
$$x \to \sqrt{x}$$
 est: : **A.** ... dérivable sur \mathbb{R}

B. ... continue sur \mathbb{R}^{+^*}

C.... dérivable sur \mathbb{R}^+

2) La fonction
$$x \rightarrow |x|$$
 ... A. ... est continue et non dérivable sur \mathbb{R}

B. ...dérivable et non continue sur R

C. ...est dérivable en 0

3) Si f est une fonction dérivable sur
$$\mathbb{R}^*$$
 telle que f'(x)=0 pour tout $x \neq 0$ alors:

A. f est constante sur \mathbb{R}^*

B. f n'est pas constante sur \mathbb{R}^*

C. on ne sait pas déterminer si f est constante ou pas sur \mathbb{R}^*

Ouestions de cours

On rappelle les propriétés suivantes:

 $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ **P1:** Pour tout x réel,

P2: cos'=-sin et sin'=cos

1) Démontrer que
$$\tan(x+\pi) = \tan(x)$$
 pour tout x différent de $\frac{\pi}{2} + k \pi$.

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

2) Démontrer que la fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est : $1+\tan^2 x$.

On dérive un quotient :
$$\tan'(x) = \frac{\cos(x) \times \cos(x) + \sin(x) \times \sin(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + \tan^2(x)$$

Exercice 1

1) Etudier les variations et les limites de la fonction f définie sur
$$\mathbb{R}^*$$
 par : $f(x) = x + \frac{2}{x}$

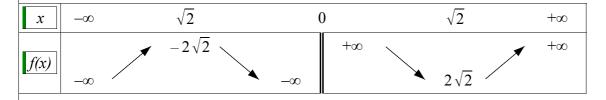
$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$
 le signe de f(x) est donc celui de $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

On calcule done:
$$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$
 et $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$

On calcule donc:
$$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$
 et $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$
Comme, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et que $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Comme,
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$
 et que $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
Comme $\lim_{x \to 0} x = 0$ on a : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

2) En déduire le tableau de variation de la fonction f.



Exercice 2

1) Etudier les variations de la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x)=x-\sqrt{x^2+8}$

$$g'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 8}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 8}} = \frac{\sqrt{x^2 + 8} - x}{\sqrt{x^2 + 8}}$$

Le signe de g'(x) est donc celui de
$$\sqrt{x^2+8}-x$$
.
Or $x^2+8>x^2$ donc $\sqrt{x^2+8}>\sqrt{x^2}$ et $\sqrt{x^2+8}>|x|$

Comme |x| > x, $\sqrt{x^2 + 8} > x$ et g'(x) > 0 sur |R|

f est donc croissante sur R

2) Soit f une fonction vérifiant : f(1)=-2 et $f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$. Montrer que pour tout x, f(x)=g(x).

On pose h(x)=f(x)-g(x).

h'(x)=f'(x)-g'(x)=0 donc h est constante sur \mathbb{R} (d'après le théorème «Dérivée et variations »).

De plus h(1)=f(1)-g(1)=-2-(-2)=0 donc h est la fonction nulle. Donc pour tout x, f(x)=g(x).

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par: $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=-x^2-1$. Existe-t-il une tangente commune aux courbes représentatives de ces fonctions dans un repère?

Tangente à Cf en a: T
$$y=2a(x-a)+a^2+1=2ax-a^2+1$$

Tangente à Cg en b: T' $y=-2b(x-b)-b^2-1=-2bx+b^2-1$

Pour qu'il y ait une tangente commune, il faut que les coefficients directeurs et les ordonnées à l'origine de T et T' soient égaux:

$$\begin{cases} 2a = -2b \\ -a^2 + 1 = b^2 - 1 \end{cases}$$
 d'où :
$$\begin{cases} a = -b \\ -b^2 + 1 = b^2 - 1 \end{cases}$$
 la seconde équation se ramène à $b^2 = 1$ donc b=1 ou b=-1

On obtient deux tangentes communes: y=-2x et y=2x