FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

1. Soit la fonction f, définie par la formule : $\boxed{f(x) = x^2 - 2\ln x}$

1) expliquer pourquoi cette fonction n'est définie que pour x positif.
   déterminer sa dérivée f' .

2) étudier le signe de cette dérivée selon les valeurs de x.
   dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle [0,1 ;3].

3) tracer sa représentation graphique ***C*** dans un repère orthonormé d'unité 2 cm, après avoir calculé au moins 4 valeurs.

4) donner une équation de la tangente ***T*** à la courbe au point P d'abscisse 0,5.
   Tracer ***T***.

2. Soit la fonction g, définie par la formule : $\boxed{g(x) = \frac{1}{10}e^x - x - 1}$

1) calculer g(x) pour les valeurs entières de l'intervalle [–5 ; 5] ; arrondir au dixième.

2) déterminer la dérivée g'
   calculer : g(ln10) et interpréter graphiquement ce résultat.

3) dresser le tableau de variations de g.

4) tracer la courbe C_g dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

3. La température **θ** d'une plaque chauffante varie en fonction du temps **t** selon la formule :

$\boxed{\theta = 640(1 - \lambda.e^{-t/1000})}$ (θ en degré celsius, t en seconde)

1) déterminer la valeur du coefficient λ, sachant qu'à l'instant t = 0, θ = 24.

2) tracer la représentation graphique de cette fonction pour les dix premières minutes.

3) représenter dans le même repère la limite de cette fonction lorsque t $\longrightarrow +\infty$

4) inverser la formule (exprimer t en fonction de θ)
   calculer le temps nécessaire pour atteindre la température de 400 °C

4. Charge et décharge d'un condensateur

1ère partie

Lorsqu'on charge un condensateur à travers une résistance, la tension $\mathbf{U_c}$ à ses bornes (exprimée en V) varie en fonction du temps de charge **t** (exprimé en s) selon la formule :

$\boxed{\mathbf{U_c(t) = U(1 - e^{-t/RC})}}$ dans laquelle : **U** est la tension d'alimentation, en V
R est la résistance, en Ω
C est la capacité du condensateur, en F

1) En utilisant les valeurs suivantes (U = 5V, R = 100 kΩ, C = 10 µF), montrer que la formule se ramène à :

$$\boxed{\mathbf{U_c(t) = 5(1 - e^{-t})}}$$

2) On étudie maintenant la fonction $\mathbf{U_c}$ définie au 1)

   a) calculer la dérivée $\mathbf{U_c'}$, et étudier son signe (voir formulaire ci-dessous).
   b) dresser le tableau de variations de U_c sur l'intervalle [0 ; 5]
   c) déterminer les équations des tangentes aux points d'abscisses : t = 0, et t = 1.
   d) tracer la courbe représentative de $U_c(t)$ sur l'intervalle [0 ; 5], et y faire figurer les deux tangentes.

2ème partie

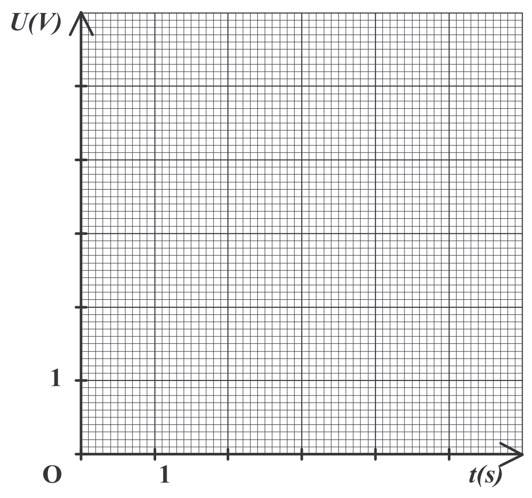
La décharge du condensateur dans les mêmes conditions se traduit par la formule : $\boxed{\mathbf{U_d(t) = 5e^{-t}}}$

1) écrire une relation simple entre les deux fonctions U_c e t U_d

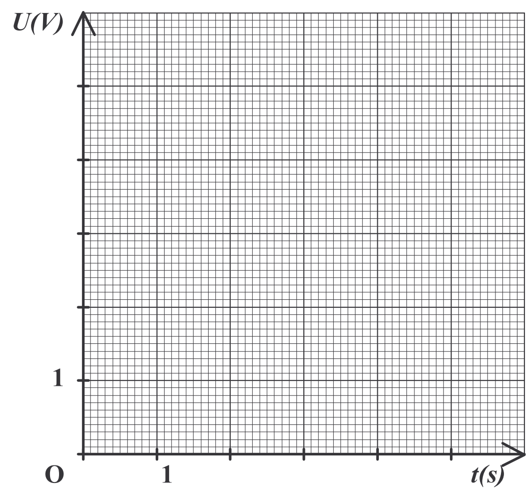
2) tracer la courbe représentative de U_d sur l'intervalle [0 ; 5].

Formulaire : la dérivée de la fonction : $\boxed{f(x) = e^{ax}}$ (avec a : nombre quelconque)
est la fonction : $\boxed{f'(x) = a.e^{ax}}$

Courbe de charge :



Courbe de décharge :



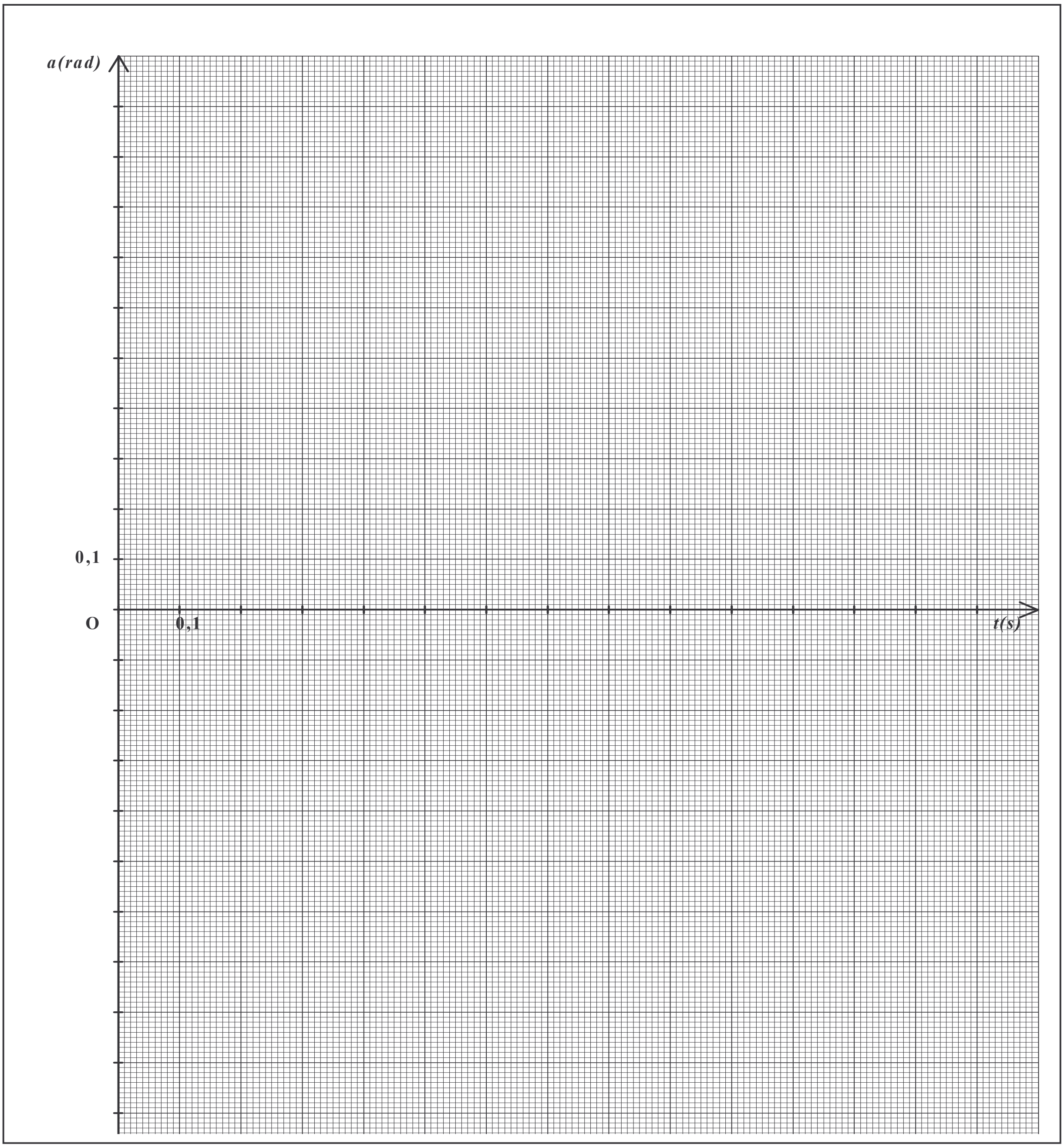
5. L'amplitude (en radian) des oscillations d'un pendule varie en fonction du temps (en s) selon la formule :

$$\boxed{a(t) = e^{(-0{,}2t)}\ \sin(5t + \pi/2)}$$

1) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous (**<u>régler la calculatrice en mode radian</u>**)

t	0	0,1	0,2			0,5					1			1,3
a	1					-0,72					0,23			0,76

2) Représenter graphiquement cette fonction sur l'intervalle [0 ; 1,3]



6. Amplificateur

On s'intéresse à la bande passante d'un amplificateur.

La tension d'entrée a pour fréquence **f** et pour valeur efficace $\mathbf{V_e}$
La tension de sortie a pour valeur efficace $\mathbf{V_s}$.
Le gain de l'amplificateur, exprimé en dB, est donné par la formule : **Erreur !**

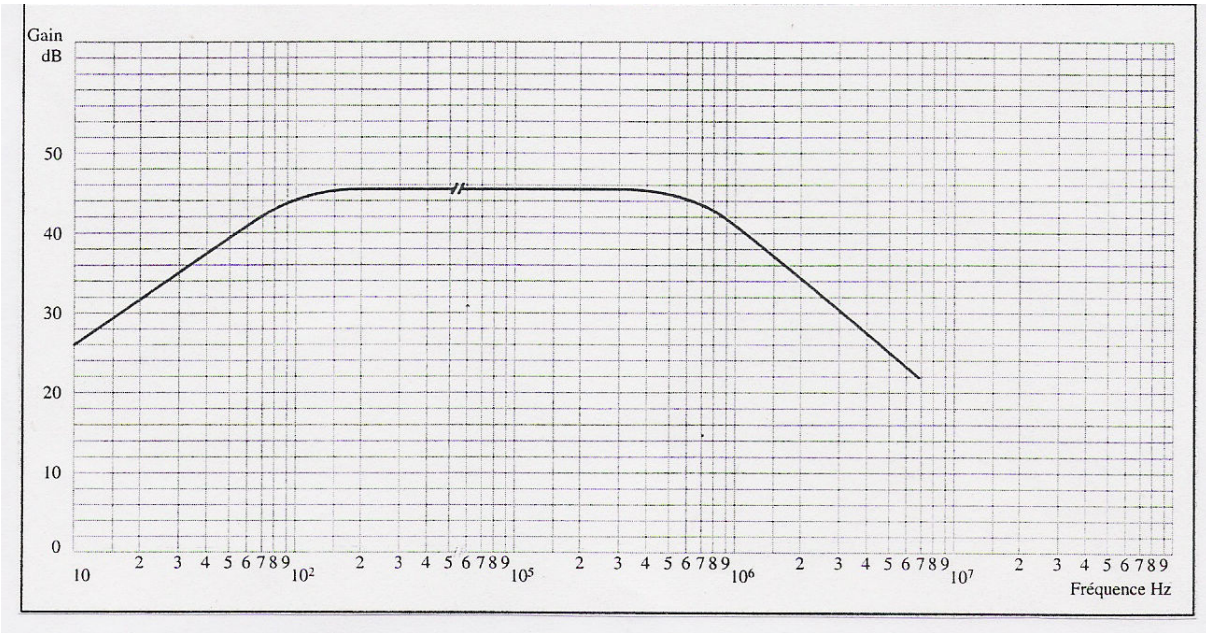
Le graphique ci-dessous représente les variations de **G** en fonction de **f,** pour $\mathbf{V_e = 25\ mV}$
L'échelle des abcisses est logarithmique.

1) déterminer graphiquement le gain correspondant à une fréquence de 50 Hz;
   en déduire, par un calcul, la tension de sortie V_s.

2) déterminer graphiquement les fréquences pour lesquelles le gain est de 35 dB.

3) La **bande passante** est la largeur de l'intervalle de fréquences pour lesquelles le gain est atténué de 3 dB par rapport au gain maximal : $\boxed{G = G_{max} - 3}$

   a) déterminer G_{max} puis G
   b) déterminer graphiquement les bornes $\mathbf{f_1}$ et $\mathbf{f_2}$ de l'intervalle, puis la bande passante: $\mathbf{f_2 - f_1}$



7. On réalise le dosage d'un acide par de la soude

Le **pH** du mélange est fonction du volume **x** (exprimé en ml) de soude versé, selon les formules suivantes :

si $x = 0$: $\quad pH = 1$

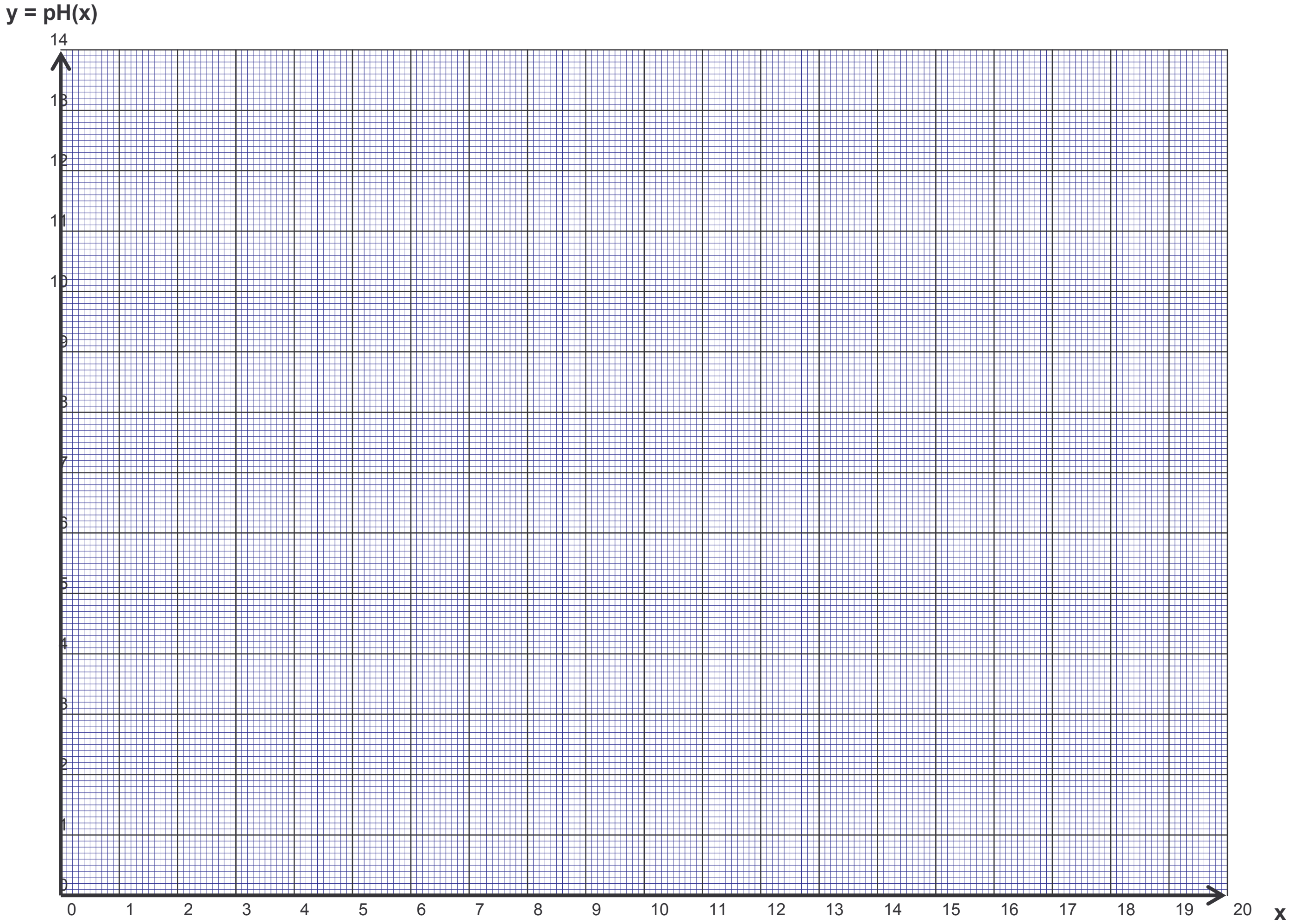
si $0 \leq x \leq 10$: $\quad pH = 1 - \log\left(\frac{10 - x}{10 + x}\right)$

si $x = 10$: $\quad pH = 7$

si $10 \leq x$: $\quad pH = 13 + \log\left(\frac{x - 10}{x + 10}\right)$

Représenter graphiquement pH(x) pour $x \in [0 ; 20]$

x																				
y																				



8. Radioactivité

La période d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la moitié des noyaux d'atomes sont désintégrés.
Par exemple, la période du polonium est T = 138 jours.

On considère un échantillon de masse initiale : $m_0 = 1g$
On note $\mathbf{m_n}$ la masse restant au bout de n périodes.

1) montrer que $\mathbf{(m_n)}$ est une suite géométrique ; préciser son 1[er] terme et sa raison.
2) exprimer m_n en fonction de m_0 et de n.
3) calculer la masse de polonium restant au bout de 690 jours.
4) Calculer le temps au bout duquel il ne reste que 1 mg de polonium

9. Déplacement de la tête d'un vérin hydraulique

On désigne par **S** le déplacement, exprimé en cm, et par **t** le temps, en seconde.

On a: $\boxed{S = 15(1 - e^{-t})}$ sur l'intervalle: [0;5]

1) compléter le tableau de valeurs :

t (en s.)	0	1	2	3	4	5
S (en cm)						

2) calculer la dérivée S'(t) de la fonction S.
3) calculer S'(0)
4) écrire l'équation de la tangente à la courbe au point A d'abscisse t = 0.
5) représenter graphiquement la fonction S(t) et la tangente au point A dans un repère d'unités d'axes: 4 cm pour les abcisses ; 1 cm pour les ordonnées
6) résoudre l'équation : ($14,85 = 15(1 - e^{-t})$)
7) donner la signification graphique de cette équation.

10. Dans la formule suivante, **I** désigne l'intensité du son en W/m^2 , **L** désigne le niveau sonore en dB

$$\boxed{L = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)}$$

1) calculer l'intensité d'un son de niveau 40 dB, délivré par une baffle
2) on ajoute une 2[ème] baffle qui délivre un son de même intensité; calculer le niveau sonore atteint par l'ensemble des deux baffles
3) quel serait le niveau sonore obtenu par l'utilisation de 4 baffles, chacune délivrant un son de niveau : 40 dB