Nom: .... Prénom:............... Classe: .... Date: ....

Interrogation écrite n=°2 : fonctions dérivables

Correction

QCM

Une et une seule bonne réponse.
Barême: pas de réponse 0;bonne réponse:+1;mauvaise réponse:-0,5

1) La fonction $x \to \sqrt{x}$ est: :

A. ....dérivable sur $\mathbb{R}$
B. ...continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
C.... dérivable sur $\mathbb{R}^{+}$

2) La fonction $x \to |x|$ ...

A. ...est continue et non dérivable sur $\mathbb{R}$
B. ...dérivable et non continue sur $\mathbb{R}$
C. ...est dérivable en 0

3) Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ telle que f'(x)=0 pour tout $x \neq 0$ alors :

A. f est constante sur $\mathbb{R}^*$
B. f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$
C. on ne sait pas déterminer si f est constante ou pas sur $\mathbb{R}^*$

Questions de cours

On rappelle les propriétés suivantes:

P1: Pour tout x réel, $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$ et $\sin(x+\pi)=-\sin(x)$
P2: cos'=-sin et sin'=cos

1) **Démontrer que** $\tan(x+\pi)=\tan(x)$ **pour tout x différent de** $\frac{\pi}{2}+k\pi$ **.**

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\underset{P1}{=}\frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\tan(x)$$

2) **Démontrer que la fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est :** $1+\tan^2 x$ **.**

On dérive un quotient : $\tan'(x)=\dfrac{\cos(x)\times\cos(x)+\sin(x)\times\sin(x)}{\cos^2(x)}=1+\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2=1+\tan^2(x)$

Exercice 1

1)Etudier les variations et les limites de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=x+\frac{2}{x}$

$f'(x)=1-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-2}{x^2}$ le signe de f'(x) est donc celui de $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

On calcule donc: $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ et $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$

Comme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Comme, $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$ et que $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Comme $\lim_{x\to 0} x=0$ on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

2) **En déduire le tableau de variation de la fonction f.**

x	$-\infty$	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-2\sqrt{2}$	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	$2\sqrt{2}$	↗ $+\infty$

Exercice 2

1) Etudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ **par :** $g(x)=x-\sqrt{x^2+8}$

$$g'(x)=1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}=\frac{\sqrt{x^2+8}-x}{\sqrt{x^2+8}}$$

Le signe de g'(x) est donc celui de $\sqrt{x^2+8}-x$.

Or $x^2+8>x^2$ donc $\sqrt{x^2+8}>\sqrt{x^2}$ et $\sqrt{x^2+8}>|x|$

Comme $|x|>x$, $\sqrt{x^2+8}>x$ et $g'(x)>0$ sur $\mathbb{R}$

f est donc croissante sur $\mathbb{R}$

2) Soit f une fonction vérifiant : f(1)=-2 et $f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$ **. Montrer que pour tout x, f(x)=g(x).**

On pose h(x)=f(x)-g(x).

h'(x)=f'(x)-g'(x)=0 donc h est constante sur $\mathbb{R}$ (d'après le théorème «Dérivée et variations »).

De plus h(1)=f(1)-g(1)=-2-(-2)=0 donc h est la fonction nulle.Donc pour tout x, f(x)=g(x).

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ **par:** $f(x)=x^2+1$ **et** $g(x)=-x^2-1$ **.**
Existe-t-il une tangente commune aux courbes représentatives de ces fonctions dans un repère ?

Tangente à Cf en a: T $y=2a(x-a)+a^2+1=2ax-a^2+1$
Tangente à Cg en b: T' $y=-2b(x-b)-b^2-1=-2bx+b^2-1$

Pour qu'il y ait une tangente commune, il faut que les coefficients directeurs et les ordonnées à l'origine de T et T' soient égaux:

$\begin{cases}2a=-2b\\-a^2+1=b^2-1\end{cases}$ d'où : $\begin{cases}a=-b\\-b^2+1=b^2-1\end{cases}$ la seconde équation se ramène à $b^2=1$ donc b=1 ou b=-1

On obtient deux tangentes communes: y=-2x et y=2x